МБОУ СОШ №5 – «Школа здоровья и развития»

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ С3

ПО МАТЕРИАЛАМ

ЕГЭ 2012-2013 ГГ

Автор: учитель математики Е.Ю.

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют *логарифмическими неравенствами*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

1. Решите неравенство $3\log_{11}(x^2+8x-9) \le 4+\log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x^2+8x-9>0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \; x \in (-\infty; -9) \cup (1; +\infty).$

$$3\log_{11}(x^2+8x-9) \le 4+\log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}$$

$$\log_{11}(x^2+8x-9)^3+\log_{11}\frac{x+9}{(x-1)^3} \le 4$$

$$\log_{11}\frac{(x+9)^3(x-1)^3(x+9)}{(x-1)^3} \le 4$$

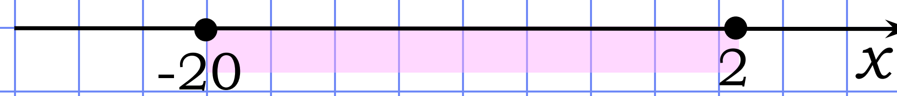
$$\log_{11}(x+9)^4 \le \log_{11}11^4$$

$$(x+9)^4 \le 11^4$$

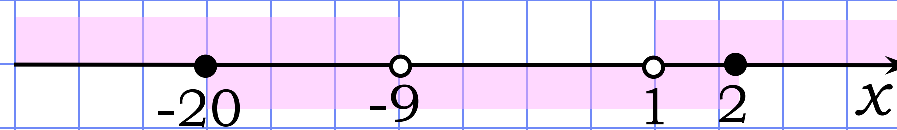
$$|x+9| \le 11$$

$$-11 \le x+9 \le 11$$

$$-20 \le x \le 2$$



С учетом ОДЗ:



$$x \in [-20; -9); (1; 2]$$

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x - 129 \le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$

Решение.

1) ОДЗ: $\begin{cases} x+8>0, \\ \dfrac{x+1}{x-7}>0, \\ x+8 \ne 1; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-8; -7) \cup (-7; -1) \cup (7; +\infty).$

2) $4^x - 129 \le 2^{x+7}$

$4^x - 128 \cdot 2^x - 129 \le 0$

Пусть $2^x = t, \ t > 0,$ тогда

$t^2 - 128 \cdot t - 129 \le 0$

$(t+1)(t-129) \le 0$

$-1 \le t \le 129$

Учитывая, что $t > 0$, имеем

$0 < t \le 129$

Вернемся к исходной переменной

$0 < 2^x \le 129$

$2^x \le 2^{\log_2 129}$

$x \le \log_2 129$

$\log_2 129 > 7 = \log_2 128$

С учетом ОДЗ, имеем

$x \in (-8; -7) \cup (-7; -1) \cup (7; \log_2 129]$

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x}-129\le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2\le 1-\log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

3) *(продолжение)*

$$\log_{x+8}\left(\frac{7-x}{x+1}\right)^2\le 1-\log_{x+8}\frac{x+1}{x-7}$$

$$(a-b)^2=(b-a)^2$$

$$\log_{x+8}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^2+\log_{x+8}\frac{x+1}{x-7}\le\log_{x+8}(x+8)$$

$$\log_{x+8}\left(\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^2\cdot\frac{x+1}{x-7}\right)\le\log_{x+8}(x+8)$$

$$\log_{x+8}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)\le\log_{x+8}(x+8)$$

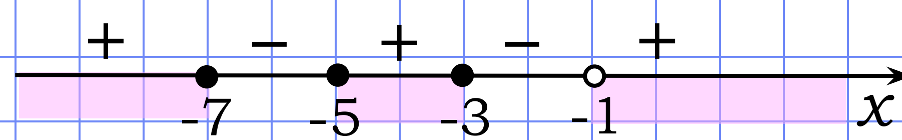
$$(x+8-1)\left(\frac{x-7}{x+1}-(x+8)\right)\le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{x-7-x^2-9x-8}{x+1}\right)\le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{-x^2-8x-15}{x+1}\right)\le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{x^2+8x+15}{x+1}\right)\ge 0$$

$$\frac{(x+7)(x+3)(x+5)}{x+1}\ge 0$$



$$x\in(-\infty;\,-7]\cup[-5;\,-3]\cup(-1;\,+\infty)$$

С учетом ОДЗ, имеем

$$x\in(-8;\,-7)\cup[-5;\,-3]\cup(7;\,+\infty).$$

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x - 129 \le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$

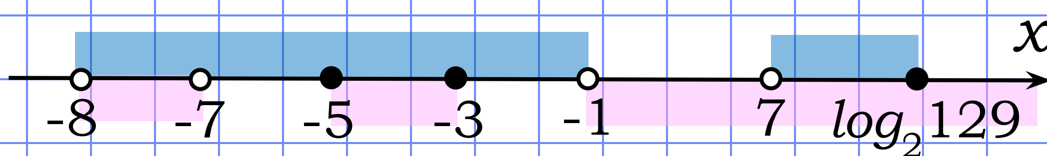
(продолжение)

4) *Общее решение:*

$x \in (-8;\ -7) \cup (-7;\ -1) \cup (7;\ \log_2 129]$

и

$x \in (-8;\ -7) \cup [-5;\ -3] \cup (7;\ +\infty)$



$x \in (-8;\ -7) \cup [-5;\ -3] \cup (7;\ \log_2 129]$

Ответ: $(-8;\ -7) \cup [-5;\ -3] \cup (7;\ \log_2 129]$

3. Решите неравенство $\log_{0,25}(19-9x)\cdot\log_{3-x}0,5 \geq 1$

<u>*Решение.*</u> *ОДЗ:* $\begin{cases} 19-9x>0, \\ 3-x>0, \\ 3-x\neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;\,2)\cup\left(2;\,\dfrac{19}{9}\right)$

$$\log_a b\cdot\log_c d = \log_c b\cdot\log_a d$$

$$\log_{0,25}(19-9x)\cdot\log_{3-x}0,5 \geq 1$$

$$\log_{3-x}(19-9x)\cdot\log_{0,25}0,5 \geq 1$$

$$\log_{3-x}(19-9x) \geq 2$$

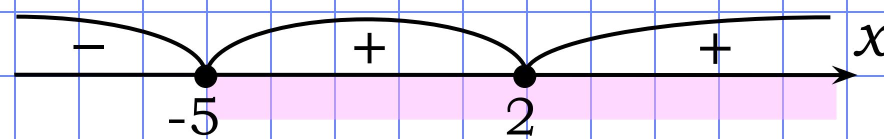
$$\log_{3-x}(19-9x) \geq \log_{3-x}(3-x)^2$$

$$((3-x)-1)\left((19-9x)-(3-x)^2\right) \geq 0$$

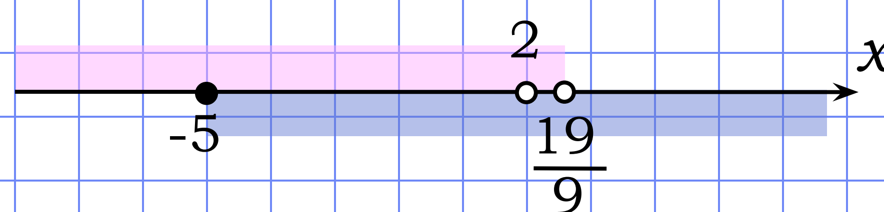
$$(2-x)\left(10-3x-x^2\right) \geq 0$$

$$(x-2)\left(x^2+3x-10\right) \geq 0$$

$$(x-2)^2(x+5) \geq 0$$



С учетом ОДЗ:



$$x\in[-5;\,2);\ \left(2;\,\frac{19}{9}\right)$$

Ответ: $[-5;\,2);\ \left(2;\,\dfrac{19}{9}\right)$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{2x^2-10x+6}{x-5} \le x, \\ 1+\log_6(4-x) \le \log_6(16-x^2) \end{cases}$

Решение.

1) *ОДЗ:* $\begin{cases} 4-x>0, \\ 16-x^2>0, \\ x-5\ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-4;\ 4).$

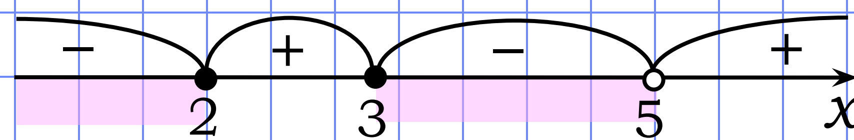
2) $\dfrac{2x^2-10x+6}{x-5} \le x$

$\dfrac{2x^2-10x+6}{x-5} - x \le 0$

$\dfrac{2x^2-10x+6-x^2+5x}{x-5} \le 0$

$\dfrac{x^2-5x+6}{x-5} \le 0$

$\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-5} \le 0$



$x \in (-\infty;\ 2] \cup [3;\ 5)$

С учетом ОДЗ, имеем

$x \in (-4;\ 2] \cup [3;\ 4)$

4. Решите систему неравенств (продолжение)

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-10x+6}{x-5} \le x, \\ 1+\log_6(4-x) \le \log_6(16-x^2) \end{cases}$$

3) $1+\log_6(4-x) \le \log_6(16-x^2)$

$\log_6 6+\log_6(4-x) \le \log_6(16-x^2)$

$\log_6(24-6x) \le \log_6(16-x^2)$

т.к. $a=6>1$, то

$24-6x \le 16-x^2$

$x^2-6x+8 \le 0$

$(x-2)(x-4) \le 0$

$2 \le x \le 4$

С учетом ОДЗ, имеем

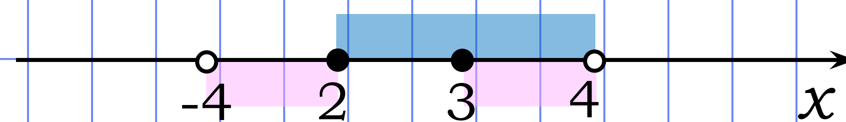
$2 \le x < 4$

4) *Общее решение:*

$x \in (-4;\ 2] \cup [3;\ 4)$

и

$2 \le x < 4$



$x \in \{2\} \cup [3;\ 4)$

Ответ: $\{2\} \cup [3;\ 4)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{3\log_2 x}{2+\log_2 x} \le 2\log_2 x - 1$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \ne 0{,}25; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (0;\ 0{,}25) \cup (0{,}25;\ +\infty).$

$$\frac{3\log_2 x}{2+\log_2 x} \le 2\log_2 x - 1$$

Пусть $\log_2 x = t,\ \ t \ne -2,$ тогда

$$\frac{3t}{2+t} \le 2t - 1$$

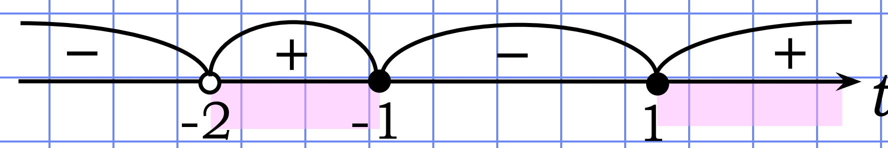
$$\frac{3t}{2+t} - 2t + 1 \le 0$$

$$\frac{3t - 4t - 2t^2 + 2 + t}{2+t} \le 0$$

$$\frac{-2t^2 + 2}{2+t} \le 0$$

$$\frac{-2(t-1)(t+1)}{2+t} \le 0$$

$$\frac{(t-1)(t+1)}{t+2} \ge 0$$



$$t \in (-2;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$$

5. Решите неравенство $\dfrac{3\log_2 x}{2+\log_2 x} \le 2\log_2 x - 1$

Решение. (продолжение)

Вернемся к исходной перменной

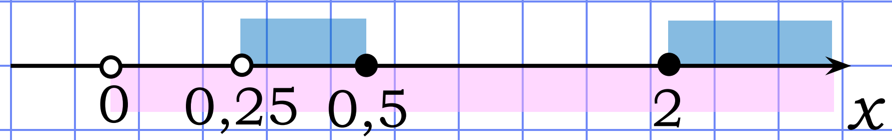
$$\left[\begin{array}{l} -2 < \log_2 x \le -1, \\ \log_2 x \ge 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 0,25 < \log_2 x \le \log_2 0,5, \\ \log_2 x \ge \log_2 2; \end{array}\right.$$

$т.к.\ a = 2 > 1,\ то$

$$\left[\begin{array}{l} 0,25 < x \le 0,5, \\ x \ge 2; \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ, имеем



$$x \in (0,25;\ 0,5] \cup [2;\ +\infty)$$

Ответ: $(0,25;\ 0,5] \cup [2;\ +\infty)$.

6. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x^2+6^x+4\le 44\cdot\log_5(x+3), \\ 4x+6^x\ge 44\cdot\log_5(x+3). \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x+3>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-3;+\infty).$

Перепишем систему в виде:

$$x^2+6^x+4\le 44\cdot\log_5(x+3)\le 4x+6^x$$

Откуда получим неравенство:

$$x^2+6^x+4\le 4x+6^x$$

$$x^2-4x+4\le 0$$

$$(x-2)^2\le 0$$

$x=2$ – *удовлетворяет ОДЗ*

Выполним проверку системы:

$$\begin{cases} 2^2+6^2+4\le 44\cdot\log_5(2+3), \\ 4\cdot 2+6^2\ge 44\cdot\log_5(2+3). \end{cases}$$ – *верно*

Ответ : 2.

7. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 25-x^2>0, \\ 24+2x-x^2>0, \\ 25-x^2 \neq 16; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-4;\,-3) \cup (-3;\,3) \cup (3;\,5).$

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$$

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16}$$

$$\left(\frac{25-x^2}{16}-1\right)\left(\frac{24+2x-x^2}{14}-\frac{25-x^2}{16}\right) > 0$$

$$(9-x^2)(8(24+2x-x^2)-7(25-x^2)) > 0$$

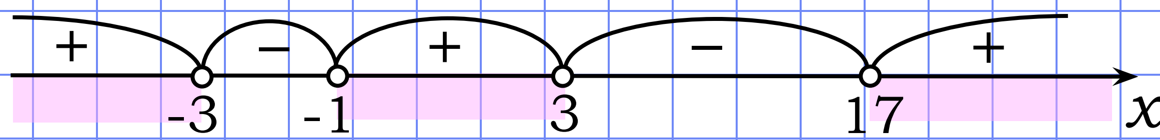
$$(9-x^2)(17+16x-x^2) > 0$$

7. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$

(продолжение)

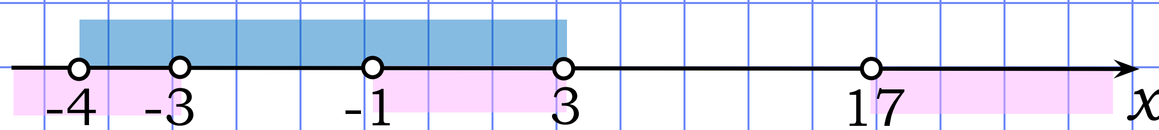
$$(x^2-9)(x^2-16x-17) > 0$$

$$(x-3)(x+3)(x+1)(x-17) > 0$$



$$x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 3) \cup (17; +\infty).$$

С учетом ОДЗ, имеем



$$x \in (-4; -3) \cup (-1; 3).$$

Ответ: $(-4; -3) \cup (-1; 3).$

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \le 0, \\ \log^2_{|x|}\left(x^2\right) + \log_2\left(x^2\right) \le 8. \end{cases}$

Решение.

1) *ОДЗ:* $\begin{cases} x \ne 0, \\ x \ne 1, \\ x \ne -1; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$

2) $\log^2_{|x|}\left(x^2\right) + \log_2\left(x^2\right) \le 8$

$\left(2\log_{|x|}|x|\right)^2 + 2\log_2|x| \le 8$

$4 + 2\log_2|x| \le 8$

$2\log_2|x| \le 4$

$\log_2|x| \le 2$

$\log_2|x| \le \log_2 4$

т.к. $a = 2 > 1$, то

$|x| \le 4$

$-4 \le x \le 4$

С учетом ОДЗ, имеем

$x \in (-4; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4).$

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^{x+1} - 17\cdot 2^{x} + 4 \le 0, \\ \log^{2}_{|x|}\left(x^{2}\right) + \log_{2}\left(x^{2}\right) \le 8. \end{cases}$

3) *(продолжение)*

$4^{x+1} - 17\cdot 2^{x} + 4 \le 0$

$4\cdot 2^{2x} - 17\cdot 2^{x} + 4 \le 0$

Пусть $2^{x} = t,\ t > 0,$ *тогда*

$4\cdot t^{2} - 17\cdot t + 4 \le 0$

$4(t-4)\left(t - \frac{1}{4}\right) \le 0$

$\frac{1}{4} \le t \le 4$ – *удовлетворяет условию* $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$\frac{1}{4} \le 2^{x} \le 4$

$2^{-2} \le 2^{x} \le 2^{2}$

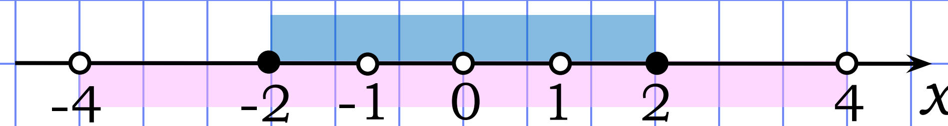
т.к. $a = 2 > 1$, *то*

$-2 \le x \le 2$

4) *Общее решение:*

$x \in (-4;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 4)$

и $-2 \le x \le 2$



$x \in [-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2]$

Ответ: $[-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2]$

9. Решите неравенство

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right).$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\ne 1, \\ 36+16x-x^2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-2;-1)\cup(-1;18).$

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)$$

$$4\log^2_{x+2}|x-18|+32\le 16\log_{x+2}(x+2)(18-x)$$

$С\ учетом\ ОДЗ,\ имеем$

$$4\log^2_{x+2}(18-x)+32\le 16\left(\log_{x+2}(x+2)+\log_{x+2}(18-x)\right)$$

$$4\log^2_{x+2}(18-x)-16\log_{x+2}(18-x)+16\le 0$$

$$\log^2_{x+2}(18-x)-4\log_{x+2}(18-x)+4\le 0$$

$$\left(\log_{x+2}(18-x)-2\right)^2\le 0$$

$$\log_{x+2}(18-x)=2$$

9. Решите неравенство

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2 + 32 \le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right).$$

(продолжение)

$$\log_{x+2}(18-x) = \log_{x+2}(x+2)^2$$

$$18 - x = (x+2)^2$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -7, \quad -\text{не удовлетворяет ОДЗ} \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: 2.

10. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2-x>0, \\ 2-x\ne 1, \\ x+2>0, \\ x+3>0, \\ x+3\ne 1, \\ 3-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-2;\,1)\cup(1;\,2).$

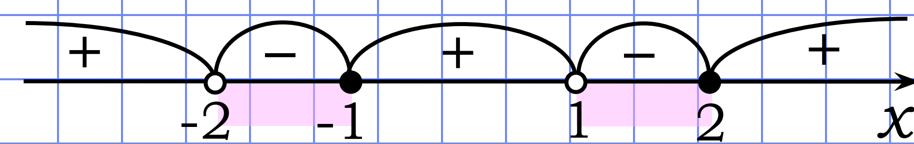
$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$$

$$\frac{\log_2(x+2)\cdot\log_2(3-x)}{\log_2(2-x)\cdot\log_2(x+3)}\le 0$$

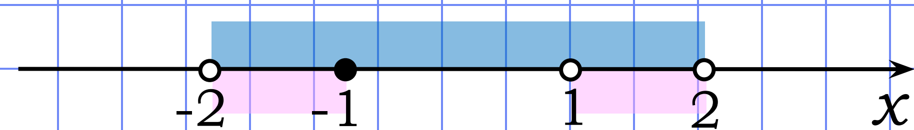
$$\frac{((x+2)-1)\cdot((3-x)-1)}{((2-x)-1)\cdot((x+3)-1)}\le 0$$

$$\frac{(x+1)\cdot(2-x)}{(1-x)\cdot(x+2)}\le 0$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+2)}\le 0$$



С учетом ОДЗ, имеем



$$x\in(-2;\,-1]\cup(1;\,2)$$

Ответ: $(-2;\,-1]\cup(1;\,2)$.