Архитектура ЭВМ и систем

Лекция 4

Сложение чисел в обратном и дополнительном кодах

- операцию алгебраического сложения можно свести к арифметическому сложению кодов чисел, включая разряды знаков, которые рассматриваются как старшие разряды
- При сложении чисел в дополнительном коде возникающая единица переноса в знаковом разряде отбрасывается.
- При сложении чисел в обратном коде возникающая единица переноса в знаковом разряде прибавляется к младшему разряду суммы кодов. Такой перенос называется круговым или циклическим.

Пример 1

- X= 111, Y= –11. Найти X + Y в обратном и дополнительном кодах и сделать проверку, пользуясь правилами двоичной арифметики.
- 1) по правилами двоичной арифметики:

$$\begin{array}{rr} X= & 111 \\ - \\ Y= & 11 \\ \hline X+Y= & 100 \end{array}$$

- 2) используя коды:

Прямой код

$X_{пр}=0,0000111$

$Y_{пр}=1,0000011$

Сложение в обратном коде

$$\begin{array}{lrr} X_{обр}= & + & 0,0000111 \\ Y_{обр}= & & 1,1111100 \\ \hline & & 1\ 0,0000011 \\ & & +1 \\ (X+Y)_{обр}= & & 0,0000100 \end{array}$$

Сложение в дополнительном коде

$$\begin{array}{lrr} X_{доп}= & + & 0,0000111 \\ Y_{доп}= & & 1,1111101 \\ \hline & & 1)0,0000100 \\ (X+Y)_{доп}= & & 0,0000100 \end{array}$$

отбрасывается

Пример 2

- X = –101, Y = –110, X + Y = ?
- 1) по правилами двоичной арифметики:

$$\begin{array}{rr} X= & -\ \ 101 \\ Y= & \underline{-\ \ 110} \\ X+Y= & -1011 \end{array}$$

- 2) используя коды

Прямой код

$X_{пр}=1{,}0000101$

$Y_{пр}=1{,}0000110$

Сложение
в обратном коде

$$\begin{array}{lr} X_{обр}= & 1{,}1111010 \\ Y_{обр}= & +\ \underline{1{,}1111001} \\ & 1\ 1{,}1110011 \\ & +1 \\ (X+Y)_{обр}= & 1{,}1110100 \end{array}$$

Сложение
в дополнительном коде

$$\begin{array}{lr} X_{доп}= & 1{,}1111011 \\ Y_{доп}= & +\ \underline{1{,}1111010} \\ & 1)1{,}1110101 \\ (X+Y)_{доп}= & 1{,}1110101 \end{array}$$

отбрасывается

- (X+Y)обр = 1,1110100 → (X+Y)пр = 1,0001011
- (X+Y)доп = 1,1110101 → (X+Y)пр = 1,0001010 + 1 = 1,0001011

Модифицированные обратный и дополнительный коды

- Перевести в двоичный код и сложить $X=56_{16}$ $Y=68_{16}$

$$\begin{array}{rl} X= & 0,1010110 \\ Y= & \underline{0,1101000} \\ X+Y= & 1,0111110 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} X= & 00,101011 \\ Y= & \underline{00,110100} \\ X+Y= & 01,011111 \end{array}$$

- Под знак числа отводится два разряда:
  - "00" соответствует знаку "+",
  - "11" соответствует знаку "–".
  - "01" или "10“ признак переполнения разрядной сетки

Пример

- X=101001, Y= –11010. Сложить в модифицированном дополнительном коде. Проверить с помощью перевода чисел в 10с/с

Обычная запись	Модифицированный обратный код	Модифицированный дополнительный код
X= +101001	$X^{\text{м}}_{\text{обр}}=00{,}101001$	$X^{\text{м}}_{\text{доп}}=00{,}101001$
Y= –011010	$Y^{\text{м}}_{\text{обр}}=11{,}100101$	$Y^{\text{м}}_{\text{доп}}=11{,}100110$

$$X^{\text{м}}_{\text{доп}}= \quad 00{,}101001$$

$$Y^{\text{м}}_{\text{доп}}= \quad \underline{11{,}100110}$$

$$1)\,00{,}001111$$

отбрасывается

$$(X+Y)^{\text{м}}_{\text{доп}}= \quad 00{,}001111$$

Проверка:
41 + (–26) = 15

Упражнения 2

- Сложить X и Y в обратном и дополнительном кодах. Результат перевести в прямой код. Проверить, пользуясь правилами двоичной арифметики.
  - X= -11010, Y= 1001111
  - X= -11101, Y= -100110
- Сложить X и Y в модифицированном обратном и модифицированном дополнительном восьмиразрядных кодах. Результат перевести в прямой код и проверить, пользуясь правилами двоичной арифметики.
  - X= 10110, Y= 110101

Формы представления чисел в ЭВМ

- Представление целых чисел
  - 1. Числа с фиксированной точкой
  - 2. Символьный способ представления
  - 3. Двоично-десятичный способ
- Представление вещественных чисел
  - 1. Числа с фиксированной точкой
  - 2. Числа с плавающей точкой

Представление целых чисел

- **1. Числа с фиксированной точкой**

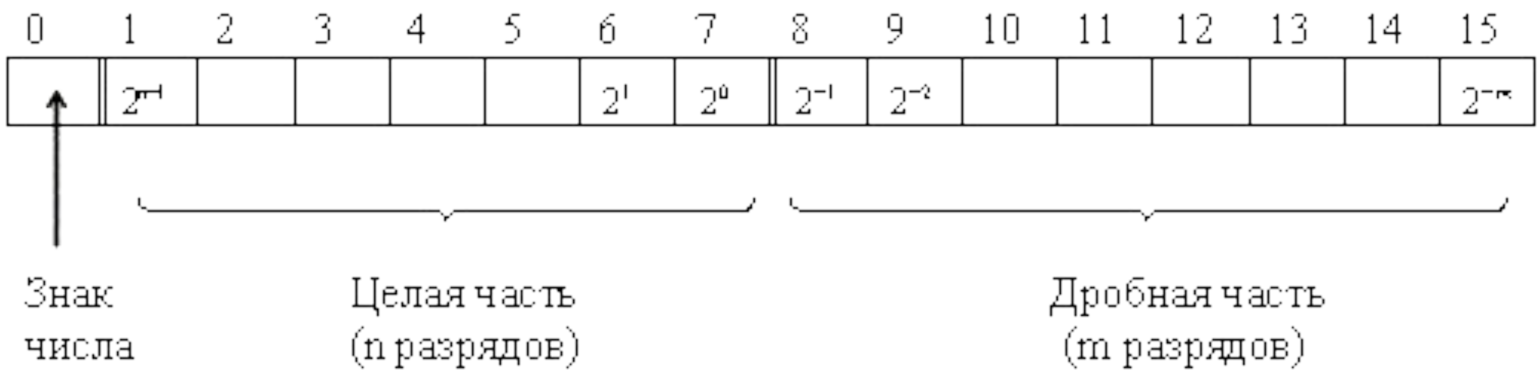
- Диапазон представляемых чисел
  - *n* разрядов: -2^{n-1} .. $+2^{n-1}-1$
  - *n=8* -128 .. 127
  - *n=16* $-32\,768$ .. $32\,767$
- Диапазон беззнаковых чисел
  - 0 .. 2^n-1

- **Исключительная ситуация**
- FixedOverflow – переполнение с фиксированной запятой – результат операции превышает максимально возможное для данной разрядной сетки значение
  - устанавливается в "1" флаг переполнения
  - старший бит результата теряется
  - в качестве результата выдается искаженное число.
  - ситуация не считается критической, и после окончания данной операции вычисления продолжаются.

- **2. Символьный способ представления**
  - число 397 = $\boxed{\text{Код 3}}$ $\boxed{\text{Код 9}}$ $\boxed{\text{Код 7}}$
- **3. Двоично-десятичный код**
  - 397_{10} = 0011 1001 0111

Представление вещественных чисел

- **1. Числа с фиксированной точкой**



- Достоинства
  - простота выполнения арифметических операций
  - высокая точность изображения чисел
- Недостаток
  - небольшой диапазон представления чисел

- **2. Числа с плавающей точкой**

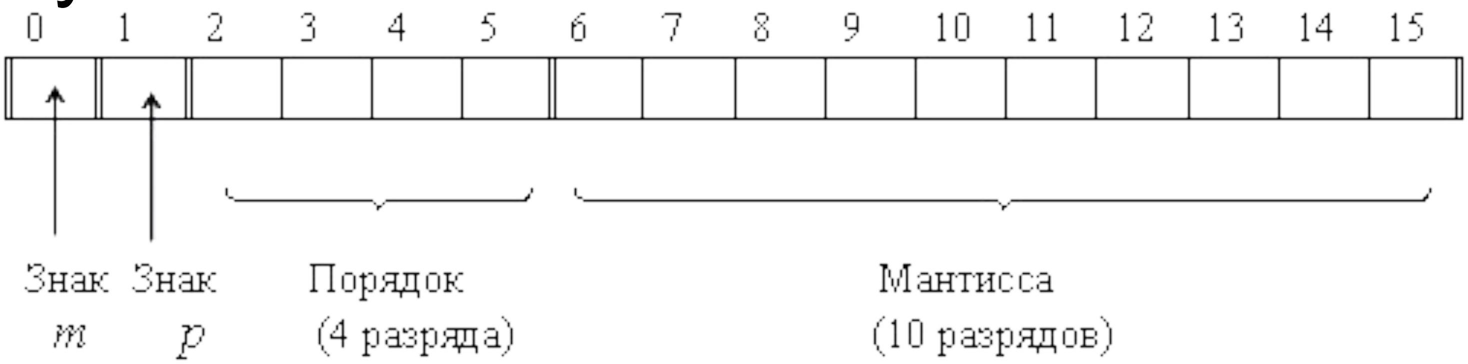
- Форма записи числа:

$$N = \pm m\, q^{\pm p}$$

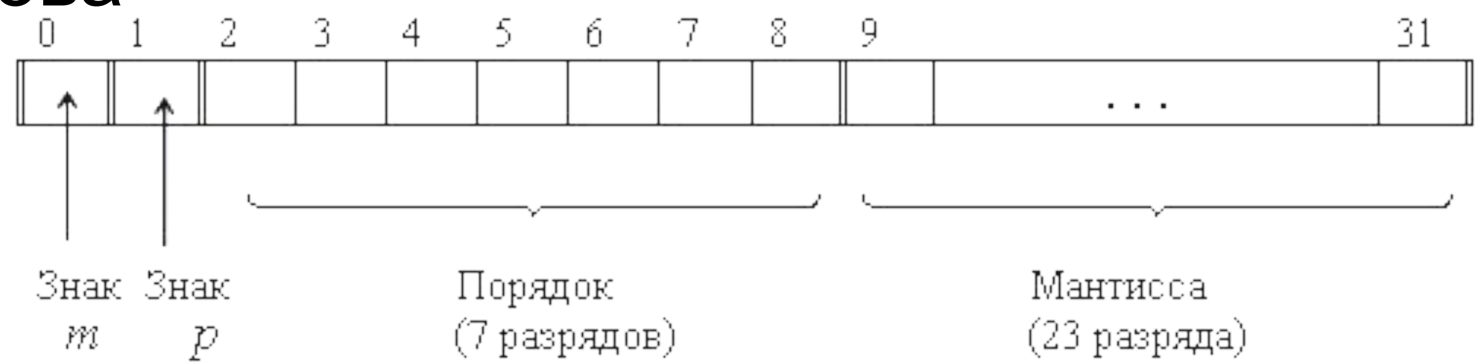
где
  - *q* – основание системы счисления,
  - *p* – порядок числа,
  - *m* – мантисса числа *N*.
- Пример.
  - $125_{10} = 12.5 \cdot 10^1 = 1.25 \cdot 10^2 = 0.125 \cdot 10^3 = 0.0125 \cdot 10^4 = \ldots$

- Нормализованная форма записи числа:
  $1/q \le | m | < 1$.

а) представление чисел в формате полуслова

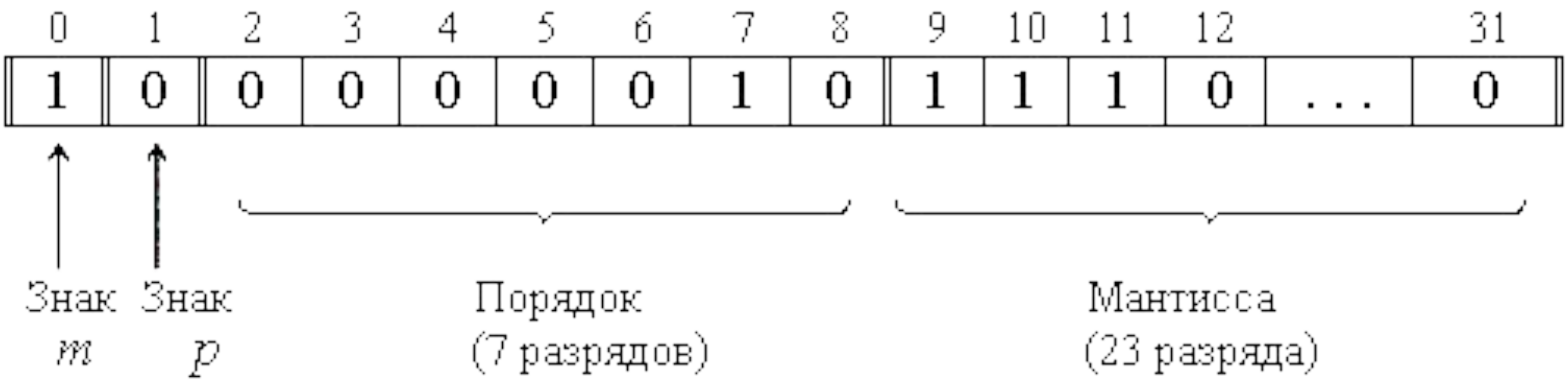


б) представление чисел в формате слова



<u>Пример</u>.

Число А = $-3.5_{10} = -11.1_2 = -0.111 \cdot 10^{10}$



Числа в формате слова

Максимальное $A=(0.1111...1\cdot10^{1111111})_2 \approx (1\cdot2^{127})_{10}$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		31
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1

Зн m Зн p Порядок Мантисса

Минимальное $A=(-0.1111...1\cdot10^{1111111})_2 \approx (-1\cdot2^{127})_{10}$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		31
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1

Зн m Зн p Порядок Мантисса

Минимальное по модулю, отличное от нуля и нормализованное

$$A=\left(0.1\cdot10^{-1111111}\right)_2=\left(\frac{1}{2}\cdot2^{-127}\right)_{10}=\left(2^{-128}\right)_{10}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		31
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	...	0

Зн m Зн p Порядок Мантисса

- Диапазон чисел определяется главным образом разрядностью порядка, а точность числа – только разрядностью мантиссы.
- Таким образом, числа с плавающей точкой позволяют увеличить диапазон обрабатываемых чисел, но при этом точность изображения чисел уменьшается по сравнению с числами с фиксированной точкой.
- Пример.
  - Пусть имеем число $0{,}1242 \cdot 10^{12}$ в 10 с/с.
  - Мантисса имеет 4 разряда.
  - Тогда ближайшее большее этого числа равно $0{,}1243 \cdot 10^{12}$.
  - Абсолютная погрешность $1 \cdot 10^{8}$.

- <u>Пример</u>. Даны X=13,45 и Y=13,45 $\cdot$ 10^{-5}
  - в десятичной системы счисления
  - в форме чисел с плавающей запятой
  - разрядность мантиссы = 4, порядок = 2
- Вычислить X – Y.
- Запишем числа X и Y в форме с плавающей запятой:

  X: + + 02 1345

  Y: + – 03 1345

  Оба числа представлены в форме с плавающей запятой без искажения. X≠0, Y≠0
- Выполним вычитание

  X: 1 3 , 4 5

  Y: 0 , 0 0 1 3 4 5

  ____

  X–Y: 1 3 , 4 4 8 6 5 5
- Округлим результат, учитывая, разрядность мантиссы

  X–Y: + + 02 1345
- **Вывод**. При вычитании двух чисел большое значение имеют соотношение их величин и разрядность мантисс, используемая для их кодирования.
- Например, цикл

  While (X–Y)>0.01 do оператор

  может оказаться бесконечным.

Ошибки и исключительные ситуации

- **1.** Overflow - переполнение с плавающей запятой - в результате операции возникает число, имеющее порядок с большей разрядностью, чем допустимая при представлении порядка в машине
  - аппаратное прерывание работы
- **2.** Появление машинных нулей – нормализованных чисел ≠0, но имеющих порядок, меньший самого малого порядка, представимого в разрядной сетке
  - выполнение программы после этого продолжается
- **3.** Ошибка метода представления чисел – количество разрядов мантиссы больше количества, выделенного для ее представления в разрядной сетке ЭВМ
  - избыточные младшие разряды отбрасываются

Арифметические действия над числами с плавающей точкой

- Сложение
- Умножение
- Деление

Сложение

1. Уравнивание порядков
2. Сложение мантисс в одном из модифицированных кодов
3. Нормализация результата

- Пример.
  - Представить числа $X=9_{10}$ и $Y=–37_{10}$ в виде нормализованных двоичных чисел с плавающей точкой и сложить.

Умножение

1. Умножение мантисс в прямом коде.
2. Сложение порядков.
3. Определение знака числа (логическая операция исключающее или)

- Пример.
  - Представить числа $X=5_{10}$ и $Y=-0,375_{10}$ в виде нормализованных двоичных чисел с плавающей точкой и перемножить.

Деление

- Пример.
  - Представить числа $X=20_{10}$ и $Y=0{,}25_{10}$ в виде нормализованных двоичных чисел с плавающей точкой и вычислить X / Y.