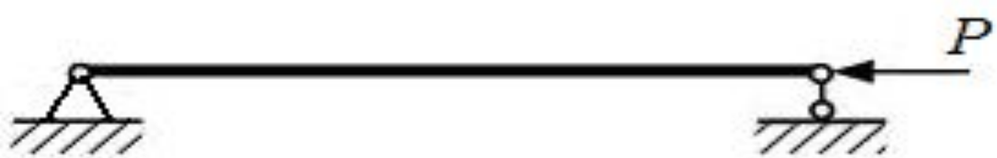
Тема 5. Устойчивость пластин и оболочек

Понятие об устойчивости.
Задача Эйлера

Под устойчивостью понимается свойство системы самостоятельно восстанавливать свое первоначальное состояние после того, как ей было сообщено некоторое отклонение от положения равновесия.

Задача Эйлера – задача о равновесии стержня, сжатого центральными силами



При малых прогибах $EIy'' = M$

Изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости и поэтому под величиной *I* понимается минимальный момент инерции сечения.

Понятие об устойчивости.
Задача Эйлера

$$M = -Py \qquad EIy'' = -Py \qquad k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

Граничные условия

1) $y(0) = 0 \quad => \quad C_2 = 0$

2) $y(L) = 0 \quad => \quad C_1 \sin kL = 0$

$$C_1 = 0 \quad C_1 = C_2 = 0$$

Понятие об устойчивости. Задача Эйлера

$$\sin kL = 0 \quad => \quad kL = \pi n \quad k = \frac{\pi n}{L}$$

$$k^2 = \frac{P}{EI} \qquad P = EIk^2 = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} EI$$

$$n = 1 \qquad P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

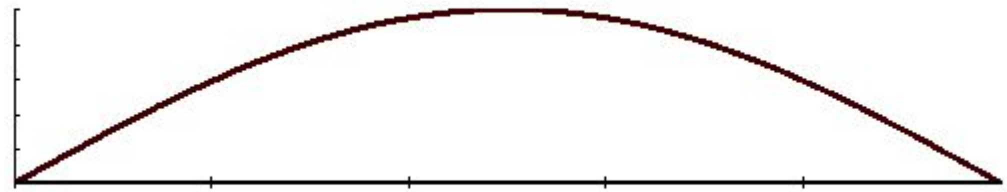
$$k = \frac{\pi}{L} \quad => \quad y = C_1 \sin\frac{\pi x}{L}$$

$$k = \frac{\pi n}{L} \quad => \quad y = C_1 \sin\frac{\pi n x}{L}$$

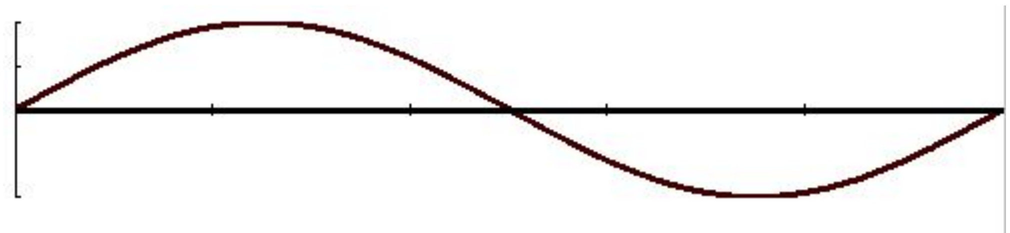
Устойчивость стержней

$$y = C_1 \sin\frac{\pi n x}{L}$$

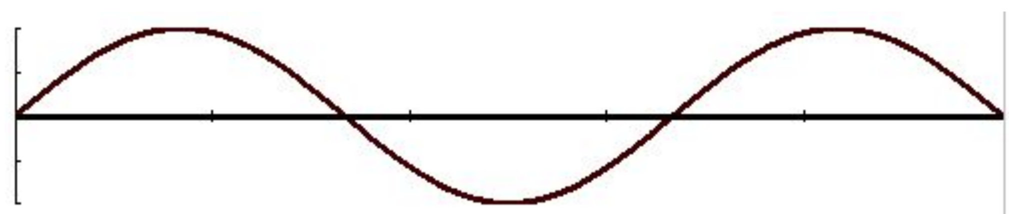
$n = 1 \quad y = C_1 \sin\frac{\pi x}{L}$



$n = 2 \quad y = C_1 \sin\frac{2\pi x}{L}$



$n = 3 \quad y = C_1 \sin\frac{3\pi x}{L}$



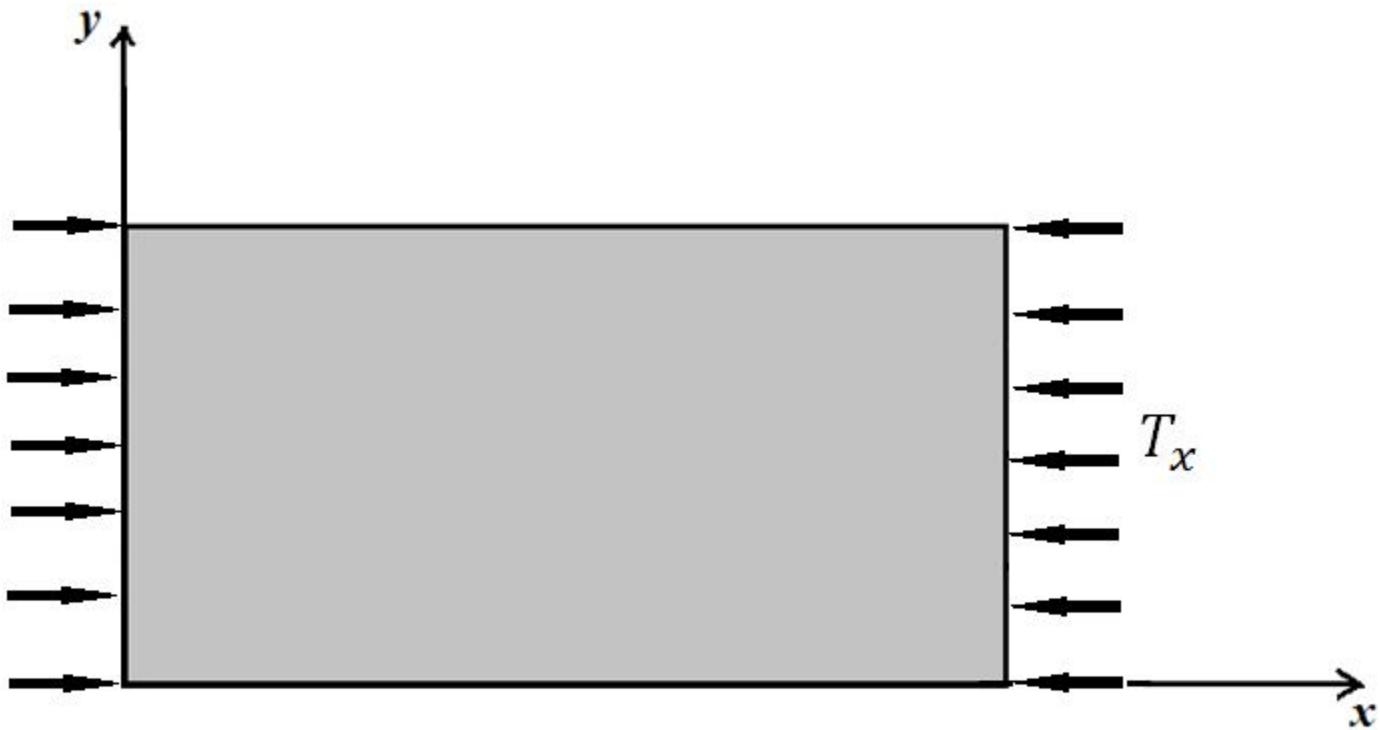
Устойчивость пластин

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластины при действии сил в срединной плоскости

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{1}{D}\left(-p + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial xy} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Это уравнение следует использовать в том случае, если пластина, кроме поперечных нагрузок подвергается еще и действию сил в ее срединной плоскости.

Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и сжатой в одном направлении



Пластина свободно оперта по сторонам $x = 0, x = a, y = 0, y = b$

$a > b$

Вычислим, при каких значениях сжимающих сил пластина потеряет устойчивость.

Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и сжатой в одном направлении

Предположим, что выпучивание пластины происходит по уравнению

$$w = C \cdot \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \qquad (2)$$

Уравнение (2) удовлетворяет граничным условиям

Проверим, удовлетворяет ли решение (2) исходному дифференциальному уравнению (1)

Дифференцируя уравнение (2) получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{m^2\pi^2}{a^2}w \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{m^4\pi^4}{a^4}w$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\pi^4}{b^4}w \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{m^2\pi^4}{a^2 b^2}w$$

Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и сжатой в одном направлении

Учитывая, что в данном случае

$$T_y = T_{xy} = 0, \qquad T_x = T_{\text{кр}} = 0$$

Подставляя производные в дифференциальное уравнение (1), получаем следующее тождество

$$\frac{m^4\pi^4}{a^4} + 2\frac{m^2\pi^4}{a^2b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} = \frac{1}{D}T_{\text{кр}}\frac{m^2\pi^2}{a^2}$$

Откуда

$$T_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 D a^2}{m^2}\left(\frac{m^4}{a^4} + 2\frac{m^2}{a^2b^2} + \frac{1}{b^4}\right)$$

или

$$T_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 D}{a^2}\left(m^2 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4m^2}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и сжатой в одном направлении

$$T_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2} k$$

где

$$k = m^2 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4 m^2}$$

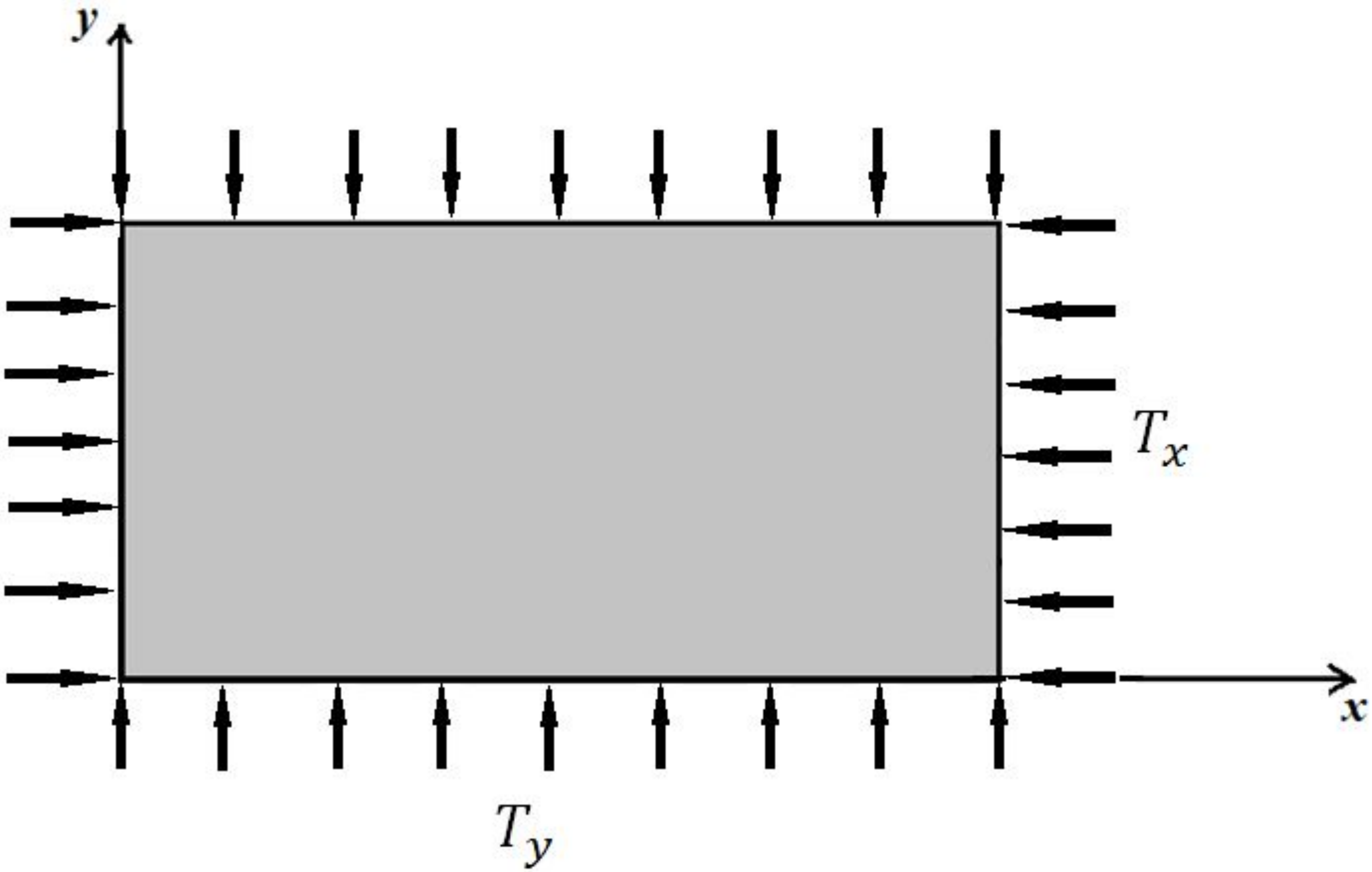
Остается исследовать выражение (3) на минимум. Учитываем, что по смыслу задачи *m* может принимать только целые положительные значения.

Для квадратной пластины (*a=b*) минимум получается только при

$$m = 1 \qquad => \qquad k = m^2 + 2 + \frac{1}{m^2}$$

$$k = 4 \qquad => \qquad T_{кр} = 4\frac{\pi^2 D}{a^2}$$

Двустороннее сжатие прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам



$a > b$

$T_y = \alpha T_x$

$\alpha < 1$

Пластина свободно оперта по сторонам ***x = 0, x = a, y = 0, y = b***

Двустороннее сжатие прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам

Предположим, что выпучивание пластины происходит по уравнению

$$w = C \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \textbf{(4)}$$

Дифференцируя (4) и подставляя в дифференциальное уравнение (1), получаем

$$\frac{m^4\pi^4}{a^4} + 2\frac{m^2n^2\pi^4}{a^2b^2} + \frac{n^4\pi^4}{b^4} = \frac{1}{D}\left[T_x\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \alpha T_x\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right]$$

Двустороннее сжатие прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам

$$T_x = \pi^2 D \frac{\dfrac{m^4}{a^4} + 2\dfrac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \dfrac{n^4}{b^4}}{\dfrac{m^2}{a^2} + \alpha\dfrac{n^2}{b^2}} =$$

$$= \pi^2 D \frac{\dfrac{a^2 b^2}{m^2 n^2} \cdot \left(\dfrac{m^4}{a^4} + 2\dfrac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \dfrac{n^4}{b^4}\right)}{\dfrac{ab}{mn} \cdot \left(\dfrac{m^2}{a^2} + \alpha\dfrac{n^2}{b^2}\right)} \cdot \frac{\dfrac{m^2 n^2}{a^2 b^2}}{\dfrac{mn}{ab}} =$$

$$= \pi^2 D \cdot \frac{mn}{ab} \cdot \frac{\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{b}{a}\right)^2 + 2 + \left(\dfrac{n}{m} \cdot \dfrac{a}{b}\right)^2}{\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{b}{a} + \alpha\dfrac{n}{m} \cdot \dfrac{a}{b}\right)}$$

Двустороннее сжатие прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам

Для квадратной пластины и одинаковых в двух направлениях усилиях последнее выражение упрощается и принимает следующий вид

$$T_{\text{кр}} = \pi^2 D \cdot \frac{2m^2}{a^2}$$

Наименьшее значение при $m = 1$

$$T_{\text{кр}} = 2 \cdot \frac{\pi^2 D}{a^2}$$

По сравнению с 1-м случаем значение критической нагрузки получается в 2 раза меньше

Устойчивость оболочек

1. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Дифференциальное уравнение для цилиндрической оболочки имеет следующий вид

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R^2}w = 0 \qquad (5)$$

Граничные условия

Предположим, что края оболочки шарнирно оперты, т.е.

1) При $x = 0 \qquad w = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

2) При $x = l \qquad w = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Решение дифференциального уравнения (5), удовлетворяющего граничным условиям, будем искать в форме

$$w = C\sin\frac{m\pi x}{l}$$ **где** $$m = 1,2,3,\ldots$$

Подставляя это решение в дифференциальное уравнение, получим

$$C\left(D\frac{m^4\pi^4}{l^4} - T\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{l} = 0$$

$$D\frac{m^4\pi^4}{l^4} - T\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2} = 0$$

$$T = D\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2}\cdot\frac{l^2}{m^2\pi^2} \qquad \textbf{(6)}$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Число полуволн m подбирается из условия минимума Т.

$$T = D\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{l^2}{m^2\pi^2}$$

Тонкие оболочки обычно теряю устойчивость с образованием большого числа полуволн.

Обозначив $$\eta = \frac{m^2\pi^2}{l^2}$$

Можно записать $$T = D\eta + \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{1}{\eta}$$

Условно считаем параметр η изменяющимся непрерывно

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = D - \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{1}{\eta^2} = 0$$

$$\frac{1}{\eta} = \sqrt{\frac{DR^2}{Eh}} \qquad \eta_{\text{кр}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{Eh}{D}}$$

$$m_{\text{кр}} = \frac{l}{\pi}\sqrt{\eta_{\text{кр}}} = \frac{l}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt[4]{\frac{Eh}{D}} \qquad m_{\text{кр}} = \frac{l}{\pi R}\sqrt[4]{\frac{EhR^2}{D}}$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

$$T = D\eta + \frac{Eh}{R^2}\cdot\frac{1}{\eta} \qquad\qquad \eta_{кр} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{Eh}{D}}$$

$$T_{кр} = D\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{Eh}{D}} + \frac{Eh}{R^2}\cdot R\sqrt{\frac{D}{Eh}} = \frac{2}{R}\sqrt{DEh}$$

$$T_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\cdot\frac{Eh^2}{R}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{T_{кр}}{h} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\cdot\frac{Eh}{R} = k\cdot\frac{Eh}{R} \qquad (7)$$

Эта формула впервые была получена Лоренцем и Тимошенко

$$\mu = 0.3 \qquad\qquad \sigma_{кр} = 0{,}605\cdot\frac{Eh}{R}$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Экспериментальные исследования, выполненные русскими и зарубежными учеными, не подтвердили результатов, следующих из решения (7).
Критические напряжения оказываются значительно ниже теоретических, причем чем меньше относительная толщина оболочки, тем различие больше.

R/h	250	500	750	1000	1500
k	0,18	0,14	0,12	0,10	0,09

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Влияние внутреннего давления на коэффициент устойчивости

$$k_p = \frac{1 + 0{,}21\alpha(R/h)^{0,6}}{1 + 3\alpha} \qquad \alpha = \frac{pR^2}{Eh^2}$$

$$k' = k_э \cdot k_p$$

$$p = 0 \qquad k_p = 1$$

$$p \neq 0 \qquad k_p > 1$$

$$R/h = 500 \qquad \alpha = 1 \qquad => \qquad k_p = 2{,}5$$

$$R/h = 2000 \qquad \alpha = 1 \qquad => \qquad k_p = 5{,}2$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении

Для оболочки средней длины $\sqrt{\frac{h}{R}} < \frac{l}{R} < 0{,}3\sqrt{\frac{R}{h}}$

Формула оболочки Саутуэлла-Папковича

$$p_{кр} = 0{,}856\frac{E}{1-\mu^2}\frac{R}{l}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

$$\mu = 0.3 \qquad p_{кр} = 0{,}92E\frac{R}{l}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

В расчетах

$$p_{кр} = 0{,}64E\frac{R}{l}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

Устойчивость сферической оболочки при внешнем давлении

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{Eh}{R} = 0{,}605 \cdot \frac{Eh}{R}$$

R/h		500	750	1000	1500
k	0,15	0,12	0,10	0,08	0,075

Спасибо
за внимание!