Элементарная теория устойчивости динамических систем

1. Устойчивость. Линейное приближение. Уравнение в вариациях.
2. Спектр ЛХП.
3. Устойчивость состояний равновесия.
4. Устойчивость периодических решений.
5. Устойчивость квазипериодических и хаотических решений.
6. Системы с дискретным временем. Отображение Пуанкаре.
7. Устойчивость решений дискретных систем.

1. Устойчивость решений дифференциальных систем по линейному приближению. Уравнения в вариациях

Пусть ДС задана автономными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_N; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m), i = 1,2,...,N, \tag{1}$$

в которых правые части f_i - в общем случае нелинейные дифференцируемые функции, зависящие от параметров μ_i, или в векторной форме

$$\dot{x} = F(x, \mu). \tag{2}$$

Будем считать, что система (1) не обладает какими-либо специальными свойствами симметрии, являясь *системой общего положения*.

Пусть $\boldsymbol{x}^0(t)$ – частное решение системы, устойчивость которого нужно исследовать. Введем в рассмотрение переменные $y_i(t)$, характеризующие малое отклонение от частного решения:

$$y_i(t) = x_i(t) - x^0_i(t). \tag{3}$$

Подставив (3) в (1), получим

$$\dot{y} = F(x^0 + y) - F(x^0),$$

или

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{N} (\partial f_i / \partial x_j) y_j + O(y_j), \qquad (4)$$

где производные f_i' взяты в точках частного решения $x_i = x_i^0$. Совокупность нелинейных относительно y_i членов $O(y_i)$ стремится к нулю с уменьшением возмущений y_i быстрее суммы линейных слагаемых.

Устойчивость частного решения нелинейной системы $\boldsymbol{x}^0(t)$ определяется устойчивостью линеаризованной системы (4):

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{N} (\partial f_i / \partial x_j) y_j.$$ - уравнения в вариациях

В матричной форме:

$$\dot{y} = A(t) y. \qquad (5)$$

A(t) – квадратная матрица с элементами $a_{i,j}(t) = \partial f_i / \partial x_j \big|_{x_i = x_i^0}, i, j = 1,2,\ldots, N.$

Для линейного матричного уравнения (5) существует фундаментальная система решений. *Фундаментальная матрица* решений *Y(t)*, составленная из *N* линейно независимых решений системы (5), удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t).$$

Произвольное решение системы (5) может быть записано в виде

$$\mathbf{y}(t)=Y(t)\mathbf{y}(t_0), \qquad (6)$$

если $Y(t)$ нормирована при $t = t_0$, т.е. $Y(t_0) = E$.

Автономная линейная система (5) *устойчива по Ляпунову* тогда и только тогда, когда любое решение (6) ограничено. Следовательно, коэффициенты фундаментальной матрицы *Y(t)* устойчивой системы должны быть ограничены.

2. Спектр ляпуновских характеристических показателей фазовой траектории динамической системы

Характеристический показатель Ляпунова, или просто характеристический показатель функции $\Phi(t)$, - действительное число, определяемое соотношением

$$L[\Phi(t)] = \overline{\lim}_{t\to\infty}[t^{-1}\ln|\Phi(t)|].$$

Для экспоненты $\Phi(t) = \exp \alpha t$, $L = \alpha$.

Понятие характеристического показателя дает способ оценки степени роста функции в сравнении с экспонентой.

Для линейной системы (5) с произвольной матрицей $A(t)$ характеристические показатели нетривиальных решений можно ввести аналогичным образом:

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{t\to\infty}[t^{-1}\ln\|y^i(t)\|, i = 1,2,\dots,N, \qquad (7)$$

где $y^i(t)$ – i-е фундаментальное решение системы (5), $\| 0 \|$ - норма. По определению характеристические показатели действительны, а т.к. матрица $A(t)$ ограничена, то и конечны. Числа λ_i называются *обобщенными характеристическими показателями* произвольной линейной системы вида (5).

Для системы в вариациях, описывающей эволюцию возмущений ***y(t)*** вблизи частного решения $\boldsymbol{x}^0(t)$ нелинейной системы (2), совокупность λ_i называют ляпуновскими характеристическими показателями частного решения (или фазовой траектории) $\boldsymbol{x}^0(t)$ нелинейной системы. Упорядоченная по убыванию совокупность чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq . . . \geq \lambda_N$ образует *спектр ляпуновских характеристических показателей* (спектр ЛХП) фазовой траектории $\boldsymbol{x}^0(t)$, являющейся одной из важнейших характеристик решения нелинейной системы, определяющей, в частности, ее устойчивость.

Для линейной автономной ДС сумма характеристических показателей спектра ее решений не меньше верхнего предела от среднего значения следа матрицы:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \geq \overline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau.$$

Характер изменения фазового объема во времени подчиняется формуле Остроградского – Лиувилля

$$V(t) = V(t_0)\exp[\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau],$$

где $V(t) = \det Y(t)$ - фазовый объем

Рассмотрим дивергенцию вектора фазовой скорости нелинейной системы уравнений (1):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} \partial \dot{x}_i / \partial x_i = \sum_{i=1}^{N} \partial f_i / \partial x_i . \qquad (8)$$

Для уравнений в вариациях выражение (8) принимает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(t) = \operatorname{Sp} A(T).$$

Таким образом, дивергенция в линейном приближении совпадает со значением следа матрицы *A(t)*. Локально вблизи частного решения фазовый объем системы во времени изменяется в соответствии с выражением

$$V(t) = V(t_0)\exp[t(\overline{\operatorname{div}\boldsymbol{F}})] = V(t_0)\exp[t\sum_{i=1}^{N}\lambda_i],$$

где чертой обозначено усреднение по времени.

Рассматривая относительную скорость изменения малого элемента фазового объема, получаем

$$V(t)^{-1}\frac{d}{dt}[V(t)]=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i .$$

Следовательно, сумма показателей спектра ЛХП траектории $\boldsymbol{x}^0(t)$ характеризует скорость изменения фазового объема в ее окрестности. Для систем с отрицательной дивергенцией, т.е. диссипативных, сумма показателей спектра ЛХП отрицательна. Предельный объем аттрактора в фазовом пространстве нулевой.

3. Устойчивость состояний равновесия

Если частное решение $\boldsymbol{x}^0(t)$ характеризует состояние равновесия, т.е. не зависит от времени, то правые части (1) обращаются в нуль:

$$f_i(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_N, \mu) = 0. \tag{9}$$

Корни алгебраических уравнений (9) определяют координаты возможных состояний равновесия, отвечающих особым точкам в фазовом пространстве системы. В особой точке матрица A системы в вариациях от времени не зависит и общее решение системы имеет вид

$$\boldsymbol{y}(t) = \exp\,(At)\boldsymbol{y}(t_0). \tag{10}$$

Решение устойчиво по Ляпунова, если собственные числа матрицы линеаризации, определяемые корнями векового уравнения

$$\det\,[A - sE] = 0, \tag{11}$$

характеризуются действительными частями $\mathrm{Re}\, s_i \le 0$.

Если все s_i удовлетворяют строгому неравенству $\mathrm{Re}\, s_i < 0$, решение $\boldsymbol{y}(t)$ асимптотически устойчиво. Это означает, что произвольные малые возмущения положения равновесия $\boldsymbol{x}^0$ затухают и при $t \to \infty$ асимптотически стремятся к нулю.

Условие $\mathrm{Re}\, s_i \neq 0$ выделяет случай *грубых состояний равновесия,* которые либо устойчивы, либо неустойчивы в некоторой конечной области вариации параметров μ.

4. Устойчивость периодических решений. Мультипликаторы предельного цикла

Любое периодическое частное решение системы (1) выделяется условием

$$\mathbf{x}^0(t) \equiv \mathbf{x}^0(t+T), \quad T \text{ – период решения.} \tag{12}$$

Устойчивость периодического решения определяется исследованием соответствующей системы в вариациях, которая также является периодической:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}, \qquad A(t) \equiv A(t+T). \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в том, что если $Y(t)$ – нормированная фундаментальная матрица решений системы (13), то матрица $Y(t+T)$ также является фундаментальной и справедливо соотношение

$$Y(t+T)=Y(t)Y(T). \tag{14}$$

Матрица $Y(T)$ называется *матрицей или оператором монодромии.* Решение уравнений в вариациях в силу (14) определяет линейное отображение, ставящее в соответствие произвольному значению возмущения $\mathbf{y}(t)$ значение возмущения $\mathbf{y}(t+T)$ через период:

$$\mathbf{y}(t+T)=Y(T)\mathbf{y}(t). \tag{15}$$

Матрица монодромии не зависит от времени. Собственные значения ρ_i матрицы монодромии $Y(T)$, т.е. корни характеристического уравнения

$$\det\,[Y(T) - \rho E] = 0, \qquad (16)$$

называются *мультипликаторами периодического решения* $\boldsymbol{x}^0(t)$ и определяют его устойчивость. Действительно, действие оператора монодромии (14) заключается в том, что первоначальное возмущение периодического решения, рассматриваемое в проекциях на собственные векторы, через период T умножается на соответствующий мультипликатор ρ_i. Значит, затуханию возмущений должно отвечать требование $|\rho_i| < 1$.

Любому мультипликатору ρ_i соответствует нетривиальное решение $\xi(t+T) = \rho_i \xi(t)$ системы (13), и наоборот, выполнение указанного равенства служит определением мультипликатора. Отсюда следует важный вывод: <u>периодическое решение $\boldsymbol{x}^0(t)$ имеет по крайней мере один из мультипликаторов, равный +1.</u>

Мультипликаторы как собственные значения матрицы монодромии удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i = Sp\,Y(T), \qquad \prod_{i=1}^{N} \rho_i = \det Y(T) > 0.$$

Спектр ЛХП периодического решения определяется в соответствии с (7) через мультипликаторы

$$\lambda_i = \ln |\rho_i| / T.$$

Один из показателей спектра всегда равен нулю и отвечает единичному мультипликатору. Если все оставшиеся на комплексной плоскости значений мультипликаторы принадлежат внутренности единичного круга, т.е. $|\rho_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$, то периодическое решение *устойчиво*. Сигнатура спектра ЛХП устойчивого предельного цикла такова:

“0”, “-”, “-”, …, “-”.

5. Устойчивость квазипериодических и хаотических решений

С увеличением размерности фазового пространства системы (2) до $N \geq 3$ становятся возможными решения $\boldsymbol{x}^0(t)$ в виде квазипериодических или апериодических (хаотических) автоколебаний. Соответствующая система уравнений в вариациях в этих случаях характеризуется квазипериодической или апериодической матрицей $A(t)$. Исследование устойчивости таких частных решений в отличие от стационарных и периодических становится более сложным и осуществляется, как правило, с помощью численных методов на компьютерах.

Пусть частное решение $\boldsymbol{x}^0(t)$ есть квазипериодическая функция:

$$\boldsymbol{x}^0(t) = \boldsymbol{x}^0\,[\phi_1(t),\ \phi_2(t),\ \ldots,\ \phi_p(t)], \qquad (17)$$

где $\phi_l(t) = \omega_l\, t,\ l = 1, 2, \ldots, p$. Функция $\boldsymbol{x}^0(\phi)$ имеет период 2π по каждому из аргументов ϕ_l:

$$\boldsymbol{x}^0(\phi_l + 2\pi) = \boldsymbol{x}^0(\phi_l)$$

Для квазипериодических функций равенство типа (12) не выполняется. Квазипериодические колебания в общем случае не являются периодическими. Если между частотами ω_l не существует рациональных соотношений, то решение $\boldsymbol{x}^0(t)$ называется *эргодическим квазипериодическим колебанием.*

Устойчивость квазипериодических решений характеризуется спектром ЛХП. Матрица линеаризации $A(t)$ уравнений в вариациях квазипериодическая, и ляпуновские характеристические показатели λ_i строго определены лишь в пределе, при $t \to \infty$. На практике можно ограничиться конечным временем, зависящим в каждом конкретном случае от скорости сходимости функций $\lambda_i(t)$ к пределам λ_i, и получить значения показателей спектра ЛХП с некоторой заданной точностью. Периодичность решения $\boldsymbol{x}^0(t)$ по каждой их функций $\phi_l(t)$ ведет к тому, что спектр ЛХП квазипериодического колебания содержит p нулевых показателей.

Пример. В идеальном случае гармонических сигналов решение для режима двухчастотных биений можно представить как

$$x(t) = B_0(1 + m \sin \Omega t) \sin (\omega_0 t + \psi),$$

где ω_0 – частота основного колебания, Ω - частота сигнала модуляции, рационально несоизмеримая с ω_0. Устойчивому режиму биений с двумя независимыми частотами отвечает аттрактор в виде *двумерного эргодического тора*, сигнатура спектра ЛХП которого имеет вид

“0”, “0”, “-”, “-”, …, “-”.

Если частное решение $\boldsymbol{x}^0(t)$ является апериодическим, но ограниченным для любых $t \to \infty$, то оно отвечает режиму хаотических автоколебаний. В спектре ЛХП такого решения появляется не менее одного положительного показателя и существует по крайней мере один нулевой. Реализуется ситуация, принципиально отличная от всех выше рассмотренных случаев. Наличие положительных показателей в спектре ЛХП апериодического решения свидетельствует, по определению, о неустойчивости решения по Ляпунову. В каком же смысле можно говорить об устойчивости хаотического решения? Вопрос нетривиальный, но может иметь вполне определенный ответ.

Хаотические траектории можно называть устойчивыми, если существует предельное множество – аттрактор с некоторой областью притяжения, внутри которого траектории неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону.

Матрица линеаризации $A(t)$ системы уравнений в вариациях относительно хаотического решения $\boldsymbol{x}^0(t)$ будет апериодической, но ограниченной. Поэтому предел в (7) существует при $t \to \infty$ и определяет спектр ЛХП решения. Сигнатура спектра ЛХП странного аттрактора наиболее простой структуры имеет вид

“+”, “0”, “-”, “-”, …, “-”.

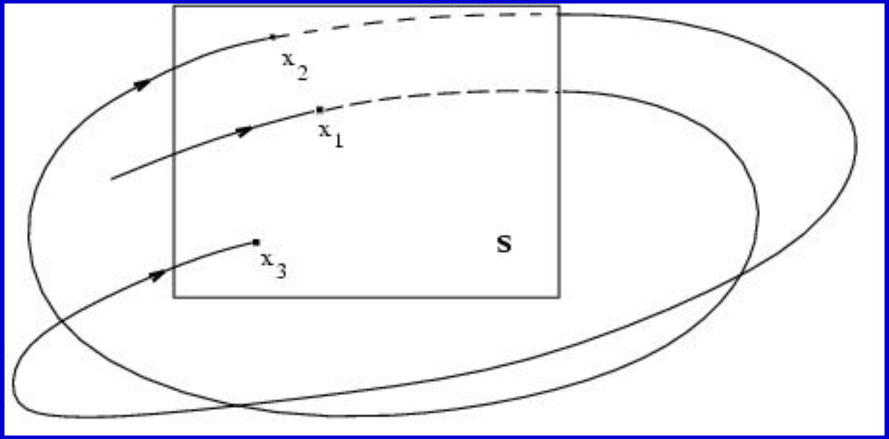
Проведенный анализ позволяет ввести классификацию типов аттрактора, основанную на понятиях устойчивости по Ляпунову и по Пуассону.

- Если фазовые траектории на аттракторе устойчивы и по Ляпунову и по Пуассону – *аттрактор регулярный*, или *простой*.
- Если устойчивые по Пуассону траектории в аттракторе неустойчивы по Ляпунову, то *аттрактор странный*.

6. Системы с дискретным временем. Отображение Пуанкаре

Рассмотренный выше вопрос об устойчивости решений дифференциальных систем может быть поставлен и решен аналогичным образом для *систем с дискретным временем.* Эти системы могут рассматриваться как самостоятельные при описании, к примеру, экологических процессов, а могут быть получены однозначно из дифференциальных систем при переходе к *точечным отображениям Пуанкаре.*

Рассмотрим некоторый режим движения дифференциальной системы, характеризующийся траекторией Г в фазовом пространстве $\boldsymbol{R}^N$ уравнений (2). В последнем введем в рассмотрение некоторую гиперповерхность S размерности $N - 1$. Предположим, что фазовая траектория Г последовательно и *трансверсально* (под ненулевым углом) пересекает эту поверхность. Поверхность S называется *секущей Пуанкаре* к фазовой



Точечное отображение, порождаемое пересечениями некоторой фазовой траектории Г с секущей поверхностью S

В общем случае отображение Пуанкаре задается нелинейным дискретным уравнением, размерность которого равна размерности секущей Пуанкаре. Нелинейной ДС (1) тем самым ставится в однозначное соответствие N – 1-мерное фазовое пространство, которым является секущая гиперповерхность S. Фазовыми траекториями становятся последовательности точек $\boldsymbol{x}(k)$ на секущей. Каждая последующая точка $\boldsymbol{x}(k+1)$ получается путем применения нелинейного преобразования $\boldsymbol{P}$ к предыдущей точке $\boldsymbol{x}(k)$:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{P}\,[\boldsymbol{x}(k),\ \mu] \qquad (18)$$

(μ - набор параметров), которое в координатной форме имеет вид

$$x_i(k+1) = P_i\,[x_i(k),\ \mu_1, \ldots, \mu_m], \qquad i = 1, 2, \ldots, (N-1). \qquad (19)$$

Задача изучения ДС сводится к задаче изучения соответствующего отображения Пуанкаре. При этом структура ДС однозначно (но не взаимно однозначно) определяет структуру порождаемого ею точечного отображения.

Нелинейное уравнение (18) является дискретным аналогом дифференциальной системы, но может также рассматриваться вне зависимости от порождающей дифференциальной системы.

В дискретных системах также могут существовать стационарные, периодические, квазипериодические и хаотические последовательности $\boldsymbol{x}^0(k)$.

Устойчивость частного решения $\boldsymbol{x}^0(k)$ исследуется на основе соответствующего уравнения в вариациях. Если ввести в рассмотрение малое отклонение (возмущение) $\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}^0(k)$, записать его в координатной форме

$$y_i(k) = x_i(k) - x_i^0(k), \qquad i = 1, 2, \ldots, (N-1), \tag{20}$$

и линеаризовать исходное уравнение (18) вблизи частного решения, то получим <u>линейное дискретное уравнение в вариациях</u>

$$y_i(k+1) = \sum_{j=1}^{N-1} (\partial P_i / \partial x_j) y_j(k). \tag{21}$$

Векторная форма уравнения в вариациях:

$$\boldsymbol{y}(k+1) = M(k, \mu)\boldsymbol{y}(k), \tag{22}$$

где $M(k,\mu)$ – квадратная матрица линеаризации, элементы которой m_{ij} заданы соответствующими производными (21). Из (22) следует

$$y(k+1) = \prod_{i=1}^{k} M(i,\mu)y(1). \tag{23}$$

Ляпуновские характеристические показатели частного решения дискретной системы (21) имеют вид:

$$\lambda_i = \overline{\lim}_{k\to\infty}[k^{-1}\ln \| y^i(k) \|], \tag{24}$$

где $\boldsymbol{y}^i(k)$ – i-е фундаментальное решение системы уравнений (22).

7. Устойчивость решений дискретных систем

Совокупность чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x^0_{N-1}$, не зависящих от дискретного времени и удовлетворяющих исходному нелинейному уравнению (19), называется *неподвижной точкой* $\boldsymbol{x}^0$ дискретной системы отображения или ее стационарным решением. Матрица линеаризации уравнений в вариациях также не зависит от k. Устойчивость стационарного решения определяется собственными значениями матрицы M:

$$\det(M - \rho E) = 0, \tag{25}$$

т.е. мультипликаторами неподвижной точки ρ_i. Стационарное решение асимптотически устойчиво, когда все мультипликаторы по модулю строго меньше единицы. Соответствующий спектр ЛХП аттрактора системы в виде устойчивого состояния равновесия определяется упорядоченной по убыванию совокупностью λ_i :

$$\lambda_i = \ln|\rho_i| < 0. \tag{26}$$

Решение $\boldsymbol{x}^0(k)$ – периодическое, если выполняется условие

$$\boldsymbol{x}^0(k) \equiv \boldsymbol{x}^0(k+n), \quad n \text{ – период.} \tag{27}$$

В этом случае $\boldsymbol{x}^0(k)$ – *n-периодическое решение* дискретной системы или *n-цикл* отображения. Матрица линеаризации также n-периодическая, т.е. $M(k) \equiv M(k+n)$.

Аналогом матрицы монодромии в данном случае является матрица M_n, не зависящая от дискретного времени:

$$M_n = M(n) \cdot M(n-1) \cdot \ldots \cdot M(1). \tag{28}$$

Для периодических решений дискретное время можно измерять целым числом периодов $k = rn$, что позволяет записать

$$y(k) = M_n^{(r)} y(1), \qquad M_n^{(r)} = \underbrace{M_n \cdot M_n \cdot \ldots \cdot M_n}_{r}. \tag{29}$$

Мультипликаторы ρ_{ni} матрицы линеаризации n-цикла отображения M_n вычисляются аналогично (25):

$$\det(M_n - \rho_n E) = 0. \qquad (30)$$

Они определяют устойчивость n-периодического решения.

Спектр ЛХП n-периодического решения состоит из

$$\lambda_i = \ln|\rho_{ni}|/n. \qquad (31)$$

Асимптотически устойчивому n-циклу отображения отвечают мультипликаторы $|\rho_{ni}| < 1$ для любых $i = 1, 2, \ldots, N - 1$. Спектр ЛХП устойчивого n-цикла содержит, таким образом, только отрицательные числа.

Если дискретное уравнение (18) представляет собой отображение Пуанкаре некоторой дифференциальной системы, то стационарная точка отображения отвечает простому однооборотному предельному циклу в этой системе. Наличие n-периодической точки в отображении соответствует n-тактному, более сложному предельному циклу дифференциальной системы. В отличие от потоковых систем в отображениях стационарные и периодические решения характеризуются в общем случае n-циклом ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Сигнатура спектра ЛХП этих решений одинакова для аттракторов в виде устойчивой неподвижной точки периода 1 и любого другого периода $n = 2, \ldots$:

“-”, “-”, “-”, . . . , “-”.

Линеаризованная матрица отображения Пуанкаре M_n в общем случае, включая $n = 1$, есть аналог матрицы монодромии произвольного периодического решения исходной дифференциальной системы.

Свойство отображения Пуанкаре заключается в том, что собственные значения матрицы линеаризации ρ_{ni} $n = 1, 2, \ldots, N - 1$, дополненные единичным мультипликатором $\rho_N = 1$, строго равны собственным значениям матрицы монодромии $Y(T)$ дифференциальной системы (2). На этом основании устойчивость периодических режимов колебаний в дифференциальных системах количественно характеризуется мультипликаторами n-цикла отображения Пуанкаре.

Спектр ЛХП отображения Пуанкаре, дополненный одним нулевым показателем, даст собственно спектр ЛХП периодического решения дифференциальной системы, порождающей соответствующее отображение.