
Многokrатное рассеяние ВОЛН



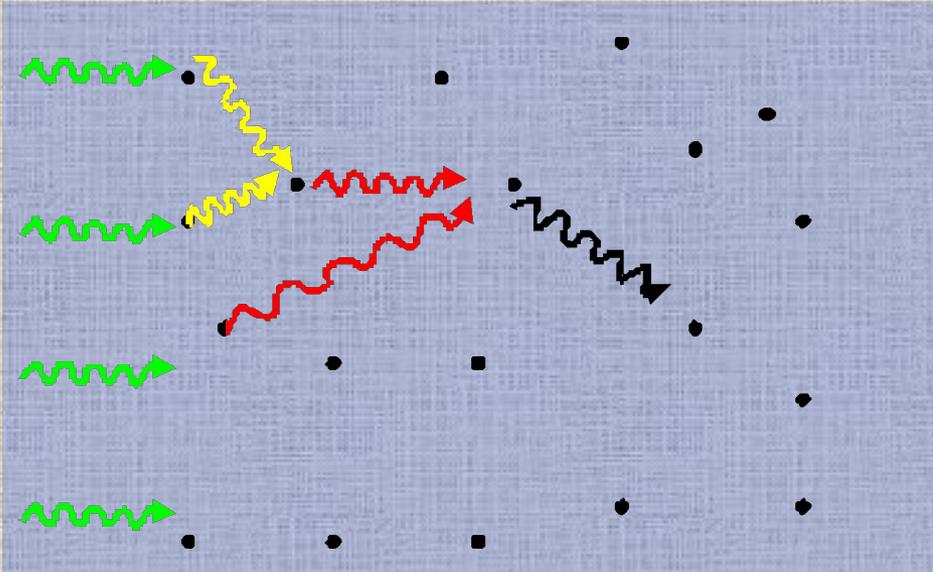
Будак Владимир Павлович,
Национальный исследовательский
университет «МЭИ»
кафедра светотехники

☐: +7 (495) 763-5239

BudakVP@mpei.ru



Волны в случайно-неоднородных средах



- случайное изменение показателя преломления – турбулентность;
- рассеяние на дискретных частицах, внедренных в объем среды.

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 (1 + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})), \quad \mu = 1,$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_0}, \quad \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) \rangle = 0$$

$$\Delta U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = -\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) k^2 U(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r})$$

$g(\mathbf{r})$ – функция источников

Не существует методов решения волнового уравнения с коэффициентами, зависящими от координат

Функция Грина

Предполагая статистическую независимость $g(\mathbf{r})$ и $\varepsilon(\mathbf{r})$ можно перейти к функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$U(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}', \mathbf{r})d^3r'$$

$$\Delta G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + k^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})k^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Полученное уравнение можно решать, используя функцию Грина свободного пространства $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) - k^2 \int G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}')\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}', \mathbf{r})d^3r'$$

$$\Delta G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) + k^2 G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

Поле $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является случайной функцией, статистически связанной с флуктуациями среды

Среднее поле

напрямую усреднение уравнения не представляется возможным из-за неопределенности корреляции поле-среда: $\langle G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \rangle$

Представим решение в виде ряда Neumann:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) - k^2 \int G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d^3 r' \\ + k^4 \int G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) d^3 r_1 d^3 r_2 \\ - \dots$$

$$\Psi_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_N) \rangle \quad \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \cdot \dots \cdot \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_{2k+1}) \rangle \equiv 0$$

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \cdot \dots \cdot \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_{2k}) \rangle = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{парам}}} \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_{\alpha_1}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_{\alpha_2}) \rangle \cdot \dots \cdot \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_{\alpha_{2k-1}}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_{\alpha_{2k}}) \rangle$$

что позволяет усреднить полученное волновое уравнение

Уравнение для среднего поля

$$\begin{aligned}\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = & G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) + k^4 \int G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \\ & + k^8 \int G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) G_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) G_0(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}) \\ & \quad \left[\psi_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) \right. \\ & \quad \left. \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \right] d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3 d^3 r_4 \\ & + \dots\end{aligned}$$

где $\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \equiv \langle G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \rangle$

Ряд состоит из нескольких групп подобных членов, однако их приведение представляет значительные аналитические трудности

Эффективный прием анализа подобных рядов, основан на геометрическом изображении членов ряда

Диаграммы Фейнмана

$G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$	$k^4 \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$	$\langle G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \rangle$
$\mathbf{r}_i \text{ --- } \mathbf{r}_j$	$\mathbf{r}_i \text{ - - - } \mathbf{r}_j$	$\mathbf{r}_i \text{ — } \mathbf{r}_j$

$$\text{—} = \text{---} + \text{---} \text{ (arc) } + \text{---} \text{ (two arcs) } + \text{---} \text{ (three arcs) } + \text{---} \text{ (four arcs) } + \dots$$

Отберем из ряда все сильно связанные диаграммы. Поскольку все они начинаются и заканчиваются линией G_0 , то сумму всех сильно связанных диаграмм можно обозначить

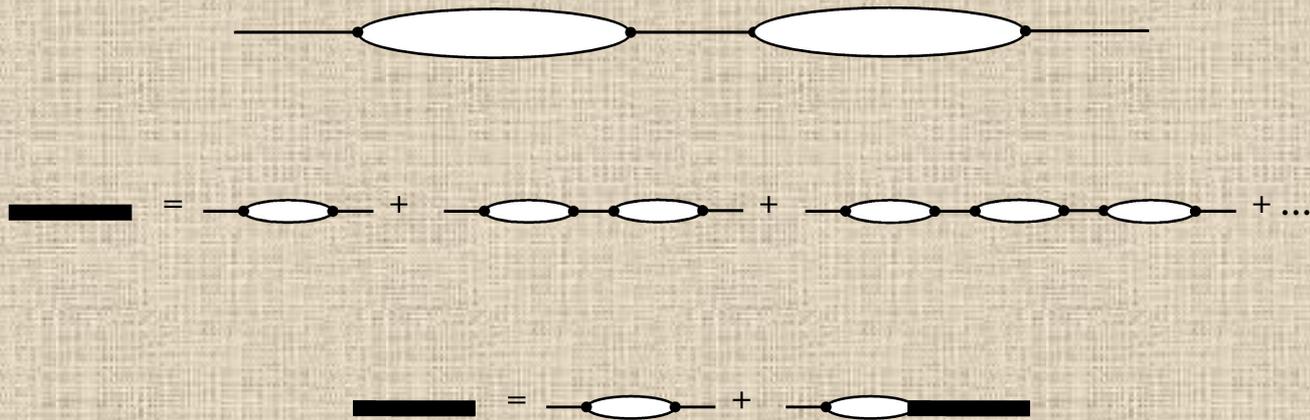
$$\text{---} \text{ (oval) } \text{---} \bar{G}^{(\text{СИЛЬНО})}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}) d^3 r' d^3 r''$$

$$Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = k^4 G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \psi_\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + k^8 \int G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') d^3 r_1 d^3 r_2 + \dots$$

Диаграммы, получаемые из слабосвязанной при разрыве линии G_0 , могут оказаться так же сильно и слабо связанными

Уравнение Dyson

Рассмотрим теперь все диаграммы с показателем связности 2:



$$\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) + \int G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \bar{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) d^3 r_1 d^3 r_2$$

$Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ - ядро массового оператора

Оператор Dyson

Удобно представить уравнение Dyson в форме близкой волновому уравнению - подействуем на обе части уравнения оператором $(\Delta + k^2)$ и учтем

$$(\Delta + k^2)G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$(\Delta + k^2)\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) + \int \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\bar{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})d^3r_1d^3r_2$$

$$(\Delta + k^2)\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) - \int Q(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})\bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})d^3r' = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})$$

$$\mathbf{D} = \Delta + k^2 - \int d^3r'Q(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}), \quad \mathbf{D}\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Для определения распространения сигнала оптического приемника необходимо знать функцию распространения корреляцию поля

Уравнение Bethe-Salpeter

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) G^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) \rangle$$

$$\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \bar{G}^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) + \int \bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_1) \bar{G}^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_2) K(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) \Gamma(\mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) d^3 r'_1 d^3 r'_2 d^3 r''_1 d^3 r''_2$$

Поддействуем дважды на уравнение Bethe-Salpeter оператором Dyson \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 и вычтем из первого второе:

$$[\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2] \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \left[\bar{G}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}; \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) - \bar{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) \right] \Gamma(\mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) d^3 r d^3 r''_1 d^3 r''_2$$

$$[\Delta_1 - \Delta_2] \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \left[Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) - Q^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \right] d^3 r + \int \left[\bar{G}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}; \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) - \bar{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) \right] \Gamma(\mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) d^3 r d^3 r''_1 d^3 r''_2$$

*Получить решение уравнения Bethe-Salpeter
в общем случае не удастся*

Лучевое приближение

1. $|\nabla_{\rho}\Gamma(\mathbf{R},\rho)| \propto |\nabla_{\mathbf{R}}\Gamma(\mathbf{R},\rho)|$ - квазиоднородность поля;
2. $|\nabla_{\rho}\Gamma(\mathbf{R},\rho)| \propto |\nabla_{\rho}Q(\mathbf{R},\rho)|, |\nabla_{\rho}K(\mathbf{R},\rho)|$ - приближение ГО;
3. $|\nabla_{\rho}Q(\mathbf{R},\rho)| \propto |\nabla_{\mathbf{R}}Q(\mathbf{R},\rho)|$ аналогично для K - локализация ядер,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

1. одногрупповые – соответствуют одной однородности, быстро убывают с ростом ρ ;
2. многогрупповые – относятся к различным неоднородностям, связаны волновым облучением, убывают медленно с ростом ρ

Эффективные неоднородности, внутри когерентное распространение (Fresnel), а друг друга облучают в зоне Fraunhofer

Решение уравнение Dyson для квазиоднородного поля

$$\Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + k^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) d^3 r_1 = 0$$

$$-k_{\text{эф}}^2 + k^2 - Q(k_{\text{эф}}) = 0 \Rightarrow k_{\text{эф}} = k \sqrt{1 - \frac{Q(k_{\text{эф}})}{k^2}} \approx k - \frac{Q(k_{\text{эф}})}{k}, \quad \frac{\partial Q}{\partial k} \approx 1$$

$$\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \frac{e^{ik_{\text{эф}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{e^{ik_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} e^{-k_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

$k_1 = \text{Re}k_{\text{эф}} > k$ - увеличение волнового пути, что эквивалентно увеличению волнового числа.

$k_2 = \text{Im}k_{\text{эф}} > 0$ - уменьшение среднего поля или перекачка энергии из когерентной компоненты поля в некогерентное

Предположим, что среднее поле квазиоднородно: $\bar{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) = \bar{G}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$

Локализация ядер

$$Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = K\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \frac{\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2}{2}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2\right)$$

$$\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}; \quad \Delta_1 - \Delta_2 = 2\nabla_{\mathbf{R}}\nabla_{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\begin{aligned} 2\nabla_{\mathbf{R}}\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = & \int \left[Q\left(\frac{1}{2}(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}), \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}), -\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}\right) \right. \\ & \left. - Q^*\left(\frac{1}{2}(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}), \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}), \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}\right) \right] d^3r \\ & \int \left[\bar{G}^*\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}\right) K\left(\frac{1}{2}(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}) - \mathbf{R}'', \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}''\right) \right. \\ & \left. \bar{G}^*\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}\right) K\left(\frac{1}{2}(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}) - \mathbf{R}'', -\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}''\right) \right] \Gamma(\mathbf{R}'', \boldsymbol{\rho}'') d^3r d^3R'' d^3\rho'' \end{aligned}$$

Проведем почленную замену переменных

Замена переменных

1. $-\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', d^3r = d^3\rho', Q(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}') \Gamma(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$
2. $\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}', d^3r = d^3\rho', Q^*(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', -\boldsymbol{\rho}') \Gamma(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$
3. $\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r} = -\boldsymbol{\rho}' \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}', d^3r = d^3\rho', \bar{G}^*(-\boldsymbol{\rho}') K(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{R}'', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'')$
4. $\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}' \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', d^3r = d^3\rho', \bar{G}^*(\boldsymbol{\rho}') K(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}' - \mathbf{R}'', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'')$

$$2\nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int \left[Q(\mathbf{R} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \boldsymbol{\rho}') - Q^*(\mathbf{R} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), -\boldsymbol{\rho}') \right] \Gamma(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') d^3\rho'$$

$$+ \int \left[\bar{G}^*(-\boldsymbol{\rho}') - \bar{G}(\boldsymbol{\rho}') \right] K(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}'', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'') \Gamma(\mathbf{R}'', \boldsymbol{\rho}'') d^3\rho' d^3R'' d^3\rho''.$$

$$Q(\mathbf{R} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \boldsymbol{\rho}') \approx Q(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}'), \quad \Gamma(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \approx \Gamma(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$$

$$\int K(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}'', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'') \Gamma(\mathbf{R}'', \boldsymbol{\rho}'') d^3R'' \approx \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}'') \int K(\mathbf{R} - \mathbf{R}'', \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'') d^3R''$$

$$= \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}'') \tilde{K}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'').$$

$$2\nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int \left[Q(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}') - Q^*(\mathbf{R}, -\boldsymbol{\rho}') \right] \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') d^3\rho'$$

$$+ \int \left[\bar{G}^*(-\boldsymbol{\rho}') - \bar{G}(\boldsymbol{\rho}') \right] \tilde{K}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'') \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}'') d^3\rho' d^3\rho''.$$

Последнее уравнение подобно уравнению распространения когерентности в свободном пространстве

Уравнение переноса излучения (УПИ)

$$I(\mathbf{R}, \mathbf{k}) = \int \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d^3 \boldsymbol{\rho}, \quad \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int \tilde{K}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') e^{-i(\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{k}'\boldsymbol{\rho}')} d^3 \boldsymbol{\rho} d^3 \boldsymbol{\rho}'$$

$$2i(\mathbf{k}, \nabla_{\mathbf{R}})I(\mathbf{R}, \mathbf{k}) = I(\mathbf{R}, \mathbf{k})2i \operatorname{Im} Q(\mathbf{R}, \mathbf{k}) + i\pi \int \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)}{k_1^2} \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') I(\mathbf{R}, \mathbf{k}') d^3 \mathbf{k}'$$

$$\int \left[\bar{G}^*(-\boldsymbol{\rho}) - \bar{G}(\boldsymbol{\rho}) \right] e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d^2 \boldsymbol{\rho} = \frac{0.5ik_1k_2}{\pi^3 \left[(k_1^2 - k_2^2 - \kappa^2)^2 + 4k_1^2k_2^2 \right]} \xrightarrow{k_1 \boxtimes k_2} i\pi \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)}{k_1^2}$$

$$I(\mathbf{R}, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_1^2} L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1), \quad \hat{\mathbf{l}} = \frac{\mathbf{k}}{\kappa}$$

$$(\hat{\mathbf{l}}, \nabla) L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) = -\varepsilon(\mathbf{R}) L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\sigma(\mathbf{R})}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}' + Q(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}})$$

УПИ является следствием уравнений Maxwell в лучевом приближении