ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ЭВМ

2016

Парамонов А.И.

Машинные формы представления чисел

Два основных способа представления данных в ЭВМ:

- **с фиксированной запятой (точкой);**
- **с плавающей запятой (точкой).**

±	*целая часть*	*дробная часть*

Представление чисел с фиксированной точкой

Каков же диапазон представления чисел для данного формата **?**

$$A_{max} = (2^k - 1) + (1 - 2^{-m}),$$

где k – число разрядов целой части,

m – число разрядов дробной части числа

($k + m = n$).

±	*целая часть*	*дробная часть*

Представление чисел с фиксированной точкой

При использовании фиксированной точки (*как правило*) числа представляются в виде целого числа или правильной дроби.

зн.	1р	2р	3р	4р	…	(n-1)р	nр	“.”

Формат целого числа

зн.	“.”	1р	2р	3р	4р	…	(n-1)р	nр

Формат дробного числа

Т.о. при *n*-разрядном представлении модульной части *формат с фиксированной точкой* обеспечивает диапазон изменения абсолютного значения числа *A*, для которого выполняется неравенство

$$2^n > |A| \geq 0.$$

Ошибка представления

– это один из важнейших параметров представления чисел.

Ошибка представления может быть **абсолютной** (**Δ**) или **относительной** (**δ**).

максимальные значения ошибок для формата с фиксированной точкой:

- В случае целых чисел:

$$\Delta_{max} = 0{,}5; \quad \delta_{max} = \Delta_{max} / A_{min} = 0{,}5$$

где A_{min} *– миним. значение числа (отличное от 0).*

- В случае дробных чисел:

$$\Delta_{max} = 0{,}5 \cdot 2^{-n} = 2^{-(n+1)};$$

$$\delta_{max} = \Delta_{max} / A_{min} = 2^{-(n+1)} / 2^{-n} = 0.5$$

Т. е. в худшем случае ошибка может достигать

Целые числа в ЭВМ

Целые числа представляются в формате
с фиксированной точкой.

Возможны **4 (*четыре*) варианта** представления:

- **Целое число;**
- **Короткое целое число;**
- **Длинное целое число;**

- Целое число занимает ***2 или 4 байта***.

Его формат полностью соответствует используемому центральному процессору.

Для представления отрицательных используется дополнительный код.

- Короткое и длинное целое занимают, соответствуют*, **4 и 8 байт***.

Форматы аналогичные.

- **Упакованное десятичное** занимает ***10 байт.***

Такое число содержит 18 десятичных цифр (*по две в каждом байте*).

Знак упакованного числа находится в старшем бите самого левого байта. Остальные биты самого старшего байта д.б. равны нулю.

Арифметические операции над числами в формате с фиксированной точкой

- К числу основных арифметических операций, непосредственно реализуемых в ЭВМ, относятся операции *сложения*, *умножения*, *деления*.
- Остальные операции (например, *возведение в степень*, *извлечение квадратного корня* и т.д.) реализуются программным способом.

Выполнение длинных операций (*умножение и деление*)

Реализуется в два этапа:

- на первом этапе формируется знак искомого результата,
- на втором этапе ищется результат (*произведение или частное*) для абсолютных значений операндов, которому затем присваивается предварительно определенный знак.

Первый этап …

- Операнды, *как правило,* представлены в прямом коде, и знак результата, независимо от того, частное это или произведение, ищется за счет сложения по модулю 2 знаковых разрядов операндов.

Если операнды имеют одинаковые знаки – знак результата *положителен,*

Если операнды имеют разные знаки – знак *отрицательный*.

Второй этап …

{ материал по операциям с алгебраическими числами }

Деление с фиксированной точкой

Деление = формирование частного двоичных положительных чисел, которые представлены правильными дробями.

Второй этап для деления выполняется двумя способами:

- **Деление с восстановлением остатка;**
- **Деление без восстановления остатка.**

Достоинства *vs.* Недостатки

Простота выполнения арифметических операций

Ограничение длины разрядной сетки – *ограничение диапазона чисел (и потеря точности)*

Представление чисел с плавающей точкой

При представления числа *с плавающей точкой* число в общем случае представляет собой смешанную дробь.

1p	**2p**	**3p**	**…**	**kp**	**“.”**	**(k+1)p**	**(k+2)p**	**…**	**(n-1)p**	**np**

Местоположение точки в записи числа может быть различным.

Для однозначного задания числа необходима не только его запись, но и информация о том, где в записи числа располагается точка, отделяющая целую и дробную части.

Число с плавающей точкой *X* представляется в виде двух частей:

- ***мантисса*** (***m_x***), отображающая запись числа, представляется в виде правильной дроби с форматом фиксированной точкой;
- ***порядок*** (***p_x***), отображающий местоположение в этой записи точки, представляется в виде целого числа с форматом фиксированной точки.

Количественная оценка числа *X*:

$$X = q^{P_x} \cdot m_x ,$$

где ***q*** *– основание системы счисления.*

Порядок (с учетом знака) показывает на сколько разрядов и в какую сторону сдвинута запятая …

Например:

$$A_{10} = 239{,}745 = 0{,}239745 * 10^{3} = 239745 * 10^{-3}$$

Нормализованная форма числа

Распространено и удобно для представление ограничение вида:

$$q^{-1} \leq |m_x| < 1$$

Форма представления чисел, для которых справедливо данное ограничение, называется **нормализованной**.

В прямом коде нормализованного числа мантисса в старшем разряде модуля имеет ***ненулевое значение***,

для двоичной системы счисления – нормализованная мантисса должна иметь в старшем разряде модуля прямого кода ***значение 1***,

т.е. для двоичной системы мантисса должна удовлетворять неравенству:

$$1 > |m_x| \geq 0{,}5$$

При *s-разрядном* представлении модуля записи мантиссы и *k-разрядном* представлении модуля записи порядка форма с плавающей точкой обеспечивает диапазон изменения абсолютного значения числа ***X***, для которого выполняется неравенство:

$$2^{|Px|max} \cdot |m_x|_{max} = 2^p \cdot (1\text{-}2^{-s}) \geq |X| \geq 0$$

где $\boldsymbol{p = 2^k - 1}$

Абсолютная и относительная ошибки

Максимальная ***абсолютная погрешность*** *представления чисел:*

$$\Delta_{max} = 2^{-(s+1)} \cdot 2^{p}$$

Максимальная ***относительная погрешность****:*

$$\delta_{max} = \Delta_{max} / A_{min} = 2^{-(s+1)} \cdot 2^{p} / (m_{x\ min} \cdot 2^{p})$$

$$=$$

В чем преимущество нормализованных чисел ???

- Для фиксированной разрядной сетки (при фиксированном количестве цифр в числе) нормализованные числа ***имеют наибольшую точность.***
- Нормализованное представление ***исключает неоднозначность*** – каждое число с плавающей точкой можно представить различными (ненормализованными) способами.

Преимущества представления чисел с плавающей точкой:

- Относительная ошибка при представлении чисел в форме с плавающей точкой существенно меньше, чем в случае с фиксированной точкой.
- Больший диапазон изменения представляемых чисел.

Формат чисел с плавающей точкой

Формат машинного изображения чисел с плавающей точкой включает *знаковые поля (для мантиссы и для порядка), поле мантиссы и поле порядка числа*.

±	***мантисса,*** $\boldsymbol{m_x}$	±	***порядок,*** $\boldsymbol{p_x}$

Научная нотация

В языках высокого уровня используется такое представление:

(знак)(мантисса)E(знак)(порядок)

НАПРИМЕР:

-5.35E-2 обозначает число ***-5.35*10***$^{-2}$

Такое представление называется ***научной нотацией.***

Действительные числа в ЭВМ

В зависимости от типа данных, числа с плавающей точкой *в памяти ЭВМ хранятся* в одном из следующих форматов:

- **Одинарной точности;**
- **Двойной точности;**
- **Расширенной точности.**

Эти числа занимают, соответственно,

Для упрощения операций над порядками применяется представление со смещенным порядком:

$$p` = p + N,$$

N – *смещение (целое положительное число).*

$$N=2^k – 1,$$

k – *число двоичных разрядов в поле цифр несмещенного порядка.*

Такие смещенные порядки называются ХАРАКТЕРИСТИКАМИ !

Характеристика

Поле характеристики – это степень двойки,
на которую умножается мантисса, плюс смещение.

Смещение равно:

для одинарной точности = 127,

для двойной – 1023,

±	характеристика	мантисса
31	30	22

±	характеристика	мантисса	
63	62	51	0

±	характеристика	мантисса
79	78	63

Арифметика с плавающей точкой

- Операция сложения
- Операция умножения
- Операция деления.

Операция **СЛОЖЕНИЯ** чисел с плав. точкой

Реализуется в 3 этапа:

- выравнивание порядков;
- сложение мантисс операндов, имеющих одинаковые порядки;
- определение нарушения нормализации *(и при необходимости ее устранение)*.

Примеры:

- **Пример 1**
  Произведем сложение двух чисел $\mathbf{0{,}5 \cdot 10^2}$ **и** $\mathbf{0{,}8 \cdot 10^3}$ в формате с плавающей запятой.

Решение.

Проведем выравнивание порядков и сложение мантисс $0{,}05 \cdot 10^3 + 0{,}8 \cdot 10^3 = 0{,}85 \cdot 10^3$. Полученная мантисса 0,85 является нормализованной, так как удовлетворяет условию нормализации.

- **Пример 2**
  Произведем сложение двух чисел $\mathbf{0{,}1 \cdot 2^2}$ **и** $\mathbf{0{,}1 \cdot 2^3}$ в формате с плавающей запятой.

Решение.

Проведем выравнивание порядков и сложение мантисс:
$0{,}01 \cdot 2^3 + 0{,}1 \cdot 2^3 = 0{,}11 \cdot 2^3$.
Полученная мантисса 0,11 является нормализованной.

Примеры:

$$\mathbf{0.4726*10^2 + 0.9132*10^0 =}$$

$$10^2 * (0.4726 + 0.0091) = \mathbf{0.4817*10^2}$$

$$\mathbf{0.1011_2*2^{-1} + 0.1011_2*2^1 =}$$

$$2^1*(00.0010_2 + 00.1101_2) =$$

$$\mathbf{01.0000_2}*2^1 =$$

$$\mathbf{0.1000_2*2^2}$$

Пример (!)

Найти разность C_1 чисел A и B, представленных с плавающей точкой, если A и B представлены в виде порядков $[a_п]_{пк}$ и $[b_п]_{пк}$ и мантисс, соответственно $[a_м]_{пк}$ и $[b_м]_{пк}$, где $[a_п]_{пк}$ = **1.001** $[a_м]_{пк}$ = **1.11001**

$[b_п]_{пк}$ = **0.001** $[b_м]_{пк}$ = **0.11100**

При выполнении операций использовать дополнительный модифицированный код.

Ответ:

После устранения нарушения нормализации окончательный результат будет иметь вид

$$C_1 \to \{[c_{1п}]_{пк} = 00.010,\ [c_{1м}]_{пк} = 11.10001\}$$

Операция умножения чисел с плав. точкой

С точки зрения представления чисел с плавающей точкой поиск произведения ($\boldsymbol{C_2} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$) сводится к поиску $\boldsymbol{C_{2п}}$ и $\boldsymbol{C_{2м}}$, соответственно порядку и мантиссе произведения на основании порядка $\boldsymbol{a_п}$ и мантиссы $\boldsymbol{a_м}$ множимого и порядка $\boldsymbol{в_п}$ и мантиссы $\boldsymbol{в_м}$ множителя.

Учитывая общую запись чисел с плавающей точкой, произведение двух операндов

$$C_2 = A \cdot B = 2^{aп} \cdot a_м \cdot 2^{вп} \cdot в_м = 2^{a\,п+вп} \cdot a_м \cdot в_м = 2^{c2п} \cdot c_{2м}.$$

Отсюда вытекает, что порядок произведения определяется как сумма порядков сомножителей, а мантисса произведения – как произведение мантисс сомножителей.

Таким образом:

$$\boldsymbol{C_{2п}`} = \boldsymbol{a_{п}} + \boldsymbol{b_{п}};$$

$$\boldsymbol{C_{2м}`} = \boldsymbol{a_{м}} \times \boldsymbol{b_{м}}.$$

Последовательность действий при произведении двух чисел:

- **определяется знак** произведения как сумма по модулю **2** знаковых разрядов мантисс сомножителей;
- **определяется предварительное значение порядка** произведения как сумма порядков сомножителей;
- **определяется предварительное значение мантиссы** произведения как произведение мантисс операндов;
- **устраняется нарушение нормализации** мантиссы произведения (*если нарушение имеет*

Деление чисел с плавающей точкой

- Мантиссу делимого делят на мантиссу делителя;
- Из порядка делимого вычитают порядок делителя;
- Знак частного формируется *так же, как и для произведения.*

Представление данных в ЭВМ

Элементарной единицей информации для представления данных в машинах используется **байт**, *который содержит восемь двоичных бит.*

Выделяется 2 основных вида данных:

- Символьные данные;
- Числовые данные.

Элементы данных представляются в виде последовательности байт переменной длины.

5	*4*	*8*	*6*
байт	байт	байт	байт

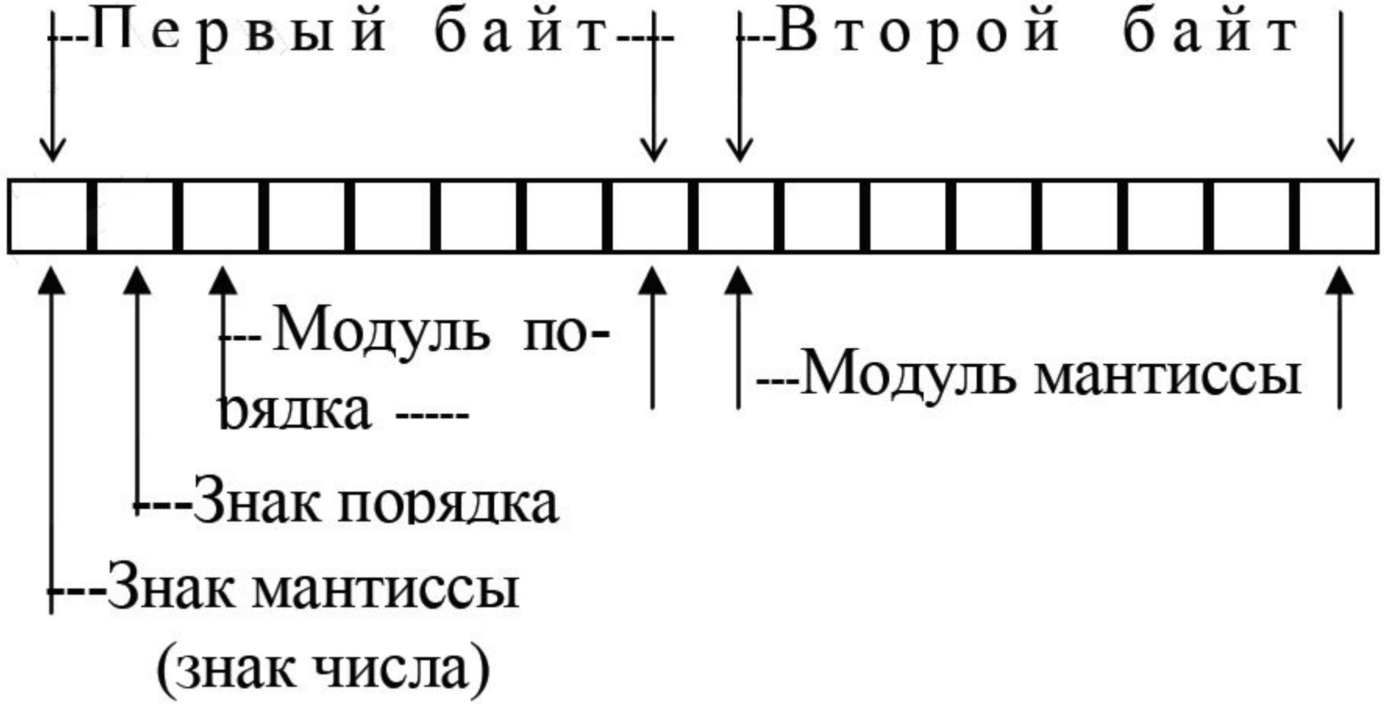
(а) – посимвольная запись десятичного числа

<table>
<tr><td>5</td><td>4</td><td>8</td><td>6</td></tr>
<tr><td>тетрада</td><td>тетрада</td><td>тетрада</td><td>тетрада</td></tr>
<tr><td colspan="2">байт</td><td colspan="2">байт</td></tr>
</table>

(б) – упакованная запись десятичного числа

Для представления двоичного числа обычно используется ограниченный набор форматов

***Пример**: представление чисел с плавающей точкой в двухбайтном формате*



Литература для самостоятельной работы

- Поснов Н.Н., **Арифметика вычислительных машин в упражнениях и задачах: системы счисления, коды** // Минск, 1984 – 223 с.
- Лысиков Б.Г., **Арифметические и логические основы цифровых автоматов: учебник для вузов** // 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Высш. шк., 1980 – 336 с.
- Андреева Е.Н., **Системы счисления и компьютерная арифметика: серия «Информатика»** / Е.Н. Андреева, И.Н. Фалина – 2-е изд. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2000 – 248 с.