



**Вычисление пределов  
функции. Предел функции на  
бесконечности.**

**Два замечательных предела.  
Вычисление числа «e».  
(практическое занятие)**

Автор: преподаватель  
ГПОУ ТО «НПК»  
Гусева Л. Г.

## Цель занятия:

Повторить, обобщить и систематизировать знания по теме «Вычисление пределов функции» и отработать их применение на практике

# Задачи:

## Обучающие:

- ознакомление студентов с общей схемой вычисления пределов функции на основе обобщения ранее изученного материала;
- разобрать различные примеры задач на определение пределов функции, охватывающие все подтемы данной темы;
- закрепление навыков нахождения пределов функций при решении задач

## Развивающие:

- формирование самостоятельности мышления, мыслительных операций: сравнение, анализ, обобщение;
- формирование навыков самостоятельной работы;
- умение обобщать, абстрагировать и конкретизировать знания при определении предела функции.

## Воспитательны е:

воспитание умения контролировать свою деятельность и оценивать её;

воспитание познавательной активности, культуры общения.

## Ход урока:

1. Организационный момент
2. Проверка домашнего задания
3. Повторение опорных знаний
4. Изучение нового материала
5. Актуализация знаний
6. Домашнее задание
7. Итоги урока. Рефлексия

# Проверка домашнего задания

Вычислите пределы:

1 вариант

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{2x - 8}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$$

2 вариант

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5)$$

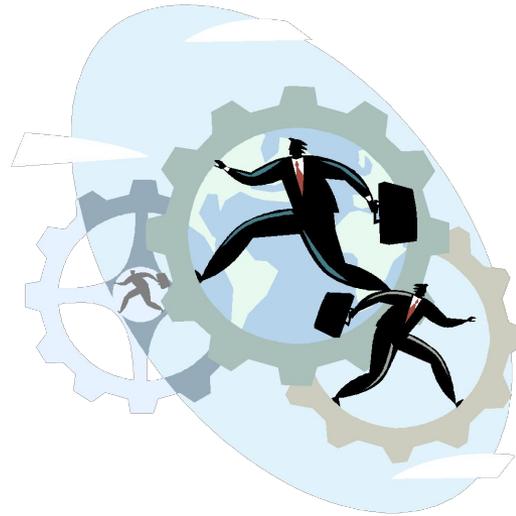
$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{5x}$$

# Проверка домашнего задания

ОТВЕТЫ:

1)  $-1,2$ ;  $0,4$ ;  $-\sqrt{5}$



2)  $25$ ,  $4/3$ ,  $1/5\sqrt{2}$

# Повторение опорных знаний

- Что называют пределом функции в точке?
- Записать определение непрерывности функции.
- Сформулируйте основные теоремы о пределах.
- Какие способы вычисления пределов вы знаете?

# Повторение опорных знаний

**Определение предела.** Число  $b$  – предел функции  $f(x)$  при  $x$  стремящемся к  $a$ , если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x$ , отличных от  $a$  и удовлетворяющих неравенству  $|x-a|<\delta$ , имеет место неравенство  $|f(x)-b|<\varepsilon$ .

Если  $b$  есть предел функции  $f(x)$  при  $x$  стремящемся к  $a$ , то записывают это так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

# Повторение опорных знаний

## Основные теоремы о пределах:

**ТЕОРЕМА 1.** Предел суммы двух функций при  $x$  стремящемся к  $a$  равен сумме пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

**ТЕОРЕМА 2.** Предел произведения двух функций при  $x$  стремящемся к  $a$  равен произведению пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

**ТЕОРЕМА 3.** Предел частного двух функций при  $x$  стремящемся к  $a$  равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{если } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

и равен плюс (минус) бесконечности, если предел знаменателя  $0$ , а предел числителя конечен и отличен от нуля.

# Повторение опорных знаний

Способы вычисления пределов:

- 1) Непосредственной подстановкой
- 2) Разложение числителя и знаменателя на множители и сокращение дроби
- 3) Домножение на сопряженные с целью избавления от иррациональности

# Изучение нового материала

Предел на бесконечности:

Число  $A$  называется пределом функции  $y=f(x)$  на бесконечности (или при  $x$ , стремящимся к бесконечности), если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента  $x$  соответствующие значения функции  $f(x)$  сколь угодно мало отличаются от числа  $A$ .

# Изучение нового материала

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+5} = \frac{3}{\infty} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 5x - 1) = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменной:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{3 - \frac{5}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty} + \frac{3}{\infty}} = \\ &= \frac{3 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 3 \end{aligned}$$

# Изучение нового материала

## Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел равен

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

# Изучение нового материала

## Использование замечательных пределов

### Первый замечательный предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

### Второй замечательный предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \left( 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) \cdot e \cdot e = (1 + 0) \cdot e^2 = e^2.\end{aligned}$$

# Изучение нового материала

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Rx}{x} = R \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Rx}{Rx} = R$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^6 = e^6$$

# Актуализация знаний

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{4x+1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^3 - 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 3x^2)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg}x}{x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 17x}{8x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)^x$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{3x} \right)^x$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3+x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

# Задание на дом

Вычислите пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^{2x}$$

# Рефлексия

Сегодня я узнал ...

Было трудно ...

Было интересно ...

Я понял, что...

Теперь я могу ...

Я попробую ...

Я научился ...

Меня заинтересовало ...

Меня удивило ...