Глава 2. *Функциональные последовательности и ряды*

2.1. Функциональная *последовательность и функциональный ряд. Область сходимости.*

Определение 1. Если на некотором множестве $G \subseteq R$ определена каждая из функций $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$, то говорят, что имеется функциональная последовательность, заданная на множестве G. И обозначают символом

$(f_n(x))$ или $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ (1)

При каждом фиксированном $x_0 \in G$ функциональная последовательность $(f_n(x))$ становится ....

(вставте пропущенное слово)

При каждом фиксированном $x_0 \in G$ *функциональная последовательность* $(f_n(x))$ *становится числовой последовательностью* $(f_n(x_0))$. *Относительно этой последовательности возможны* 2 *случая*:

$$\begin{cases} (f_n(x_0)) \text{ сходится,} \\ (f_n(x_0)) \text{ расходится.} \end{cases}$$

Если числовая последовательность $(f_n(x_0))$ сходится, то функциональная последовательность $(f_n(x))$ называется сходящейся в точке x_0, а точка x_0 - точкой сходимости последовательности (1) $(f_n(x))$.

Если y_0 предел числовой последовательности $f_n(x_0)$, то пишут $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

Если числовая последовательность $(f_n(x_0))$ *расходится, то функциональная последовательность* $(f_n(x))$ *называется расходящейся в точке* x_0,
а точка x_0 - *точкой расходимости последовательности* $(f_n(x))$.

Множество D *всех точек* $x \in G$, *в которых функциональная последовательность* (1) $(f_n(x))$ *сходится, называется областью сходимости этой последовательности. Иначе говорят, что* $(f_n(x))$ *сходится на множестве* D. *Тот же оборот речи употребляется для любого непустого подмножества* $D_1 \subset D$.

В каждой точке $x_0 \in D$ *последовательность* $f_n(x)$ *будет иметь соответствующий предел* $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. | *Почему?*

Если каждому $x_0 \in D$ *поставить в соответствие это* $y_0 (y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0))$, *то на множестве D будет задана функция* | *Почему?*

Действительно, последовательность $(f_n(x_0))$ *имеет единственный предел* y_0 | *по свойству пределов числовых последовательностей*

А так как последовательность $f_n(x)$ *сходится в каждой точке* $x_0 \in D$, *то каждому* $x_0 \in D$ *будет поставлено в соответствие единственное число* $y_0 \in$ □,
следовательно на D *будет задана функция* $f(x)$.

Её называют пределом последовательности $(f_n(x))$ *и записывают* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ (x \in D)$

и говорят, что $(f_n(x))$ *сходится к* $f(x)$ *при* $n \to \infty$.

Пример 1.

Последовательность $$\left(\frac{1}{x^2+n} \right)$$

сходится в любой т. $x_0 \in \square$.

Предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0.$

Пример 2. *Для последовательности* $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2+2}{nx^2+2n^2}$

при любом $x\in□$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2x^2+2}{nx^2+2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{x^2}{2n}+1}=\dfrac{x^2}{2}.$

Итак, областью сходимости этой последовательности является множество □ ,

а предельной функцией является $f(x)=\dfrac{x^2}{2}.$

Определение 2. *Из членов функциональной последовательности* $(f_n(x))$, *определённой на множестве* G, *составим символ*

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots .$$

Этот символ называют функциональным рядом, определённым на множестве G.

Он кратко обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (2)

Пример 3.

Из членов функциональной последовательности (x^{n-1}) *составим ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

Определение 3. *Назовём сумму первых n членов ряда* (2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *n-ой частной суммой этого ряда*

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Рассмотрим последовательность $(S_n(x))$ *частичных сумм ряда* (2) $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))$. *Она определена на множестве* G.

Определение 4. *Если последовательность $(S_n(x))$ частичных сумм ряда* (2) *с областью определения G сходится на множестве $D \subseteq G$ к некоторой функции $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, то ряд* (2) *называется сходящимся на множестве D, а функция $S(x)$ - его суммой. При этом пишут*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x), \text{ где } S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

Определение 5. *Множество* D *- область сходимости последовательности частичных сумм* $(S_n(x))$ *ряда* (2) *называется областью сходимости ряда* (2), *а каждая точка сходимости последовательности* $(S_n(x))$ *- точкой сходимости ряда* (2). *Точка расходимости последовательности* $(S_n(x))$ *является точкой расходимости ряда.*

2. *Отбрасывание в функциональном ряде* (2) *или приписывание к нему нескольких членов, опредлённых в области сходимости ряда, не изменяет области сходимости ряда(при неизменности области определения ряда).*

Определение 6. *Если в ряде* (2) *отбросить* *n первых членов (взятых подряд), получим ряд* (3) $f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots,$ *который называется остатком ряда* (2). *Если при отбрасывании членов область определения ряда* (3) *остаётся той же, что у ряда* (2), *то и области сходимости ряда и остатка совпадают.*

Если ряд (2) *сходится на множестве* D *к сумме* S, *то ряд* (3) *на множестве* D *имеет сумму* $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. *При этом*

$$\lim_{n\to\infty}(S(x) - S_n(x)) = 0$$

Почему?

Определение 7. *Функциональный ряд* (2) *называется абсолютно сходящимся в точке* x_0, *если в этой точке соответствующий числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *сходится абсолютно.*

Аналогично можно определить неабсолютно или условно сходящийся функциональный ряд в точке. Приведите определение условно сходящегося функционального ряда в точке.

Определение 8.

Если функциональный ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *абсолютно сходится в каждой точке множества E, он называется абсолютно сходящимся на множестве E.*

Теорема 1. *Если функциональный ряд абсолютно сходится на множестве E, то он является сходящимся на этом множестве.*

Докажите теорему.

Пример 4. *Найдём область сходимости и сумму ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. *Это геометрический ряд со знаменателем x. Он сходится при* $|x|<1$. *Таким образом область его сходимости интервал* (-1,1). *Сумма его* $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$. *При замене каждого члена ряда его модулем, мы получаем ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{n-1}$ *сходящийся при* $|x|<1$. *Следовательно данный ряд в* (-1,1) *сходится абсолютно.*

2.2. Равномерная сходимость

Пусть последовательность (1) $f_n(x)$ *сходится на множестве* D *к функции* $f(x)$. *Это означает, что при каждом* $x_0 \in D$ *соответствующая числовая последовательность сходится к числу .... По определению предела числовой последовательности это означает:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \iff \left(\forall\, \varepsilon > 0\right)\left(\exists\, n^* \in \square\right)$$

$$\left(n > n^* \Rightarrow \left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| < \varepsilon\right)$$

Для выбранного $x_0 \in D$ *по заданному* $\varepsilon > 0$ *находим* $n^* \in \mathbb{N}$. *Если выбрать другое* $x_0' \in D$, *то по тому же заданному* $\varepsilon > 0$ *найдётся уже другое* $n^{**} \in \mathbb{N}$ *такое, что при* $n > n^{**}$ $\left|f_n(x_0') - f(x_0')\right| < \varepsilon$.

Определение 1. *Последовательность* $(f_n(x))$ *имеющая на множестве* D *предельную функцию* f, *назывется рвномерно сходящейся на* D *к функции* f, *если для любого наперёд заданного* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $n^* \in \square$, *что при* $n > n^*$ *выполняется неравенство*

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

одновременно для всех $x \in D$.

Запишите это определение символически.

Если сходящаяся последовательность $f_n(x)$ *не является равномерно сходящейся к* $f(x)$ *на множестве* D, *то говорят, что она сходится к* $f(x)$ *неравномерно.*

Что это значит? Постройте отрицание равномерной сходимости $f_n(x)$ *к* $f(x)$ *на множестве* D

Последовательность $\left(f_n(x)\right)$ *сходится к* $f(x)$ *на* D *неравномерно* $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)\left(\forall n^* \in \mathbb{N}\right) \forall x \in D \left(n > n^* \wedge \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right)$$

Найдите ошибку!

Графическая иллюстрация равномерной сходимости последовательности

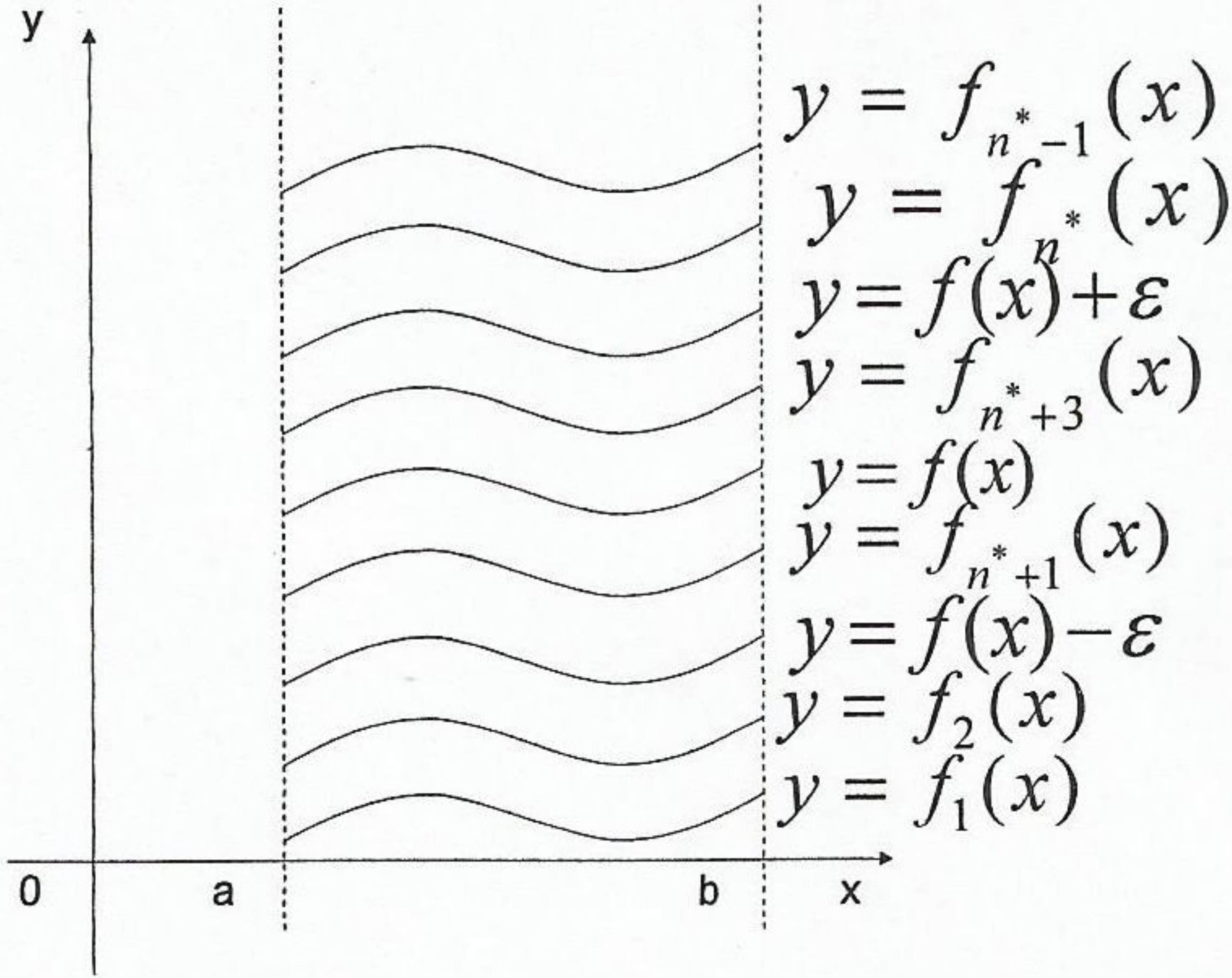
Пусть $f_n(x)$ *равномерно сходится к* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$. *Это означает*:

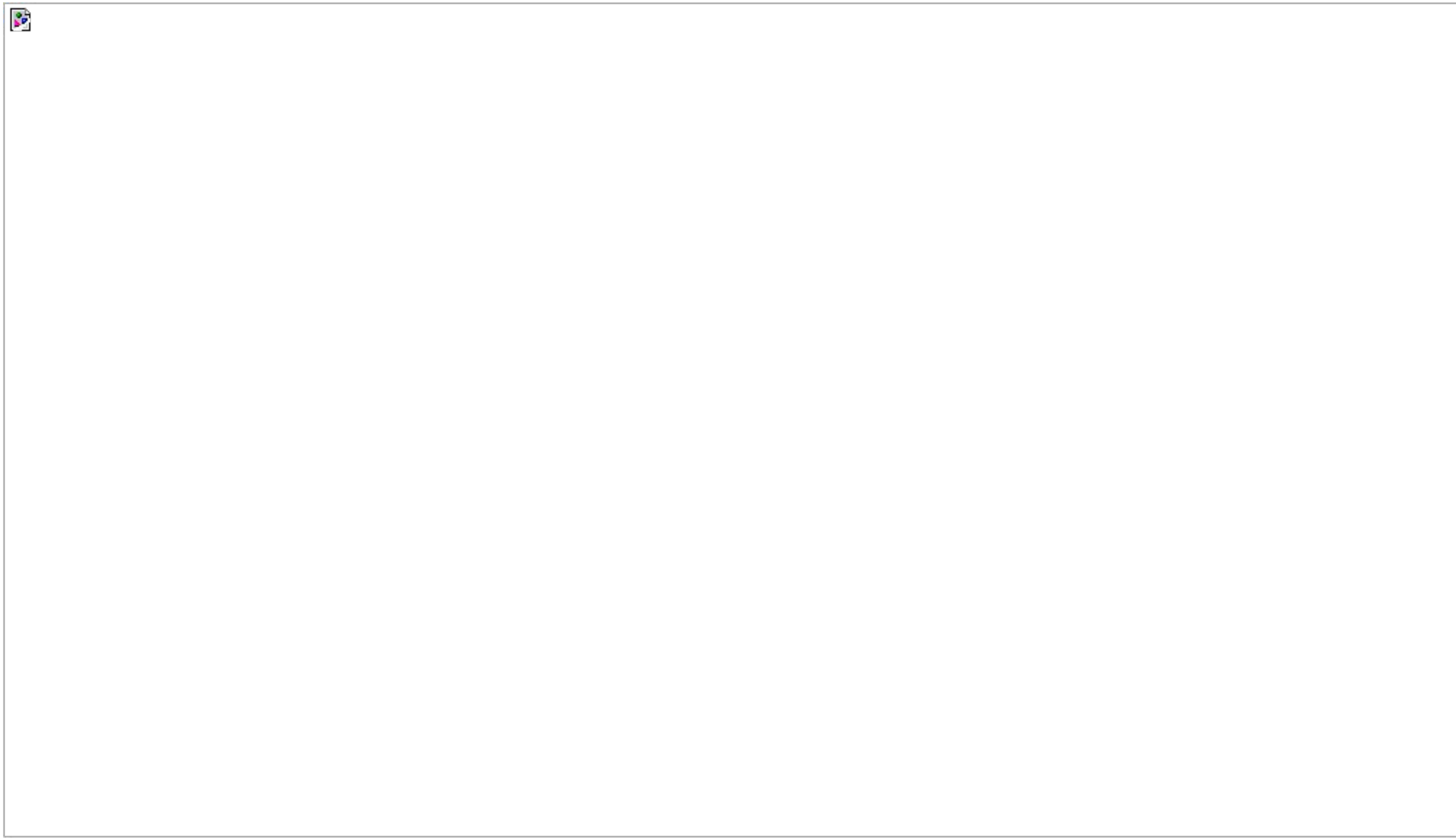
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [a,b])$$

$$\left(n > n^* \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\right).$$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

Графики $y = f(x) - \varepsilon$ *и* $y = f(x) + \varepsilon$ *образуют полосу шириной* 2ε. *В эту полосу попадают графики функций* $y = f_n(x)$ *с номерами* $n > n^*$.


y
$y = f_{n^*-1}(x)$
$y = f_{n^*}(x)$
$y = f(x) + \varepsilon$
$y = f_{n^*+3}(x)$
$y = f(x)$
$y = f_{n^*+1}(x)$
$y = f(x) - \varepsilon$
$y = f_2(x)$
$y = f_1(x)$
0
a
b
x



Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве D к $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$ равномерно сходится к $S(x)$ на D.

Запишите это определение символически

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) -$$ равномерно сходится к $S(x)$ на D $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n^* \in N)(\forall n \in N)(\forall x \in D)(n>n^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon)$$ иначе:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n^* \in N)(\forall n \in N)(\forall x \in D)(n>n^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|R_n(x)\right| < \varepsilon)$$

ПОЧЕМУ?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^2+n}$$

$(\forall x \in R)(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{x^2+n}-$ числовой ряд Лейбница).

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^2+n}=0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{x^2+n}$ - сходится $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|R_n(x)\right| < \underbrace{\frac{1}{x^2+n+1}}_{\text{(n+1)-ый член ряда}} < \frac{1}{n+1})$$

Взяв по заданному $\varepsilon > 0$ $\quad n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ получим $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$.

Следовательно ряд равномерно сходится.

2.3 Необходимый и достаточный признак равномерной сходимости

Теорема 2. (Критерий Коши)

Для того, чтобы функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходился равномерно на множестве D к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $n^* \in N$ такое, что $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ при любом натуральном p, $n > n^*$ и для всех $x \in D$.

Доказательство. Необходимость.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно к сумме $S(x)$ на множестве D, тогда последовательность $(S_n(x))$ его частичных сумм сходится равномерно.

ПОЧЕМУ?

Последнее означает:

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n^* \in N)(\forall x \in D)(\forall n \in N)$

$(n>n^* \Rightarrow |S_n(x)\text{-}S(x)|)$

На основании чего записано?

Если p - любое натуральное число, то при

$n>n^*$ и $n+p>n^*$. Тогда $|S_{n+p}(x)\text{-}S(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Используя известное свойство модулей получаем:

$$|S_{n+p}(x)\text{-}S_n(x)| = |(S_{n+p}(x)\text{-}S(x)) + (S(x)\text{-}S_n(x)| \le$$

$$\le |S_{n+p}(x)\text{-}S(x)| + |S(x)\text{-}S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Какое св-во использовано?

Достаточность: Пусть:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in N)(\forall x \in D)(\forall p \in N)$

$(n>n^* \Rightarrow \left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right| < \varepsilon) \Leftrightarrow (S_n(x))$ -

- сходится к предельной функции S(x) на множестве D.

?

Так как неравенство $\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$ справедливо при любом $p \in N$, то осуществив в нем предельный переход при $p \to \infty$, получим $\left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall x \in D)(\lim\limits_{x\to\infty} S_n(x) = S(x)) \Leftrightarrow$ ряд сходится равномерно.

??

2.4 Достаточный признак равномерной и абсолютной сходимости

Определение. Функциональный ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется мажорируемым на множестве D (на котором все функции $f_n(x)$ определены), если существует такой положительный сходящийся ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что члены ряда (1) (хотя бы начиная с некоторого номера) при всех $x \in D$ не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов числового ряда (2), т.е. $|f_n(x)| \le a_n$.

Теорема 3 (Признак Вейерштрасса)

Если функциональный ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ мажорируем на множестве D, то он равномерно и абсолютно сходится на этом множестве.

Доказательство.

Пусть ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ мажорируем рядом

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. начиная с некоторого номера

$|f_n(x)| \le a_n$ (3).

Из сходимости ряда (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует

(4) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in N)(\forall n \in N)(\forall p \in N)$

$(n>n^* \Rightarrow |a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon)$

Неравенство $|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$ равносильно

$a_{n+1} + ... + a_{n+p} < \varepsilon$

Из неравенств (3) $|f_n(x)| \le a_n$ и

(4) $a_{n+1} + ... + a_{n+p} < \varepsilon$

При n>n* и любом p натуральном

$$\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)\right| \le \left|f_{n+1}(x)\right|+\ldots$$

$$+\left|f_{n+p}(x)\right| \le a_{n+1}+\ldots+a_{n+p} < \varepsilon \Rightarrow$$

согласно критерию Коши

ряд (1) равномерно сходится

ряд (1) сходится абсолютно. | Почему?

Пример.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ сходится равномерно на множестве R, т.к. $(\forall x \in R)\left(\left|\frac{\sin kx}{k^3}\right| < \frac{1}{k^3}\right)$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ сходится.