

# Мультимедийные лекции по физике

Классическая и  
релятивистская механика

# Тема 6. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

## План лекции

- 6.1. Механический принцип относительности Галилея.
- 6.2. Экспериментальные основы специальной теории относительности.
- 6.3. Постулаты Эйнштейна.
- 6.4. Преобразования Лоренца.
- 6.5. Следствия из преобразований Лоренца.
- 6.6. Интервал.
- 6.7. Релятивистская динамика.
- 6.8. Взаимосвязь массы и энергии.

# 6.1. Механический принцип относительности Галилея

Теория относительности была создана при попытках ответить на вопросы:

1. Нельзя ли придать понятию скорости абсолютное значение?
2. Существует ли в природе какая-либо абсолютно неподвижная система отсчета?

Вначале рассмотрим как решался этот вопрос в рамках классической механики.

Пусть есть **две инерциальные системы** отсчета  $K$  и  $K'$ .

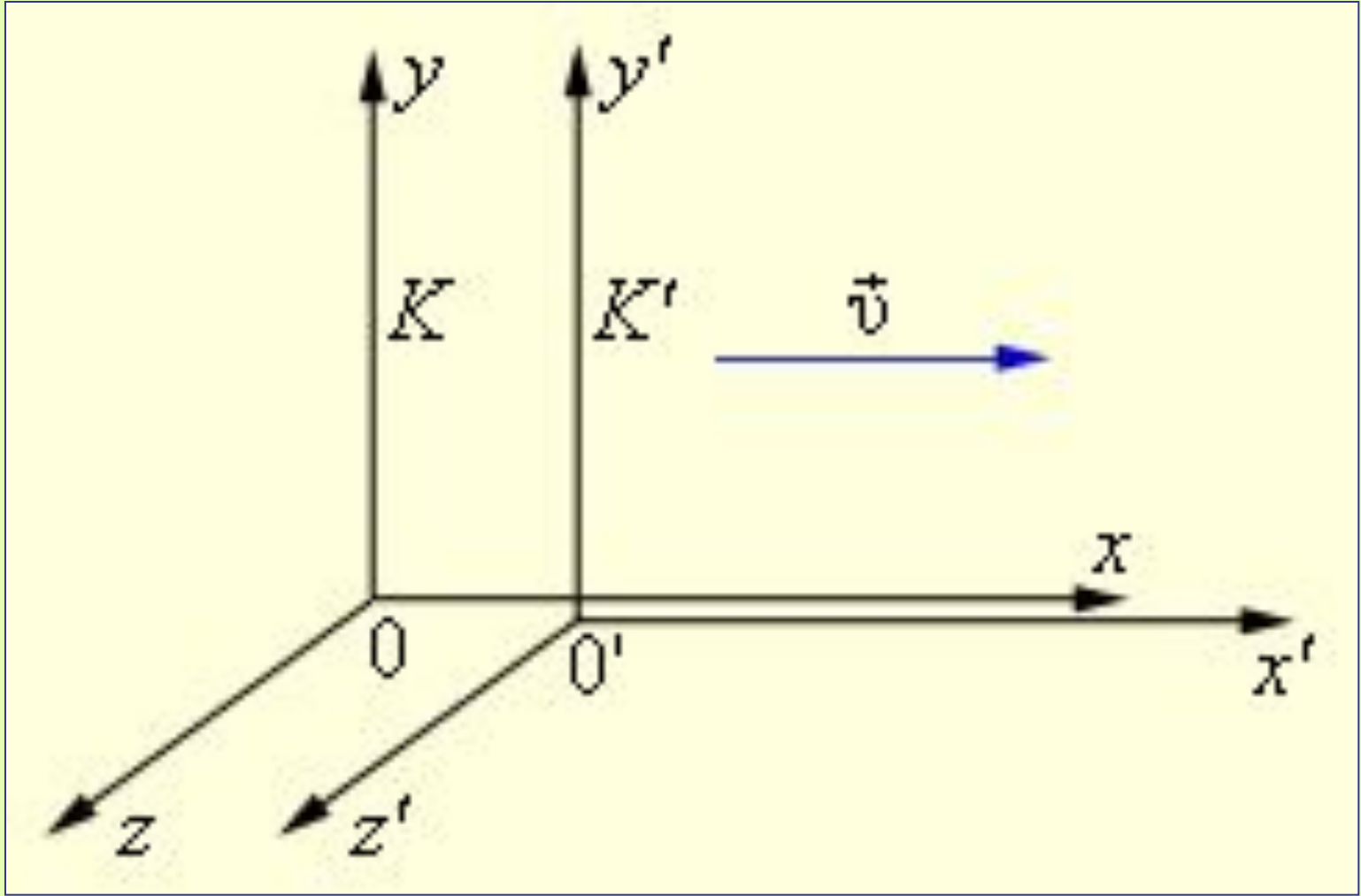
Систему  $K$  будем условно считать **неподвижной**.

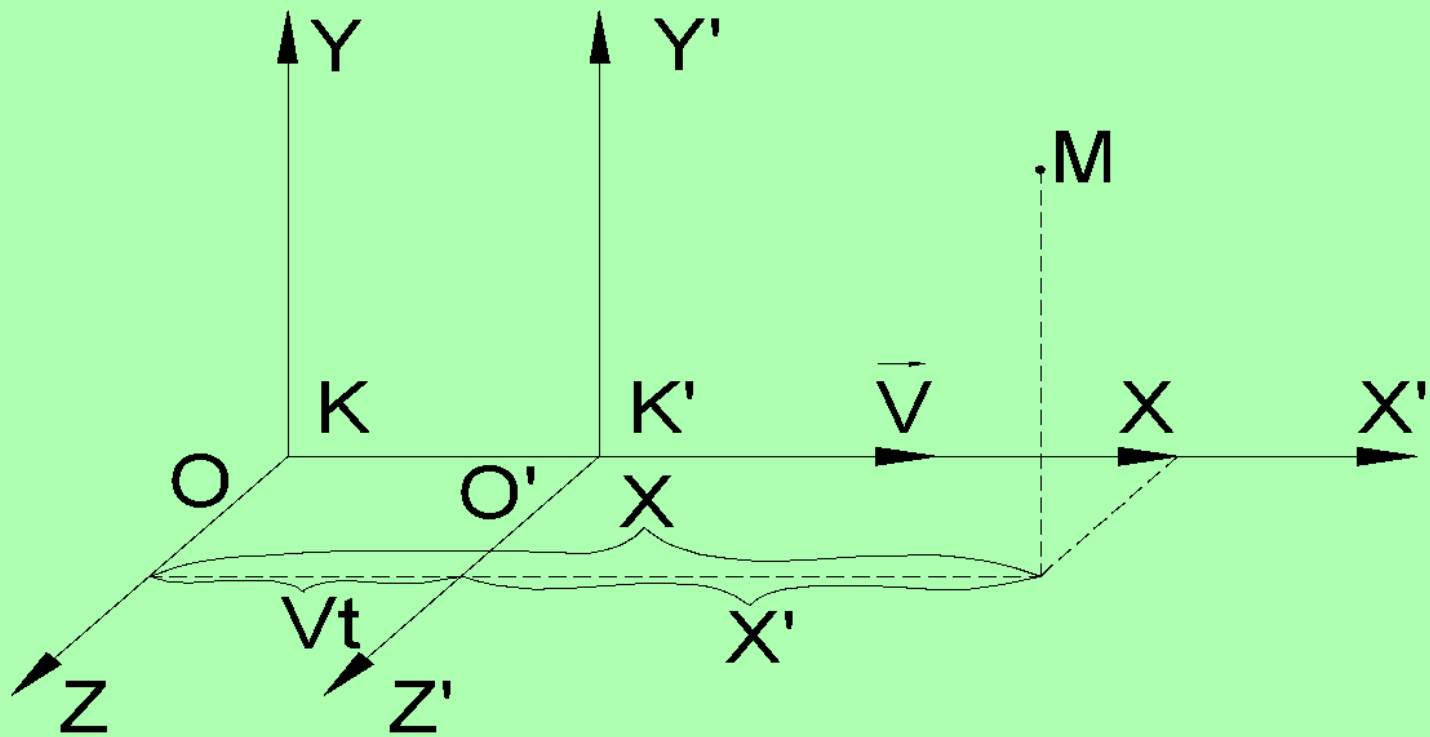
Систему  $K'$  – **движущейся поступательно с постоянной скоростью вдоль оси  $X$  без поворота осей  $Y'$  и  $Z'$** .

**В начальный момент** времени **начала координат** обеих систем и **направления соответствующих осей совпадают**.

Обе системы снабжены **синхронизированными часами**.

Осуществим переход от одной инерциальной системы отсчета к другой.





Так как по классической механике время абсолютно, то часы, связанные с системами  $K$  и  $K'$ , всегда будут показывать одно и то же время  $t = t'$ .

Свяжем между собой координаты одной и той же материальной точки (точки  $M$ ) в системах  $K$  и  $K'$ .

Пусть в системе  $K$  в момент времени  $t$  координаты точки  $M$  -  $x, y, z$ .

В системе  $K'$  в момент  $t' = t$  её координаты соответственно  $x', y', z'$ .

Если движение системы  $K'$  происходит вдоль направления оси  $X$ , то отличаться будут только **иксовые координаты** точки  $M$ .

# Преобразования координат Галилея

Запишем **связь координат** точки М двух систем:

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Полученные соотношения называют **преобразованиями Галилея**.

**Преобразования Галилея** – преобразования координат и времени, в основу которых положены классические свойства пространства и времени.



# Классический закон сложения скоростей

Из преобразований Галилея вытекает **закон сложения скоростей** в классической механике.

Производные от координат определяют соответствующие проекции скорости:

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\begin{cases} v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x' = v_x - V \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$$

Возьмем производные по времени от проекций скорости.

Поскольку  $V = \text{const}$ , то

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

Следовательно:

$$\begin{cases} a_x = a_x' \\ a_y = a_y' \\ a_z = a_z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases}$$

или

$$\overset{\nabla}{\mathbf{a}} = \overset{\nabla}{\mathbf{a}'}$$

**Ускорение тела одинаково** во всех инерциальных системах отсчета.

# Закон динамики

Классическая механика постулирует, что масса тела во всех системах отсчета одна и та же  $m = m'$ , следовательно

Тогда

$$m\overset{\Delta}{a} = m'\overset{\Delta}{a}'$$

$$\overset{\Delta}{F} = \overset{\Delta}{F}'$$

**Второй закон Ньютона** в движущейся системе  $K'$  имеет точно такой же вид, как и в неподвижной системе  $K$ .

$$\overset{\Delta}{a}' = \frac{\overset{\Delta}{F}'}{m}$$

$$\overset{\Delta}{a} = \frac{\overset{\Delta}{F}}{m}$$

Уравнение динамики в любой (из 3-х) форме ковариантно относительно преобразований Галилея.

# Инвариантные величины

**Инвариантными** называются величины, которые не изменяются при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую.

В классической механике такими величинами являются:

- время,
- масса,
- ускорение,
- сила,
- длина.

**Ковариантными** называются уравнения, вид которых не изменяется при переходе из одной инерциальной системы отсчёта в другую.

# Механический принцип относительности

Равномерное прямолинейное движение системы отсчета:

- не влияет на ход механических процессов.
- невозможно обнаружить механическими опытами.

Из сказанного следует механический принцип относительности Галилея:

Никакими механическими опытами, проведенными внутри инерциальной системы отсчета, невозможно установить покоится эта система или движется прямолинейно и равномерно.

Из принципа относительности Галилея следует, что в рамках классической механики **понятие скорости не может иметь абсолютного смысла.**

Бессмысленно ставить вопрос: «какова же (на самом деле) скорость точки М:  **$v$  или  $v'$**  ?».

**Обе координатные системы** совершенно **равноправны**, ни одна из них не может быть выделена как преимущественная, в которой понятию скорости можно придать абсолютный смысл.

**Физический смысл** имеет лишь понятие **относительной скорости**: скорости одних систем отсчета или тел по отношению к другим системам отсчета или телам.

## 6.2. Экспериментальные основы специальной теории относительности

В конце XIX века были предприняты попытки обнаружить абсолютное движение тел немеханическими опытами (например, оптическими).

Поводом к тому послужила проблема мирового эфира.

В XVII веке Гюйгенс создал **волновую теорию света**.

Она **основывалась на представлении о существовании** материального светового носителя – **эфира**, заполняющего все пространство и пронизывающего все тела.

В XIX веке Максвелл создал **электромагнитную теорию света**.

Она **основывалась на представлении об электромагнитном эфире** – всепроницающей среде, поперечные колебания которой и есть свет.

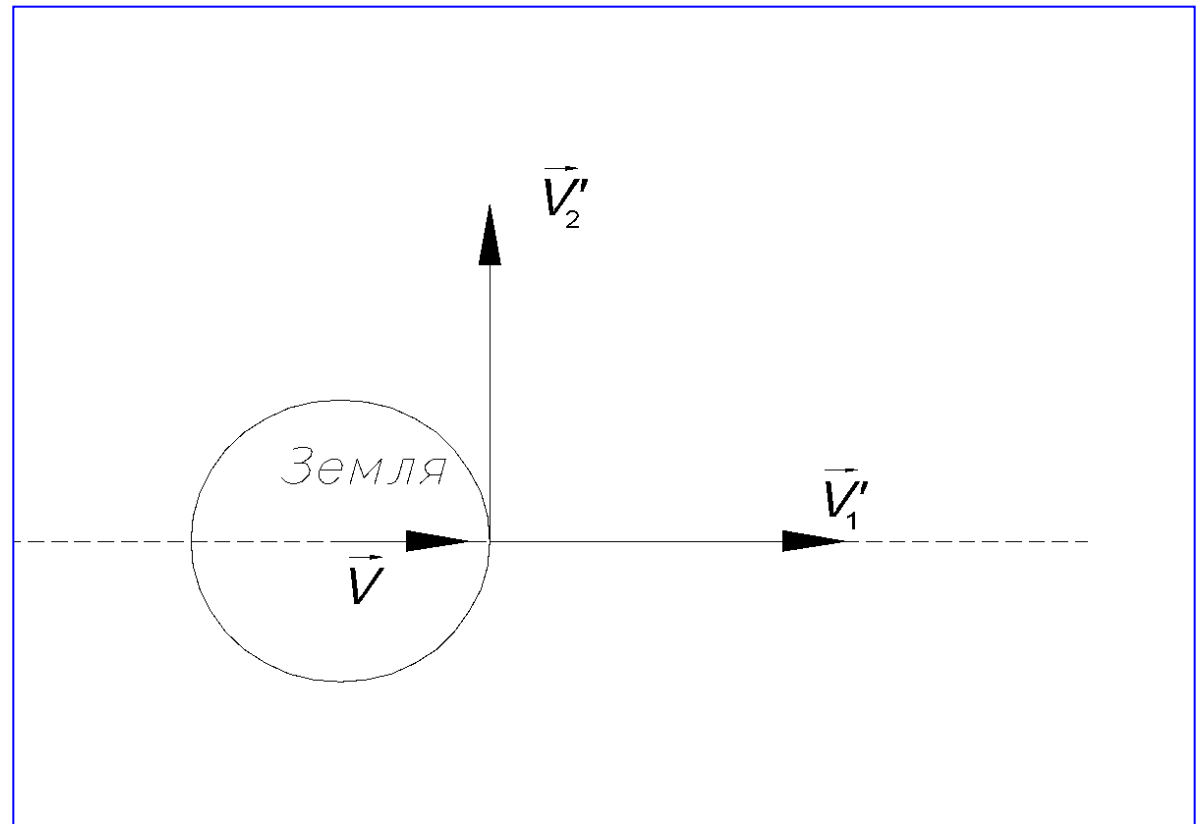


Если существует такой всепроницающий **неподвижный эфир**, то связанная с ним система отсчёта будет особой, привилегированной, абсолютной.

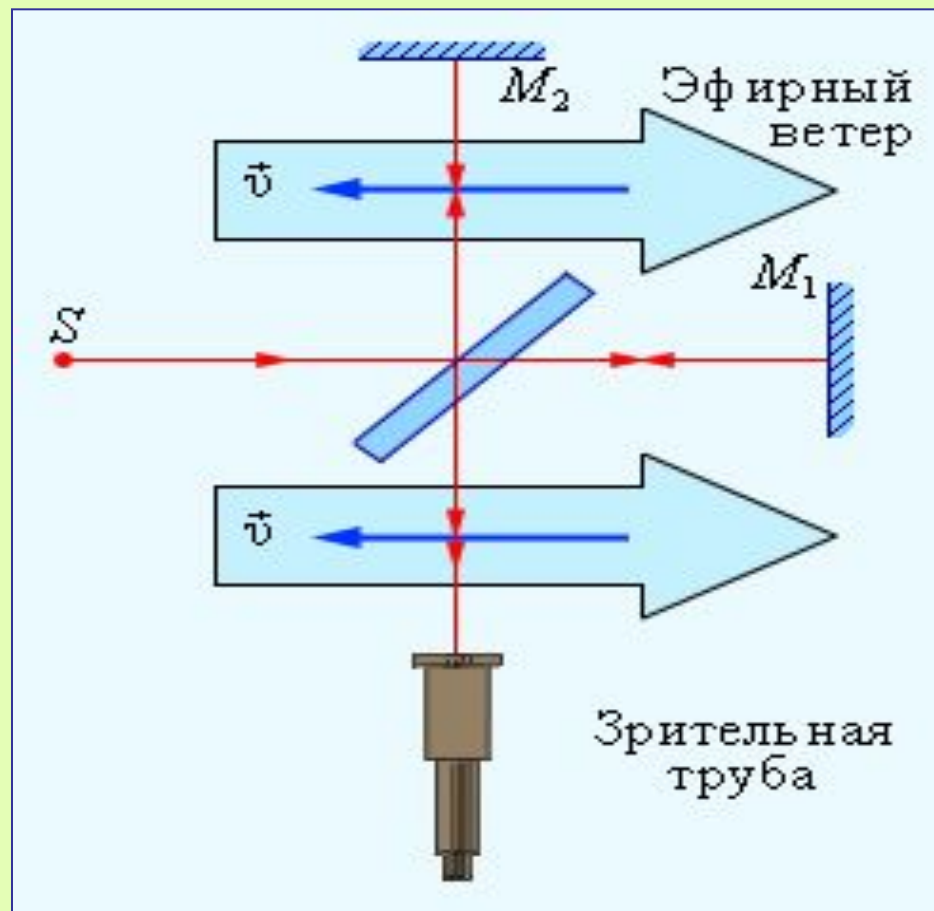
Тогда движение тел относительно эфира – **абсолютное движение**.

А. Майкельсон А. Майкельсон в 1881 году, а затем в 1887 году совместно с Э. Морли (оба – американские физики) пытался обнаружить движение Земли относительно эфира («эфирный ветер») с помощью интерференционного опыта.

Идея их опыта заключалась в следующем: один луч посылался в направлении орбитального движения Земли, **другой – перпендикулярно** к этому направлению.



Упрощенная схема опыта Майкельсона–Морли представлена на рисунке.



В этом опыте одно из плеч интерферометра Майкельсона устанавливалось параллельно направлению орбитальной скорости Земли ( $u = 30 \text{ км/с}$ ).

Затем прибор поворачивался на  $90^\circ$ , и второе плечо оказывалось ориентированным по направлению орбитальной скорости.

Расчеты показывали, что если бы неподвижный эфир существовал, то при повороте прибора интерференционные полосы должны были сместиться на некоторое расстояние.

Определим скорости света (относительно Земли) вдоль этих направлений, исходя из классических представлений.

В направлении орбитального движения Земли источник света относительно эфира движется: скорость света должна быть равна:  $v_1' = c - V$  (так как эфир движется навстречу Земле).

В перпендикулярном к орбите направлении источник света неподвижен: скорость света должна быть равна:  $v_2' = c$ .

Опыт Майкельсона–Морли, неоднократно повторенный впоследствии со все более возрастающей точностью, дал отрицательный результат.

Анализ результатов опыта Майкельсона–Морли позволил сделать вывод о том, что представления об эфире как среде, в которой распространяются световые волны, ошибочно.

Следовательно, для света не существует избранной (абсолютной) системы отсчета.

Опыт показал, что скорости  $v'_1$  и  $v'_2$  **одинаковы.**

Следовательно, **никакого движения Земли относительно эфира не существует.**

Несостоятельными оказались и попытки объяснить результаты опыта **частичным** или **полным увлечением эфира** движущимися телами.

Итак, на рубеже XIX и XX веков физика переживала глубокий кризис.

Объяснить полученные опытные факты, в том числе и результаты опыта Майкельсона, удалось в **1905** году **А. Эйнштейну.**

Пришлось изменить **кардинальным образом** существовавшие до того времени представления о пространстве и времени.

Наиболее важным шагом на этом пути явился пересмотр используемого в классической физике понятия абсолютного времени и пространства.

Многие понятия и величины, которые в нерелятивистской физике считались абсолютными в эйнштейновской теории относительности переведены в разряд относительных.



## 6.3. Постулаты Эйнштейна

Эйнштейн на основе опытных данных сделал следующие выводы:

- **мирового эфира**, т. е. особой среды, которая могла бы служить абсолютной системой отсчета, **не существует.**
- **механический принцип относительности Галилея распространяется на все без исключения физические явления.**

## Первый постулат Эйнштейна:

Никакими физическими опытами, проводимыми внутри инерциальной системы отсчета, невозможно установить, покоится эта система или движется прямолинейно и равномерно.

## Второй постулат Эйнштейна.

### Скорость света в вакууме:

- одинакова во всех инерциальных системах отсчета;
- не зависит от движения источников и приемников света;
- является предельной скоростью передачи информации.

Принцип относительности и принцип постоянства скорости света образует основу **специальной теории относительности (СТО)**, которая представляет собой по существу **физическую теорию пространства и времени**.

## 6.4. Преобразования Лоренца

Для перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой в классической физике использовались преобразования Галилея.

Преобразования Галилея несовместимы со вторым постулатом Эйнштейна.

По второму постулату скорость света во всех инерциальных системах одна и та же, а из преобразований Галилея – разная.

Следовательно, классический закон сложения скоростей несовместим со вторым постулатом.

В классических преобразованиях  $t = t'$ , поэтому события **одновременные** в одной системе отсчета, будут **одновременными** и в любой другой инерциальной системе.

Можно показать, что это не так, если принять **второй постулат** Эйнштейна.

Время в различных системах отсчета течет по-разному.

Необходимы новые преобразования координат и времени, позволяющие переходить от одной системы отсчета к другой.

Преобразованиями Лоренца называются преобразования координат и времени, в основе которых лежат постулаты Эйнштейна.

Из полного равноправия всех инерциальных систем отсчета следует, что **преобразования Лоренца** должны быть **линейными** относительно координат  **$x, y, z, t$**  и  **$x', y', z', t'$** .

**Линейный характер преобразований Галилея и Лоренца** означает, что они должны отличаться только коэффициентом пропорциональности.

В преобразованиях Галилея этот коэффициент равен единице:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}t'$$

В преобразованиях Лоренца же он равен  $\gamma$  :

$$\mathbf{x}' = \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{V}t)$$

$$\mathbf{x} = \gamma(\mathbf{x}' + \mathbf{V}t')$$



Пусть  $X$  и  $X'$  - расстояния, на которое сместится фронт волны вдоль «иксовых» осей в системах  $K$  и  $K'$  :

$$x' = ct' \text{ и } x = ct.$$

Тогда

$$ct' = \gamma(ct - Vt), \quad ct = \gamma(ct' + Vt').$$

Объединим уравнения в систему:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(c - V)t \\ ct = \gamma(c + V)t' \end{cases}$$

Перемножим уравнения между собой: левые и правые части уравнений по отдельности.

$$c^2 t' t = \gamma^2 (c^2 - V^2) t t'$$

Выразим коэффициент  $\gamma$  .

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Получим преобразования координат Лоренца.

переход  $K \rightarrow K'$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

переход  $K' \rightarrow K$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Для рассматриваемого случая координаты:

$$y = y',$$

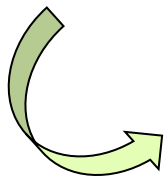
$$z = z'.$$

Получим теперь закон преобразования времени:

Поставим  $x'$  во второе равенство:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - Vt), \\x &= \gamma(x' + Vt').\end{aligned}$$

$$x = \gamma[\gamma(x - Vt) + Vt']$$



$$t' = \gamma \left[ t - \frac{x}{V} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right]$$

Поскольку величина

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

то

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = 1 - \frac{c^2 - V^2}{c^2} = \frac{V^2}{c^2}$$

Окончательно получим уравнение преобразования времени для величины  $t'$ :

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Запишем полученные преобразования времени:

$$K \rightarrow K'$$

$$K' \rightarrow K$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

# Преобразования Лоренца

Запишем преобразования координат и времени:

$$K \rightarrow K'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

$$K' \rightarrow K$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

## Анализ преобразований Лоренца.

1. При  $V \ll c$  преобразования Лоренца переходят, как того требует принцип соответствия, в преобразования Галилея.
2. Из преобразований Лоренца следует, что понятие времени неотделимо от понятия пространства.
3. Пространство и время существуют в неразрывном единстве.



## 6.4. Следствия из преобразований Лоренца

1. Относительность одновременности событий.
2. Относительность длительности событий.
3. Лоренцево сокращение

Относительность длительности событий.

Пусть имеются две инерциальные системы отсчёта  $K$  и  $K'$ .

Система отсчёта  $K$  условно неподвижна, а система  $K'$  движется относительно неё вдоль оси  $X$  с постоянной скоростью  $V$ .

В системе отсчёта  $K'$  происходят два события в точке  $M$ .

В системе  $K'$  координаты этих событий:

$$x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 \text{ и } x'_2, y'_2, z'_2, t'_2.$$

Поскольку оба события происходят в одной и той же точке системы  $K'$  (как говорят – «события покоятся относительно системы  $K'$ »), то

$$x'_1 = x'_2, \quad y'_1 = y'_2, \quad z'_1 = z'_2.$$

Пространственные и временные координаты первого события в системе  $K$  –  $x_1, y_1, z_1, t_1$ ,  
второго события в системе  $K$  –  $x_2, y_2, z_2, t_2$ .

Сравним промежутки времени между событиями в двух системах отсчета  $\Delta t = t_2 - t_1$  и  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ .

Используем преобразования Лоренца  $K' \rightarrow K$ , найденные в предыдущем параграфе.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(при выводе учли, что  $x'_2 = x'_1$ ).

Промежуток времени между событиями  $\Delta t'$ , измеренный в системе отсчета по часам этой системы, называется **собственным временем** и обычно обозначается как  $\Delta t_0$ .

Тогда можно записать

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из полученного соотношения видно, что **собственное время меньше** промежутка времени, измеренного в любой другой системе отсчета:  $\Delta t_0$  меньше  $\Delta t$ .

**Вывод:** длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчёта, относительно которой эта точка неподвижна.

Относительность длительности событий означает:

- ход часов замедляется в системе отсчёта, относительно которой часы движутся.
- Этот вывод СТО находит непосредственное опытное подтверждение.

При исследовании космических лучей в их составе обнаружены **μ-мезоны** – элементарные частицы с массой, примерно в 200 раз превышающей массу электрона.

Эти частицы нестабильны, их среднее собственное время жизни равно  $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  с.

В космических лучах μ-мезоны движутся со скоростью, близкой к скорости света.

Без учета релятивистского эффекта замедления времени они в среднем пролетали бы в атмосфере путь, равный  $c\tau_0 \approx 660$  м.

На самом деле, как показывает опыт, мезоны за время жизни успевают пролетать без распада гораздо большие расстояния.

Согласно СТО, среднее время жизни мезонов по часам земного наблюдателя равно

так как  $\beta = v / c$  близко к единице.

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \gg \tau_0,$$

Поэтому средний путь  $Vt$ , проходимый мезоном в земной системе отсчета, оказывается значительно больше 660 м.

С релятивистским эффектом замедления времени связан так называемый «парадокс близнецов».

Предполагается, что один из близнецов остается на Земле, а второй отправляется в длительное космическое путешествие с субсветовой скоростью.

С точки зрения земного наблюдателя, время в космическом корабле течет медленнее, и когда астронавт возвратится на Землю, он окажется гораздо моложе своего брата-близнеца, оставшегося на Земле.



**Парадокс** заключается в том, что подобное заключение может сделать и второй из близнецов, отправляющийся в космическое путешествие.

Для него медленнее течет время на Земле, и он может ожидать, что по возвращению после длительного путешествия на Землю он обнаружит, что его брат-близнец, оставшийся на Земле, гораздо моложе его.

Чтобы разрешить **«парадокс близнецов»**, следует принять во внимание неравноправие систем отсчета, в которых находятся оба брата-близнеца.

Оставшийся на Земле близнец всё время находится в инерциальной системе отсчета, тогда как система отсчета, связанная с космическим кораблем, принципиально неинерциальная.

Космический корабль испытывает ускорения при разгоне во время старта, при изменении направления движения в дальней точке траектории и при торможении перед посадкой на Землю.

Поэтому заключение брата-астронавта неверно.

СТО предсказывает, что при возвращении на Землю он действительно окажется моложе своего брата, оставшегося на Земле.

Эффекты замедления времени пренебрежимо малы, если скорость космического корабля гораздо меньше скорости света  $c$ .

Тем не менее, удалось получить прямое подтверждение этого эффекта в экспериментах с макроскопическими часами.

Наиболее точные часы – это атомные часы на пучке атомов цезия.

Эти часы «тикают» 9192631770 раз в секунду.

Американские физики в 1971 году провели сравнение двух таких часов, причем одни из них находились в полете вокруг Земли на обычных реактивных лайнерах, а другие оставались на Земле в военно-морской обсерватории США.

В соответствии с предсказаниями СТО, путешествующие на лайнерах часы должны были отстать от находящихся на Земле часов на  $(184 \pm 23) \cdot 10^{-9}$  с.

Наблюдаемое отставание составило  $(203 \pm 10) \cdot 10^{-9}$  с, т. е. в пределах ошибок измерений.

Через несколько лет эксперимент был повторен и дал результат, согласующийся со СТО с точностью 1 %.

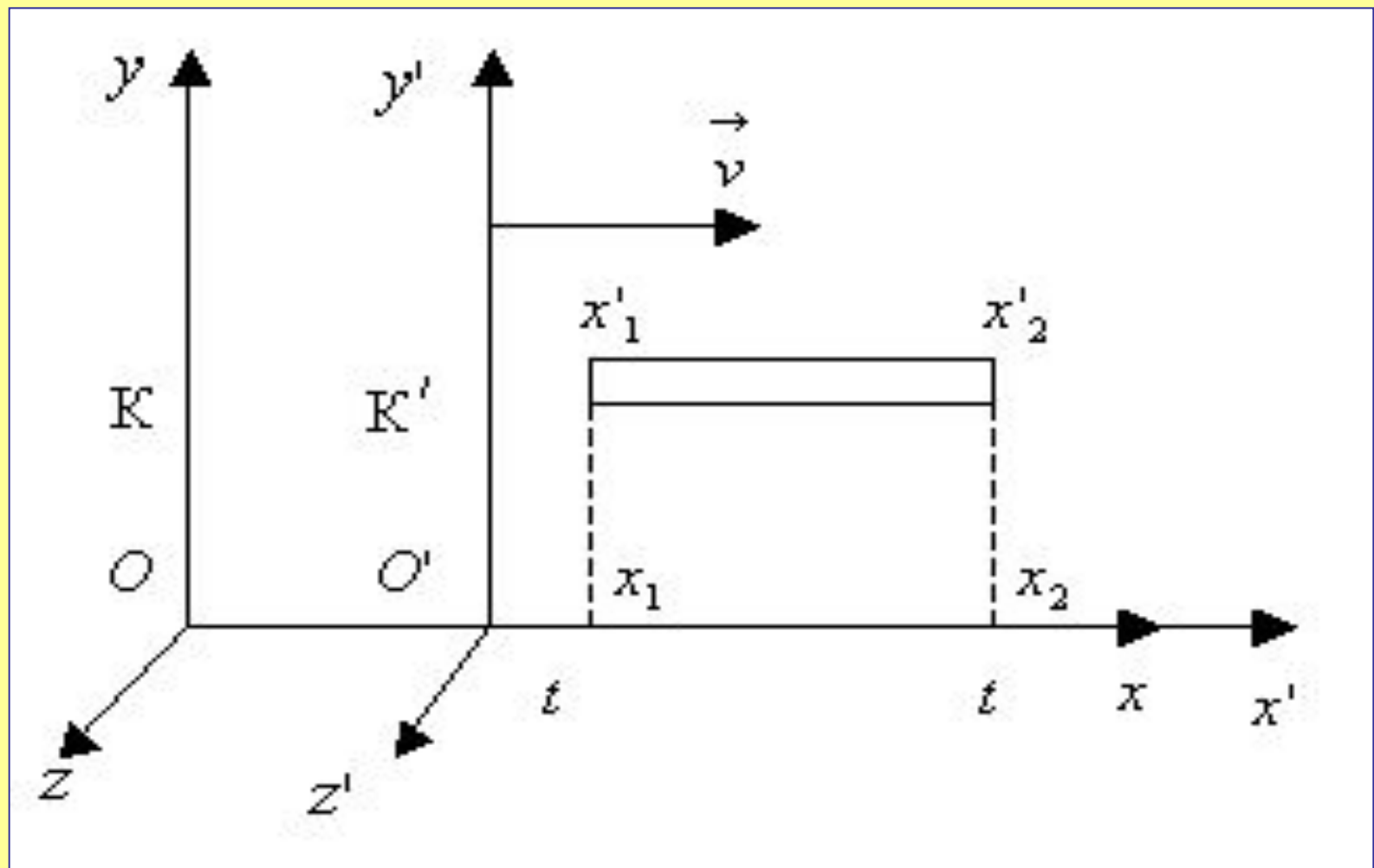
# Сокращение длины

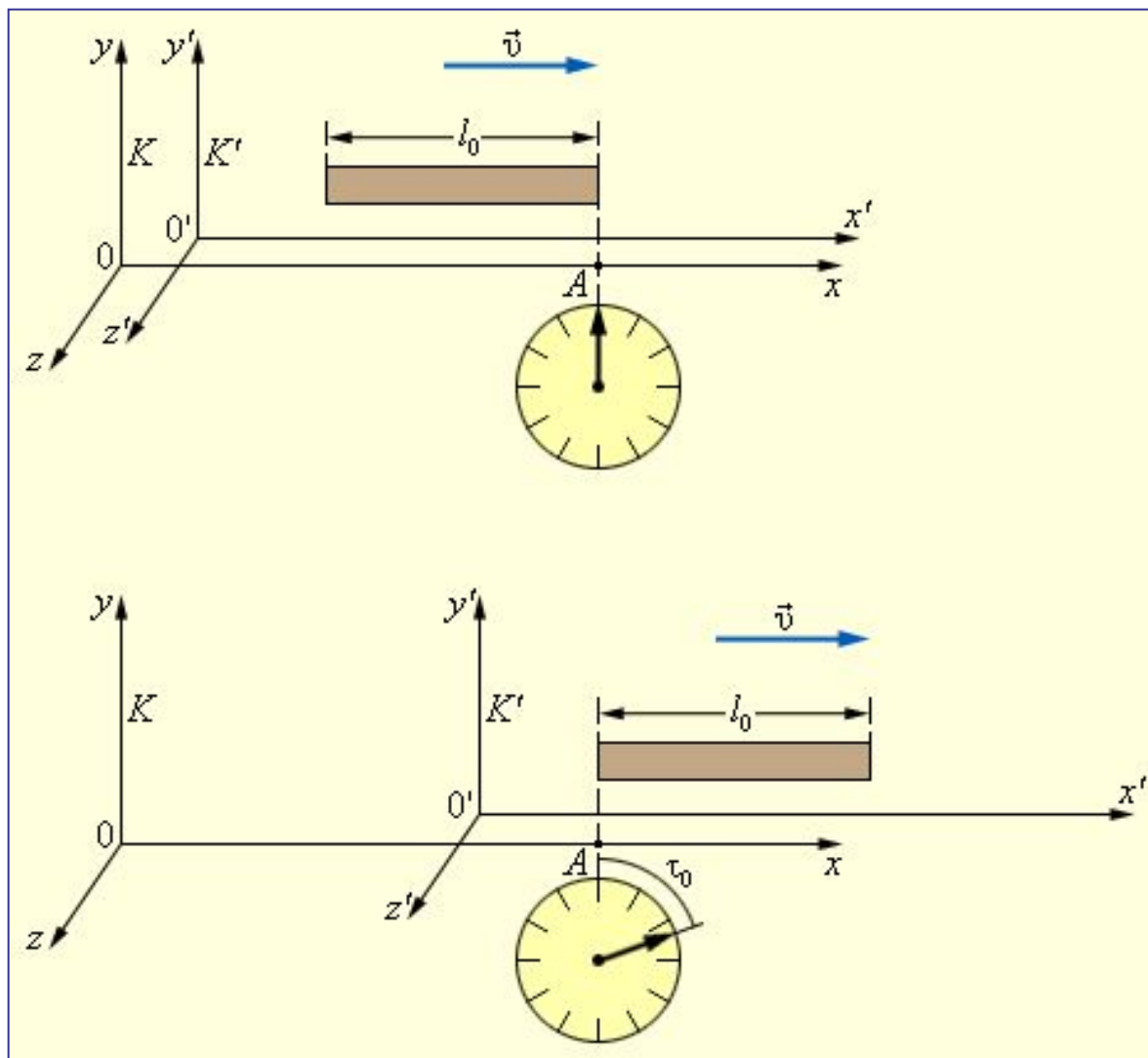
## 3. Лоренцево сокращение

Рассмотрим стержень, расположенный параллельно осям  $X$  и  $X'$ .

Пусть этот стержень покоится в системе  $K'$  и, следовательно, он будет двигаться относительно системы  $K$  со скоростью  $V$ .

Найдём длину стержня в  $K$  и  $K'$ .





Измерить длину неподвижного стержня в  $K'$  просто:  
нужно определить координаты концов стержня  $X$  и  $X'$   
найти их разность:

$$l' = x_2' - x_1'$$

Чтобы определить длину стержня в  $K$  (длину движущегося стержня), нужно:

- 1) в один и тот же момент времени  $t$ , отсчитанный по двум синхронизированным в  $K$  часам, определить координаты  $x_1$  и  $x_2$  концов стержня;
- 2) измерить покоящимся относительно  $K$  масштабом расстояние между этими точками.



Это расстояние (длина движущегося стржня) равно разности координат  $x_2$  и  $x_1$ :

$$l = x_2 - x_1.$$

Из преобразований Лоренца имеем:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

При выводе учитываем, что  $t_2 = t_1 = t$ .

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он покоится, называется собственной длиной.

Тогда, обозначив  $l' = l_0$ , запишем

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$l$  меньше  $l_0$

Отсюда следует, что **собственная длина** является **максимальной**, она больше длины, измеренной в любой другой системе отсчета

При движении тел **изменяются** только **продольные размеры**.

Лоренцево сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения.

**Размеры, перпендикулярные к направлению** движения, **остаются неизменными**.

Рассмотрим два небольших примера.

1. Скорость движения Земли вокруг Солнца равна 30 км/с.

Радиус земного шара 6400 км.

В системе отсчёта, связанной с Солнцем, **сокращение радиуса Земли** составляет всего **3 см**.

2. При скорости тела  $V = 0,85 C$  его продольная длина сокращается в **2 раза**.

**Лоренцево сокращение** длины – эффект чисто кинематический.

Никакими внутренними напряжениями в телах это сокращение не сопровождается.

**Лоренцево сокращение** длины нельзя ни увидеть, ни сфотографировать.

Увидеть – это значит получить световые сигналы, идущие от разных точек тела.

Вследствие того, что разные точки тела удалены от наблюдателя не одинаково, а скорость света конечна, на сетчатку глаза попадают одновременно световые импульсы, испущенные не одновременно.

Это приводит к такому искажению изображения, которое полностью компенсирует лоренцево сокращение.

# Релятивистский закон сложения скоростей

## 3. Релятивистский закон сложения скоростей

В случае движения тел с большими скоростями классический закон сложения скоростей не применим.

Пусть некоторое тело движется вдоль оси  $X$ .

Обозначим скорости этого тела относительно  $K'$  и  $K$  через  $\frac{v}{v}'$  и  $\frac{v}{v}$  .

Проекции скоростей на оси  $X'$  и  $X$  обозначим через  $v_{x'}$  и  $v_x$  (проекции на другие оси равны нулю).

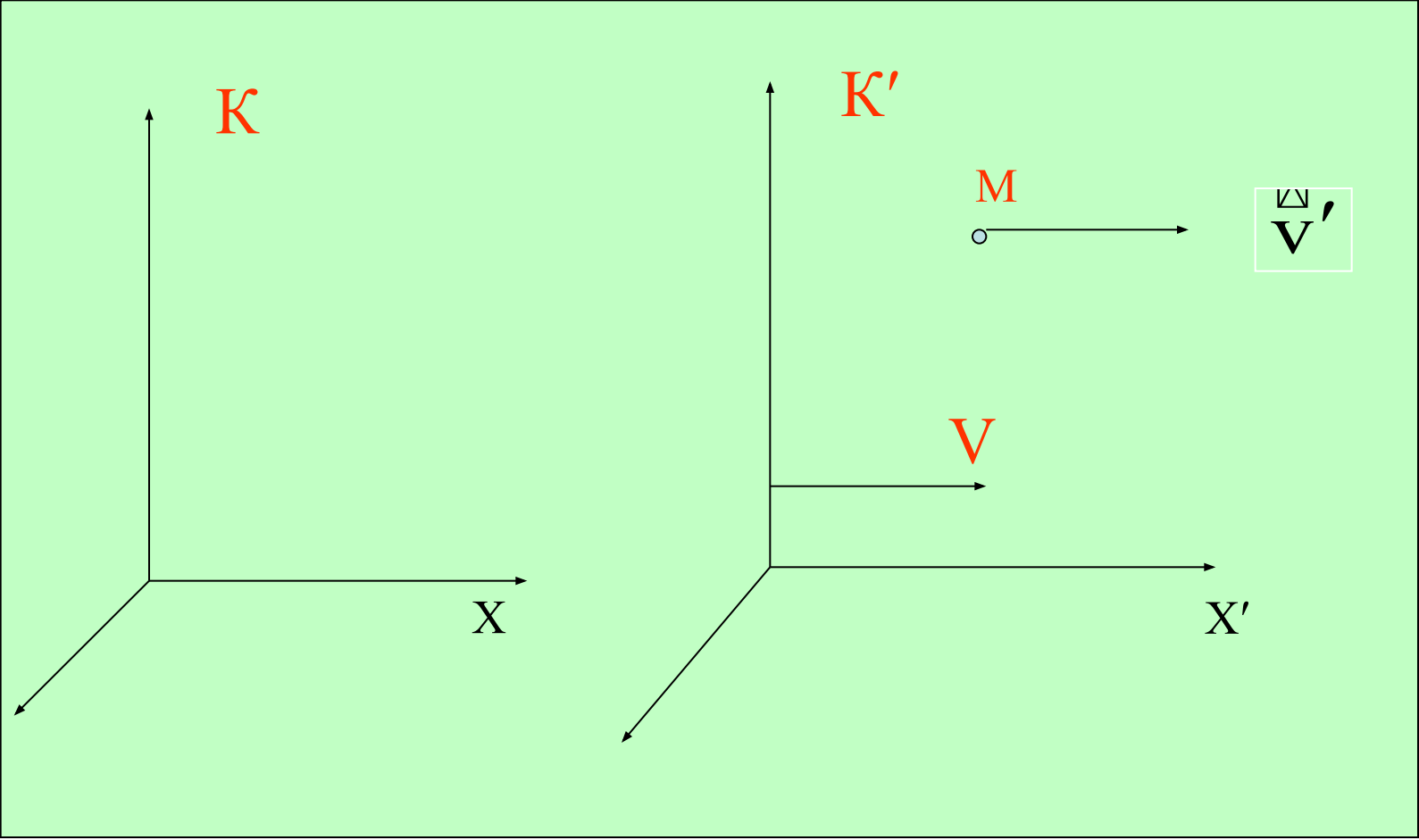
Найдём формулу связи величин  $v_{x'}$  и  $v_x$ .

По определению:

$$v_{x'} = \frac{dx'}{dt'}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$





Из преобразований Лоренца следует:

$$dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{V}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Разделим уравнения друг на друга и получим

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2} dx}.$$

Поделим на dt числитель и знаменатель дроби:

$$v'_x = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}}.$$

Но

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

, следовательно:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}.$$

Для обратного перехода от системы  $K'$  в систему  $K$  можно легко получить проекцию скорости точки на ось  $X$ :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}$$

Две последние формулы выражают **релятивистский закон сложения скоростей**.

Удовлетворяют ли полученные формулы второму постулату Эйнштейна?

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Свет распространяется в  $K'$ :  $v'_x = c$ .

Найдем скорость света относительно  $K$ :  $v_x = ?$

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = c$$

Таким образом, свет в любой системе отсчета распределяется со скоростью  $c$ .

2. Две частицы движутся **навстречу** друг другу со скоростями  $V_1 = 0,8 C$  и  $V_2 = 0,7 C$ . Какова относительная скорость движения частиц?

С точки зрения классической физики она равна  $1,5 C$ .

Свяжем со скоростью  $V_1$  неподвижную систему отсчёта .

Тогда, используя формулу релятивистского закона сложения скоростей, получим

$$V_{\text{отн}} = \frac{0,8C + 0,7C}{1 + \frac{0,8C \cdot 0,7C}{C^2}} = \frac{1,5 \cdot C}{1,56} = 0,98C$$

## 6.7. Интервал

Следствия из преобразований Лоренца показали, что привычно неизменные величины (такие, как размеры тел или длительность событий) оказываются **относительными**.

Это является отражением факта **неразрывного единства** пространства и времени.

Для описания окружающего нас мира необходимо ввести некое новое **четырёхмерное пространство**, элементами которого будут являться не материальные точки (тела), а **события**.

Какое-либо событие можно охарактеризовать местом, где оно произошло (координатами  $x, y, z$ ), и временем  $t$ , когда оно произошло.

Таким образом, событию можно сопоставить 4 числа  $x, y, z, t$ .

Введем воображаемое **четырёхмерное пространство**, на координатных осях которого будем откладывать пространственные координаты и время.

В этом пространстве **событие** изобразится **точкой**, которую принято называть **мировой точкой**.



Пусть одно событие имеет координаты  $x_1, y_1, z_1, t_1$ , и другое –  $x_2, y_2, z_2, t_2$ .

Величину

$$\Delta S = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

называют **интервалом между этими событиями**.

Выражение

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

– означает **расстояние** между точками обычного **трехмерного пространства**, в которых произошли оба события.

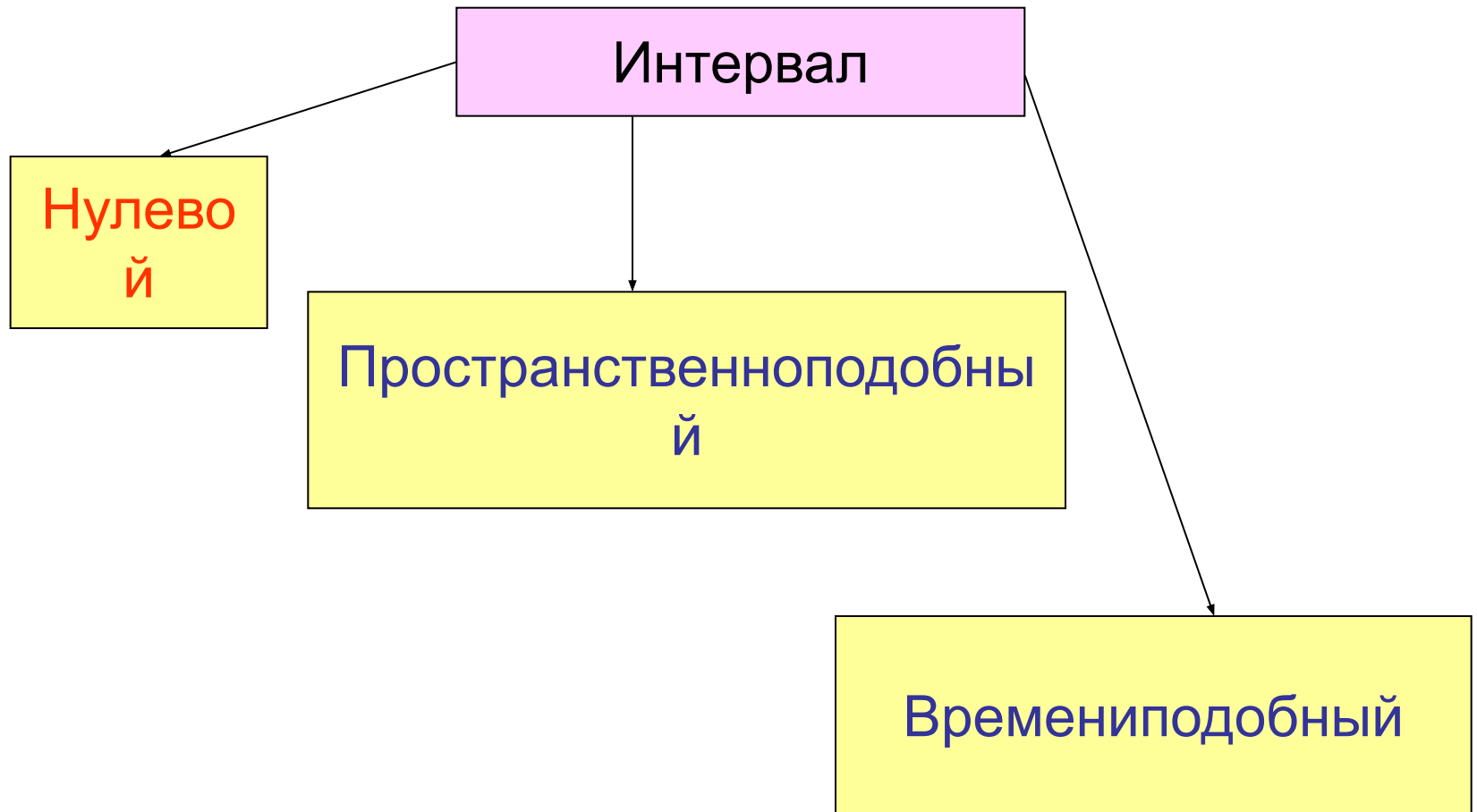
Обозначим также  $t_2 - t_1 = \Delta t$ , тогда выражение для интервала можно записать короче в виде

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l^2}$$

Далее можно убедиться, что **величина интервала** между двумя событиями оказывается **одинаковой** во всех инерциальных системах отсчёта.

Он является величиной **инвариантной** по отношению к инерциальным системам отсчёта.

Пространственно-временные интервалы бывают 3-х видов.



Пусть **первое событие** заключается в том, что из точки с координатами  $x_1, y_1, z_1$  отправлен в момент времени  $t_1$  световой сигнал.

**Вторым событием** является прием этого сигнала в точке  $x_2, y_2, z_2$  в момент времени  $t_2$ .

Свет распространяется со скоростью  $C$ , следовательно:  
 $l = ct$ .

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l^2}$$

Отсюда следует, что **интервал** между событиями в этом случае является **нулевым**.

$$\Delta S = 0$$

Если расстояние  $l$  между точками, в которых произошли два события, превышает  $ct$  ( $l > ct$ ), то интервал называется **пространственноподобным**.

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l^2}$$

Интервал  $S$  в этом случае является **мнимым**:  $\Delta S \boxtimes 0$

Рассматриваемые **события** никак **не могут оказать влияние** друг на друга.

Эти **события не могут быть** причинно связанными друг с другом.

События, разделенные пространственноподобными интервалами (  $\Delta S \geq 0$  ) являются **абсолютно удаленными**.

Ни в одной системе отсчета эти **события не могут быть пространственно совмещены**.

Но всегда можно найти такую систему отсчета, в которой **события происходят одновременно** ( $t = 0$ ).

Вещественные интервалы, для которых величина  $\Delta S \neq 0$  называются **времениподобными**.

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l^2}$$

Для таких интервалов выполняется условие:  $l < ct$ .

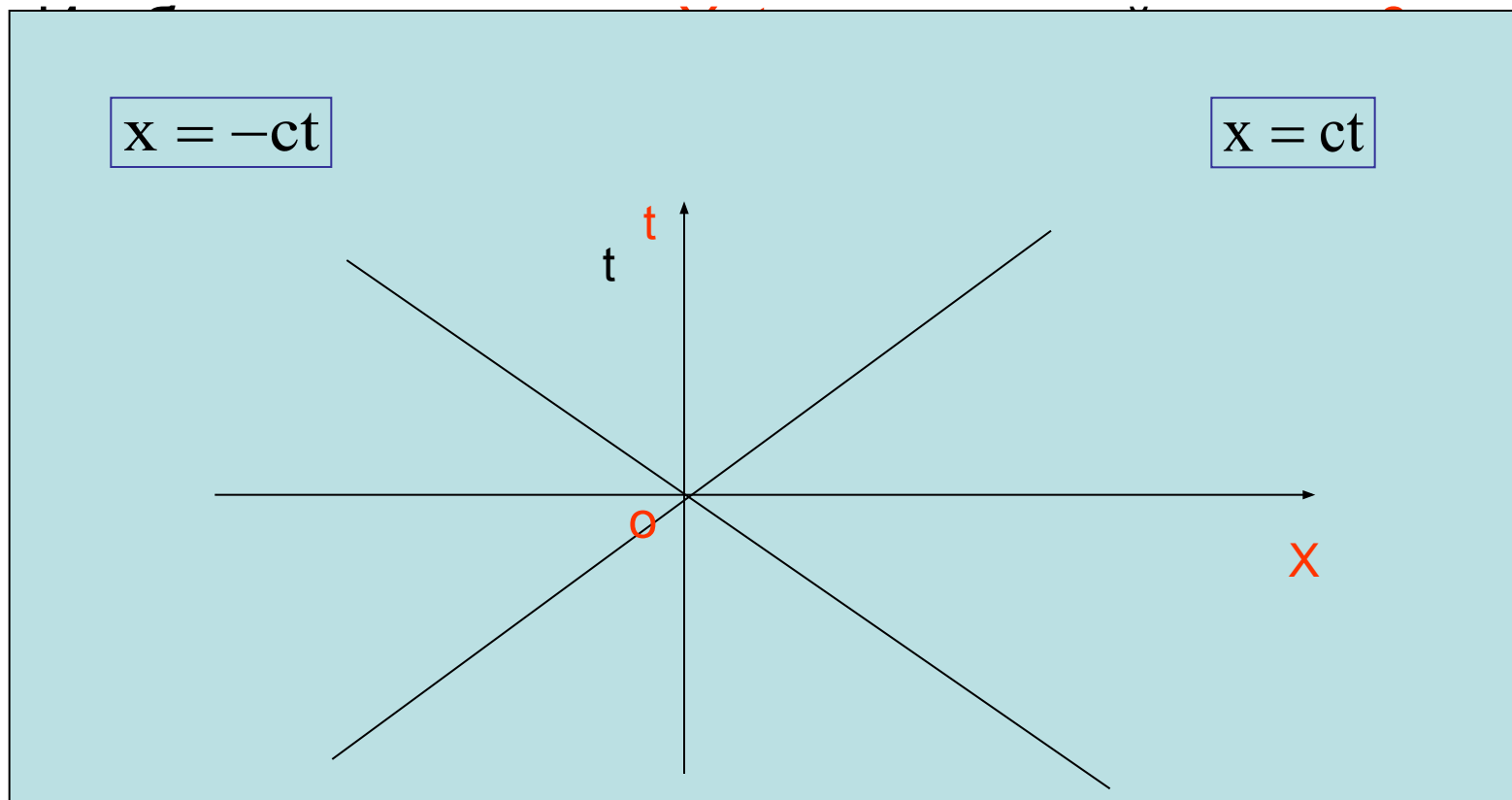
События, разделенные **времениподобными интервалами**, могут быть **причинно связаны друг с другом**.

Для таких **событий не существует** системы отсчета, в которой они происходили бы **одновременно**.

Имеется **система отсчета**, в которой они происходят **в одной и той же точке пространства** ( $l = 0$ ).

Возьмём **мировую точку**  $O$  некоторого события за начало отсчета времени и координат.

Проведём в четырехмерном пространстве через эту точку взаимно перпендикулярные оси  $X, Y, Z, t$ .





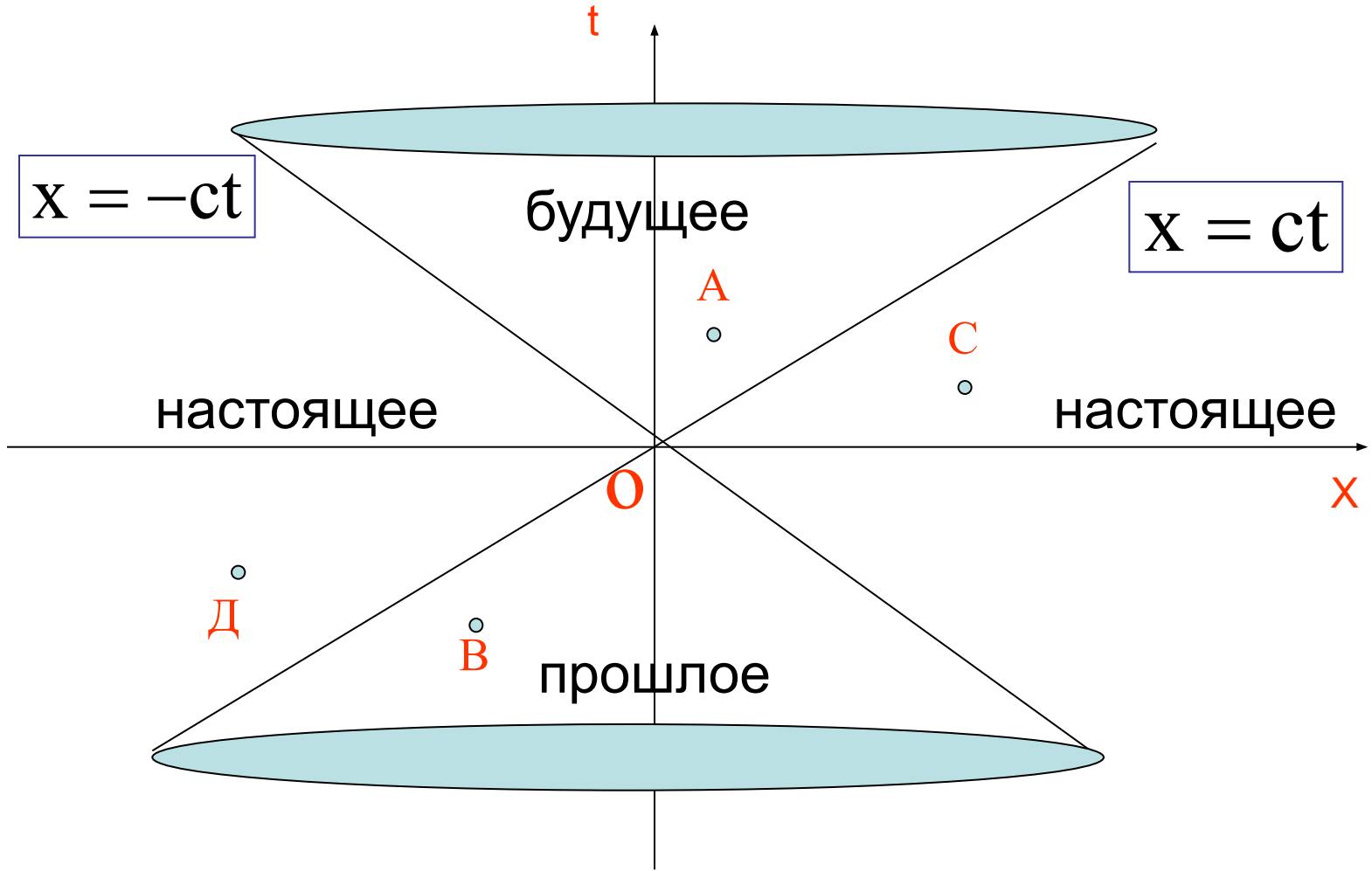
Движение частицы со скоростью  $C$ , происходящее вдоль оси  $X$ , изобразится на рисунке прямыми

$$x = ct.$$

Реальная скорость частицы не может превышать  $C$ .

В четырехмерном пространстве **область**, в которой лежат мировые линии всех частиц, проходящих при движении через точку  $O$ , **представляет собой конус**, осью которого является ось  $t$ .

Образующие конуса представляют собой **мировые линии** световых сигналов, поэтому его называют **СВЕТОВЫМ КОНУСОМ**.



Для любой точки  $A$ , лежащей в области, названной на рисунке абсолютным будущим,  $(\Delta S)^2 > 0$ .

Интервал в этом случае является времениподобным и

$$\Delta t = t_{OA} > 0.$$

Как мы знаем, ни в одной системе отсчета не может стать  $t = 0$ , значит, не может быть и  $t < 0$ .

Во всех системах событие  $A$  будет происходить после события  $O$ .

Для любой точки В, лежащей в области абсолютного  
прошлого

$$(\Delta S)^2 > 0, \quad \text{но} \quad \Delta t = t_{OB} < 0.$$

Это значит, что во всех системах отсчета событие В  
предшествует событию О.

Для любого из событий **C** и **D**, мировая точка которого лежит в абсолютно удаленных областях,

$$(\Delta S)^2 < 0.$$

Интервалы  $\Delta S_{OC}$  и  $\Delta S_{OD}$  – мнимые и поэтому являются пространственноподобными.

В любой системе отсчета события **O** и **C** или **O** и **D** происходят в разных точках пространства.

Понятие одновременности для событий  $O$  и  $C$ , и событий  $O$  и  $D$  является **относительным**.

В одних системах отсчета событие  $C$  (или  $D$ ) происходят **позже**, в других – **раньше** события  $O$ .

Наконец, имеется **одна система отсчета**, в которой событие  $C$  (и **одна**, в которой событие  $D$ ) происходит **одновременно** с событием  $O$ .

## 6.7. Релятивистская динамика

Первый закон Ньютона **инвариантен** относительно преобразований Лоренца.

Действительно, если тело движется без ускорения в  $K'$  ( $v' = \text{const}$ ), то его скорость, как это следует из закона сложения скоростей, останется неизменной и в  $K$ .

Второй закон Ньютона оказывается **не инвариантен** относительно преобразований Лоренца, если полагать массу постоянной .

Эйнштейн показал, что **масса является функцией** не только внутренних свойств тел, но и **скорости** их движения.

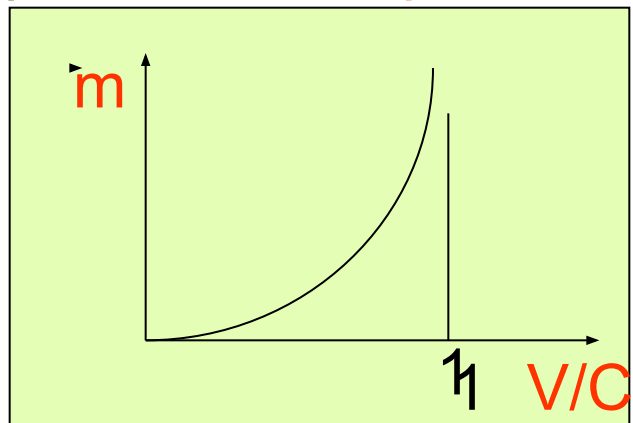
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- $m_0$  – масса покоящегося тела (**масса покоя**),  
 $m$  – масса движущегося тела;  
 $v$  – скорость тела относительно неподвижной системы.

С увеличением скорости движения масса возрастает по сложному закону.



При  $v \rightarrow c$   $m \rightarrow \infty$ , т.е. инерция (релятивистская масса) тела беспредельно возрастает.



Чтобы сообщить такому телу отличное от нуля ускорение, к нему надо приложить бесконечно большую силу.

Между тем, любое реальное воздействие конечно.

Ни одному телу, **обладающему массой покоя** , не может быть сообщена скорость, равная  **$c$** .

Со скоростью  **$c$**  могут двигаться лишь частицы, не имеющие массы покоя ( $m_0 = 0$ ).

К таким частицам относятся **фотоны и нейтрино**, которые во всех инерциальных системах отсчета движутся со скоростью  **$c$** .

В основу своей теории Эйнштейн положил требования выполнимости закона сохранения импульса и закона сохранения энергии в замкнутых системах.

Для того, чтобы закон сохранения импульса выполнялся во всех инерциальных системах отсчета, оказалось необходимым изменить определение импульса тела.

Вместо классического импульса

в СТО **релятивистский импульс** движущегося со скоростью  $V$

$$\vec{P} = m_0 \vec{v}$$

тела с массой  $m$ , записывается в виде:

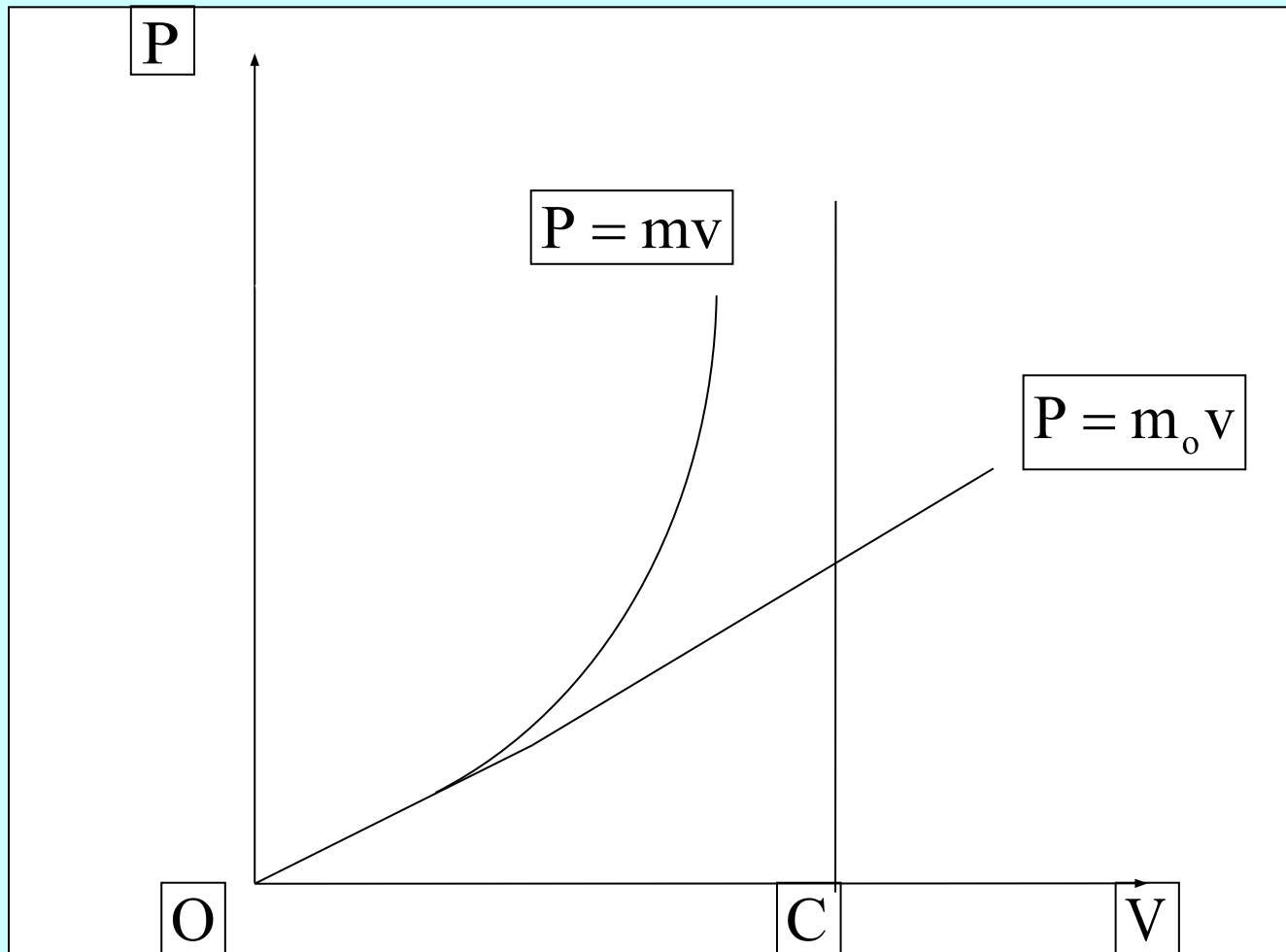
Релятивистский импульс запишется в виде:

$$\vec{P} = m v = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Отметим, что при  $v \ll c$  выражение для импульса переходит в классическое:

$$\vec{P} = m_0 \vec{v}$$

# Зависимость релятивистского импульса от скорости.



Так второй закон Ньютона будет ковариантен относительно преобразований Лоренца, если его записать только через релятивистский импульс в форме:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

## 6.8. Взаимосвязь массы и энергии

Одним из важнейших открытий теории относительности явилась установленная Эйнштейном **взаимосвязь между массой и энергией**.

Рассмотрим некоторое тело, которое первоначально покоилось, а затем под действием внешних сил приобрело релятивистскую (близкую к  **$c$** ) скорость  **$v$** .

При этом его кинетическая энергия увеличилась от нуля до значения  $E_k$ , а масса возросла от  **$m_0$**  до  **$m$** .

Согласно общим принципам механики, **приращение кинетической энергии** тела равно суммарной работе **всех сил**, действующих на тело.

В дифференциальной форме данное утверждение можно записать:

$$dE_K = dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Подставим сюда **выражение для силы** из второго закона

Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$



Получим

$$\begin{aligned}dE_K &= m \left( \frac{dv}{dt} dr \right) + \left( v \frac{dm}{dt} dr \right) = \\&= m \left( dv \frac{dr}{dt} \right) + \left( v dm \frac{dr}{dt} \right) = m (v dv) + v^2 dm = \\&= mv dv + v^2 dm\end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое. Для этого найдем  $dm$ .

Найдем  $dm$ , учитывая, что

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Продифференцируем вышенаписанную формулу.

$$dm = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) m_0 \left(-\frac{2v}{c^2}\right) dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2} = \frac{m v dv}{c^2 - v^2}$$

Отсюда величина

$$m v dv = (c^2 - v^2) dm$$

Подставим полученное выражение вместо первого слагаемого в формулу для  $dE_K$ .

$$dE_K = (c^2 - v^2)dm + v^2 dm = c^2 dm$$

Проинтегрируем полученное равенство

$$\int_0^{E_K} dE_K = \int_{m_0}^m c^2 dm$$

и получим

$$E_K = mc^2 - m_0 c^2$$

Величина  $E$  получила название **полной энергии**:

$$E = mc^2$$

Величина  $E_0$  – **энергии покоя**:

$$E_0 = m_0 c^2$$

Формула

$$E = mc^2$$

выражает **закон**

**взаимосвязи массы и энергии**: **полная энергия материального объекта равна произведению его релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме.**

Заметим, что в **полную энергию и энергию покоя не входит потенциальная энергия**, которой обладает тело во внешнем потенциальном поле.

# Связь энергии с импульсом

В классической механике **кинетическая энергия** через импульс выражается формулой

$$E_{\text{к}} = \frac{p^2}{2m}$$

Формула, выражающую связь между **полной энергией частицы** с её релятивистским **импульсом**, имеет вид

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2,$$

причём выражение  $E^2 - (pc)^2$  является величиной **инвариантной**.

Полученное соотношение показывает, что частица может иметь энергию и импульс, но не иметь массы покоя ( $m_0 = 0$ ).

Такие частицы называются **безмассовыми**.

К безмассовым частицам относятся фотоны**фотоны** – кванты электромагнитного излучения и, возможно, нейтрино.

Безмассовые частицы не могут существовать в состоянии покоя, во всех инерциальных системах отсчёта они движутся с предельной скоростью  $C$ .

# Кинетическая энергия

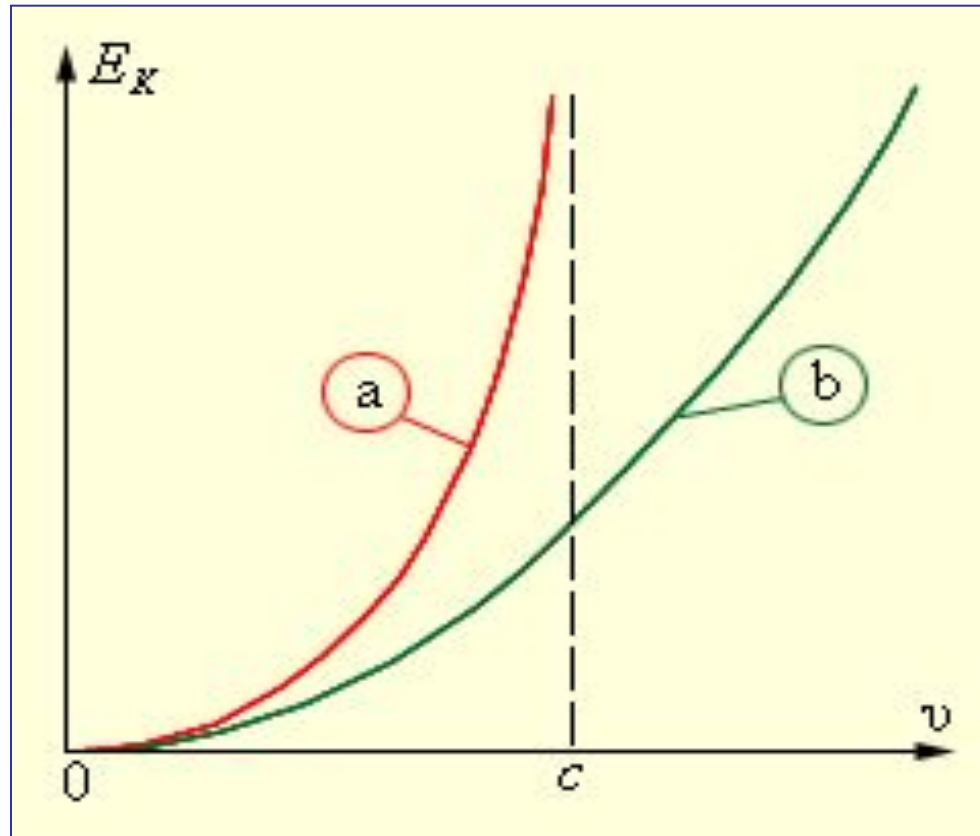
В классической механике кинетическая энергия определяется формулой:

$$E_{\text{к}} = \frac{m_0 V^2}{2}$$

В релятивистской механике кинетическая энергия равна разности между полной энергией тела и его энергией покоя.

$$E_{\text{к}} = E - E_0$$

Зависимость кинетической энергии от скорости для релятивистской (а) и классической (b) частиц. При  $V \ll C$  оба закона совпадают.





Докажем, что классическая формула кинетической энергии является частным случаем формулы теории относительности.

$$E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Разложим функцию  $\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  в приближении  $V/c \ll 1$  в ряд и ограничимся первым слагаемым этого ряда. В итоге получим:

$$\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{V^4}{c^4}$$

$$\downarrow$$
$$E_K = \frac{m_0 V^2}{2}$$

# Закон взаимосвязи массы и энергии

Всякое изменение массы тела на величину  $\Delta m$  сопровождается изменением его **полной энергии** на величину

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

Наоборот, всякое изменение полной энергии тела на величину  $\Delta E$  сопровождается изменением его **массы** на величину

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

Закон пропорциональности массы и энергии является одним из самых важных выводов СТО.

Нельзя, однако, представлять, что масса превращается в энергию и наоборот.

Просто любой материальный объект обладает и массой и энергией, которые пропорциональны друг другу.

Не может быть массы без энергии, как не может быть материи без движения.

Масса и энергия характеризуют разные свойства материи, поэтому ни о каком их взаимном превращении не может быть и речи.

Масса тела характеризует его инертность, а также способность тела вступать в гравитационное взаимодействие с другими телами.

Важнейшим свойством энергии является ее способность превращаться из одной формы в другую в эквивалентных количествах при различных физических процессах – в этом заключается содержание закона сохранения энергии.

Пропорциональность массы и энергии является выражением внутренней сущности материи.

Первое экспериментальное подтверждение правильности соотношения Эйнштейна, связывающего массу и энергию, было получено при сравнении энергии, высвобождающейся при радиоактивном распаде, с разностью масс исходного ядра и конечных продуктов.

Например, при бета-распаде свободного нейтрона появляется протон. Например, при бета-распаде свободного нейтрона появляется протон, электрон. Например, при бета-распаде свободного нейтрона появляется протон, электрон и еще одна частица с нулевой массой – антинейтрино:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$$

При этом суммарная кинетическая энергия конечных продуктов равна  $1,25 \cdot 10^{-13}$  Дж.

Масса нейтрона превышает суммарную массу протона и электрона на  $\Delta m = 13,9 \cdot 10^{-31}$  кг.

Такому уменьшению массы должна соответствовать энергия  $\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 1,25 \cdot 10^{-13}$  Дж, равная наблюдаемой кинетической энергии продуктов распада.

# Инварианты релятивистской механики

В заключение конкретизируем, что в специальной теории относительности инвариантными величинами являются:

- скорость света в вакууме;
- масса покоя;
- пространственно – временной интервал между событиями в четырёхмерном пространстве;
- величина  $E^2 - (pc)^2$ .

# Заключение

Мы рассмотрели некоторые вопросы **специальной теории относительности**.

В заключение отметим, что её **главное значение** состоит в том, что она

1. **разрушила** представления классической физики об абсолютном характере пространства и времени,
2. **установила** их относительный характер,
3. **открыла** неразрывную связь между ними.
4. **не нарушила принцип причинности** и порядок следования причинно-следственных событий во всех инерциальных системах отсчета.

**Пространство и время образуют единую форму существования материи.**



Оценивая значение теории относительности, не следует, однако, впадать в **философский релятивизм** (всё в мире относительно).

**Теория относительности** отнюдь **не отрицает** существование абсолютных величин и понятий.

Она устанавливает лишь то, что **ряд понятий и величин**, считавшихся в классической физике абсолютными, **в действительности** являются **относительными**.

Не следует думать, что с появлением теории относительности **классическая физика** полностью утратила своё значение.

**Релятивистские эффекты** для **обычных макроскопических тел** и **обычных скоростей** движения **столь незначительны**, что оказываются далеко за пределами практической точности.

Поэтому в большинстве отраслей техники **классическая физика применима столь же хорошо**, как и прежде.