

4

Комплексные числа:

- *определение;*
- *геометрическое изображение комплексного числа;*
- *формы записи комплексного числа;*
- *операции над комплексными числами.*

Решить уравнение: $z^2 - 2z + 10 = 0$

Решение:

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

Обозначим $\sqrt{-1} = i$ – мнимая единица $\rightarrow i^2 = -1$

$$i^3 = -i; \quad i^4 = 1; \quad i^5 = i \text{ и т.д.}$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = \frac{2(1 \pm 3i)}{2} = 1 \pm 3i$$

Определение.

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy$$

где x, y - действительные числа, i — мнимая единица. Число x — действительная часть комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re}(z)$, а y — мнимая часть и обозначается $\operatorname{Im}(z)$, т.е.

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z.$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа

1. Два комплексных числа

$z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если

$$x_1 = x_2; y_1 = y_2$$

2. $z = 0$, если $x=0$; $y=0$

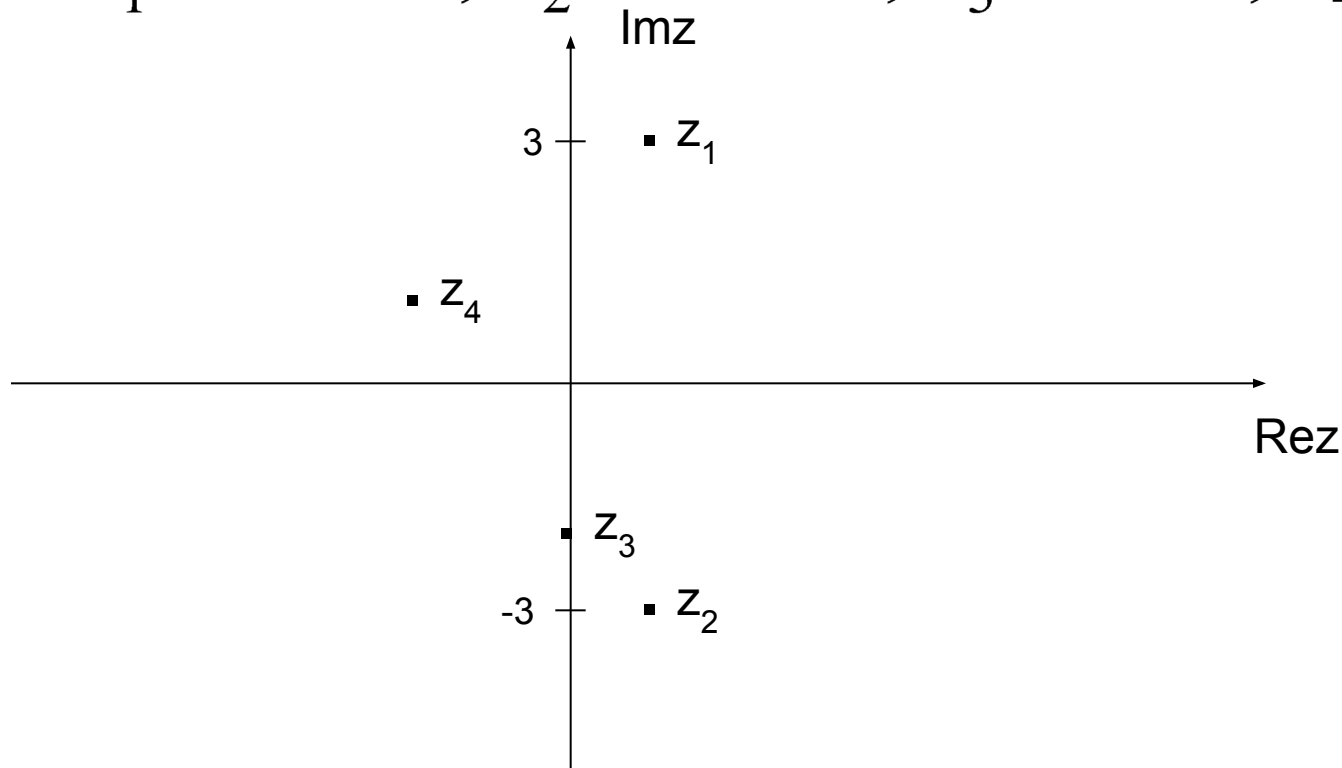
3. Если $y=0$, то $z \in R$.

4. Числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_1 - iy_1$ называются сопряженными и обозначаются z и \bar{z}

Такая форма записи комплексного числа называется алгебраической.

Изображается комплексное число точкой на комплексной плоскости.

$$z_1 = 1 + 3i, z_2 = 1 - 3i, z_3 = -2i, z_4 = -2 + i$$



Геометрическое изображение комплексного числа

Для геометрического представления комплексных чисел служат точки координатной плоскости OXY .

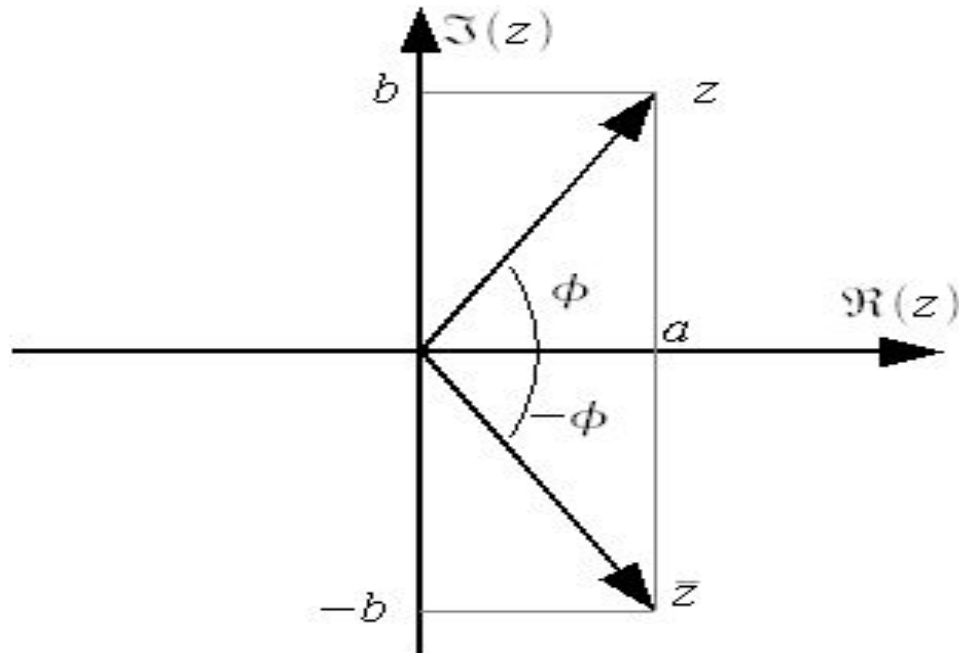
Плоскость называется комплексной, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка плоскости $z(x; y)$, причем это соответствие взаимно однозначно.

Оси OX и OY , на которых расположены действительные числа

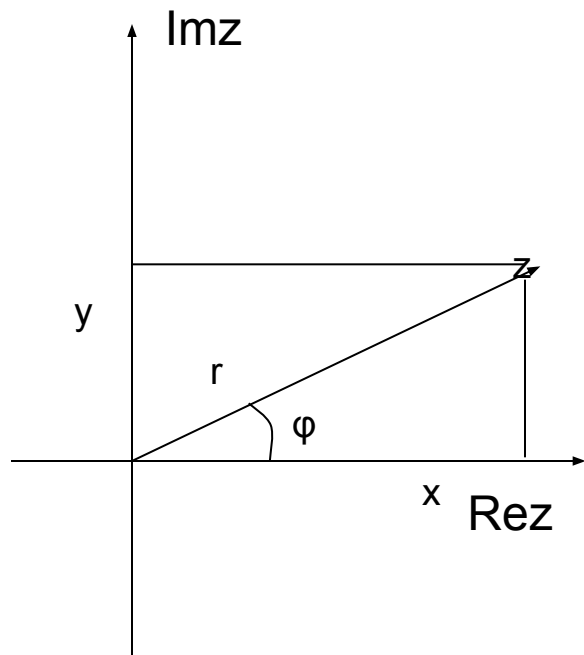
$$z = x + 0i = x \quad \text{и чисто мнимые числа}$$

$$z = 0 + iy = iy, \quad \text{называются соответственно действительной и мнимой осями.}$$

Геометрическое изображение комплексного числа



Тригонометрическая форма записи комплексного числа



$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow z = x + iy =$$
$$= r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi =$$
$$= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) =$$
$$= r(\cos(\varphi + 2\pi n) + i \sin(\varphi + 2\pi n))$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| - \text{модуль числа } z$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}; \varphi = \arg z - \text{аргумент числа } z$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

Показательная форма записи КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

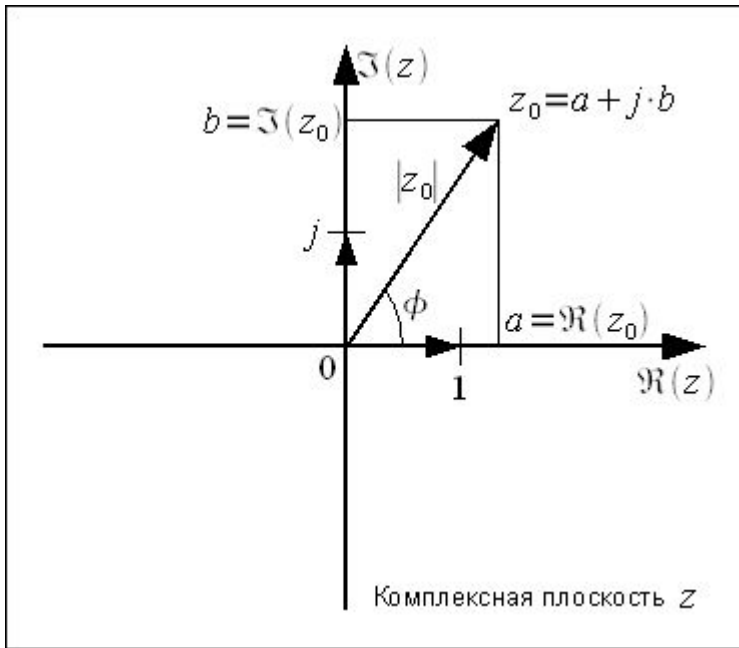
Из формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Показательная форма записи КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Из формулы Эйлера



$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Пример. $z = -1 - i$ записать в тригонометрической и показательной формах.

Решение.

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 \rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{4}}$$

Операции над комплексными числами

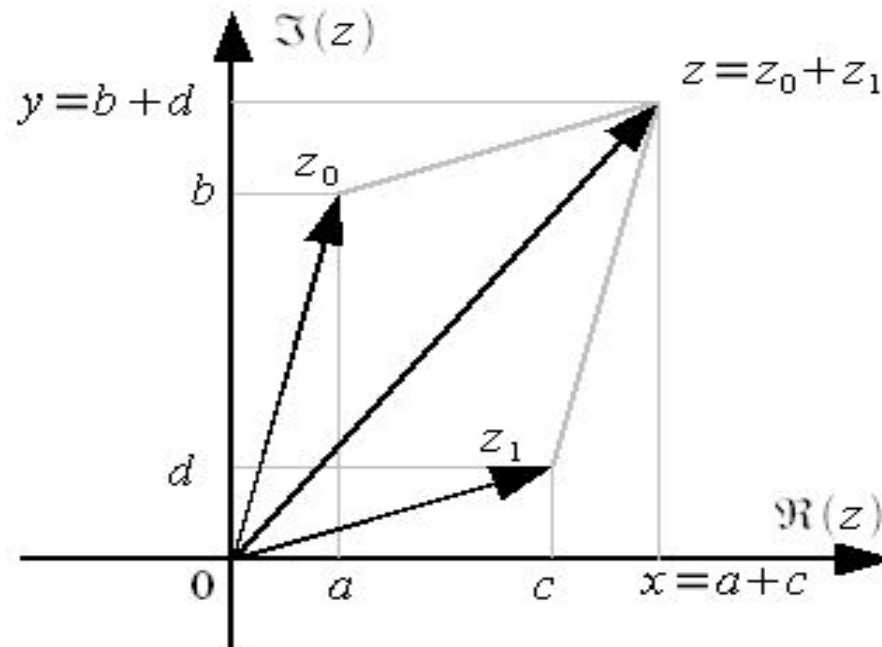
$$z_0 = x_0 + iy_0 \text{ и } z_1 = x_1 + iy_1$$

Сумма двух комплексных чисел и есть также комплексное число : $z_0 + z_1 = (x_0 + x_1) + i(y_0 + y_1)$

Пример: $(3+2i)+(1+5i)=(3+1)+i(2+5)=4+7i$.

Как следует из выражения при сложении реальные и мнимые части комплексного числа также складываются.

На комплексной плоскости операцию сложения
можно реализовать как сложение векторов
комплексных чисел по правилу
параллелограмма



2. Вычитание комплексных чисел

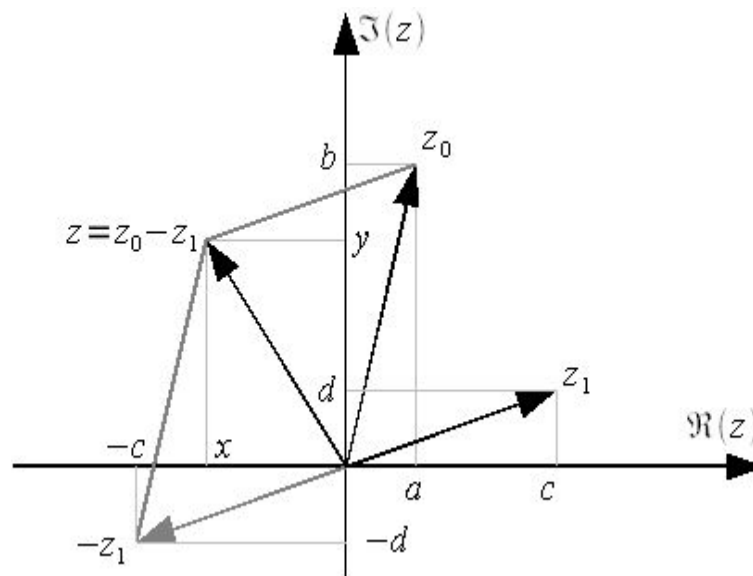
Разность двух комплексных чисел и есть также комплексное число:

$$z_0 - z_1 = (x_0 - x_1) + i(y_0 - y_1).$$

Пример: $(4+i) - (-2-i) = (4+2) + i(1+1) = 6+2i$.

На комплексной плоскости операцию вычитания можно реализовать как вычитание векторов комплексных чисел по правилу параллелограмма .

На первом шаге из вектора z_1 формируется вектор $-z_1$, после чего вектор z_0 складывается с вектором $-z_1$ по правилу параллелограмма.



3. Умножение комплексных чисел.

Для того чтобы получить формулу для умножения комплексных чисел необходимо перемножить два комплексных числа по правилу умножения многочленов:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Пример 1.

$$(1+3i)(-5-2i) = -5 - 15i - 2i - 6i^2 = -5 - 17i + 6 = 1 - 17i .$$

Пример 2.

$$(1+3i)(1-3i) = 1 - 3i + 3i - 9i^2 = 1 + 9 = 10 .$$

$$z \cdot \bar{z}$$

всегда действительное число

4. Деление комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = z \text{ такое, что } z \cdot z_2 = z_1$$

Пример

$$\begin{aligned} \frac{4+i}{3+2i} &= \frac{(4+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12+3i-8i-2i^2}{9+4} = \\ &= \frac{14-5i}{13} = \frac{14}{13} - \frac{5}{13}i \end{aligned}$$

5. Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

$$1. z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$2. \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (|z_2| \neq 0)$$

3.

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi); n \in \mathbb{N}$$

4.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right); k = 0; 1; 2; \dots; n-1$$