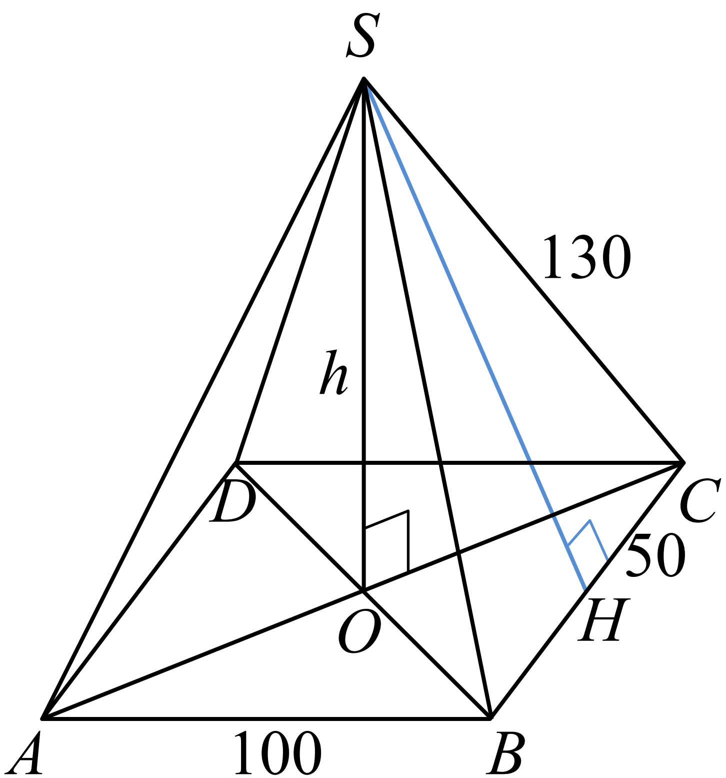
Решение заданий №8

Пирамида

№1

Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 100, боковые ребра равны 130. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Решение.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники.

SH – высота и медиана одного из них.

В п/у ΔSHC по т. Пифагора

$$SH^2 = SC^2 - HC^2$$

$$SH^2 = 130^2 - 50^2 = 120^2$$

$$SH = 120$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot SH$$

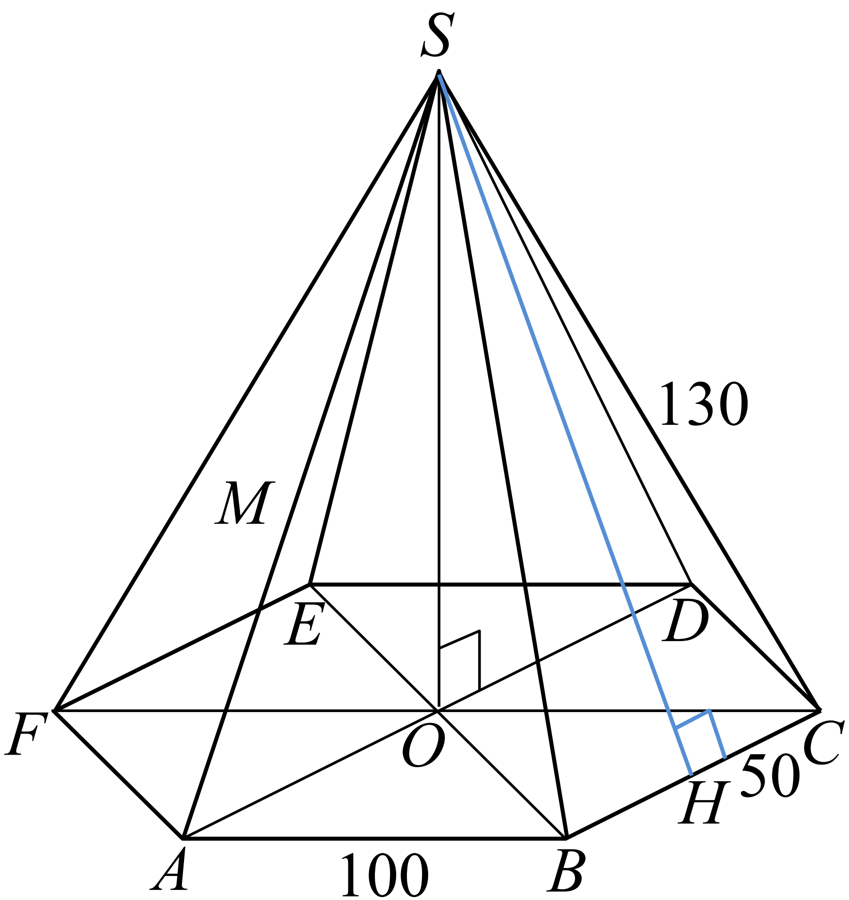
$$P_{осн.} = 4AB = 4 \cdot 100 = 400$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 120 = 24000.$$

Ответ: 24000

№2

Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 100, боковые ребра равны 130. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Решение.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники.

SH – высота и медиана одного из них.

В п/у ΔSHC по т. Пифагора

$$SH^2 = SC^2 - HC^2$$

$$SH^2 = 130^2 - 50^2 = 120^2$$

$$SH = 120$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot SH$$

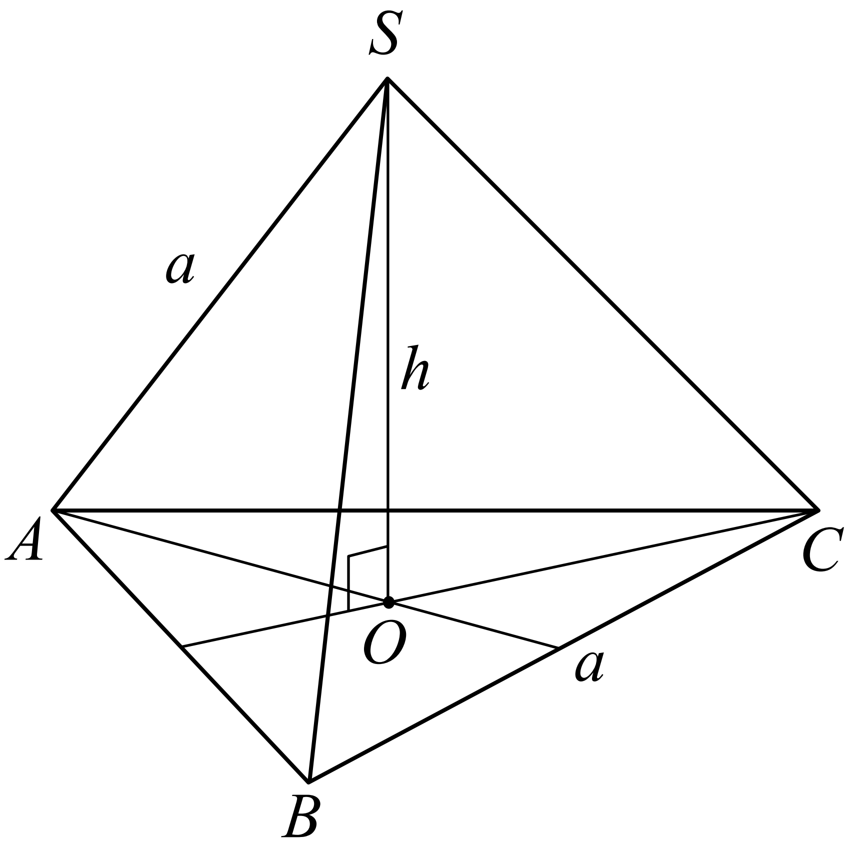
$$P_{осн.} = 6AB = 6 \cdot 100 = 600$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 120 = 36000.$$

Ответ:

№3

Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в десять раз?



Решение.

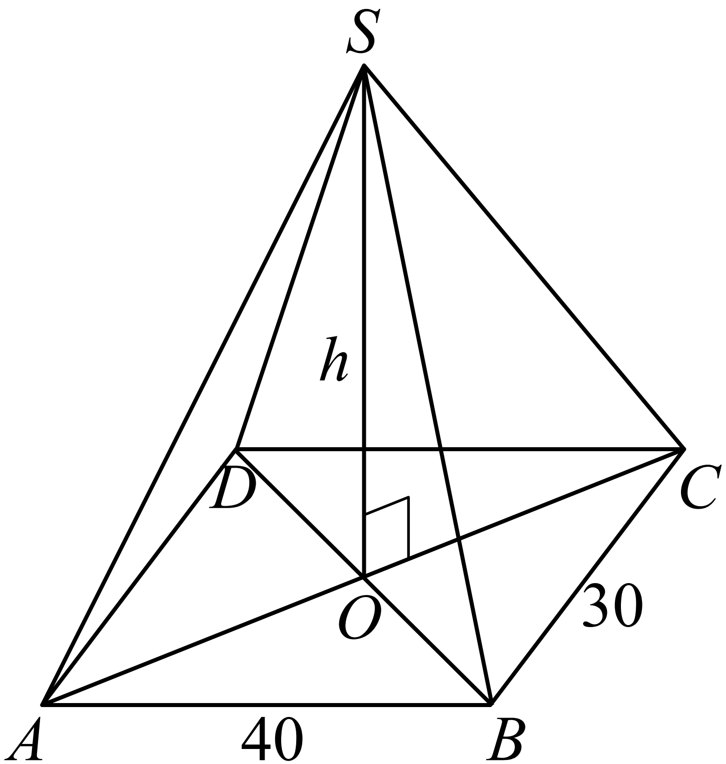
Объемы подобных тел относятся как куб коэффицента подобия

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3 = 10^3 = 1000.$$

Ответ: 1000.

№4

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 30 и 40. Ее объём равен 1600. Найдите высоту этой пирамиды.



Решени
е.

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

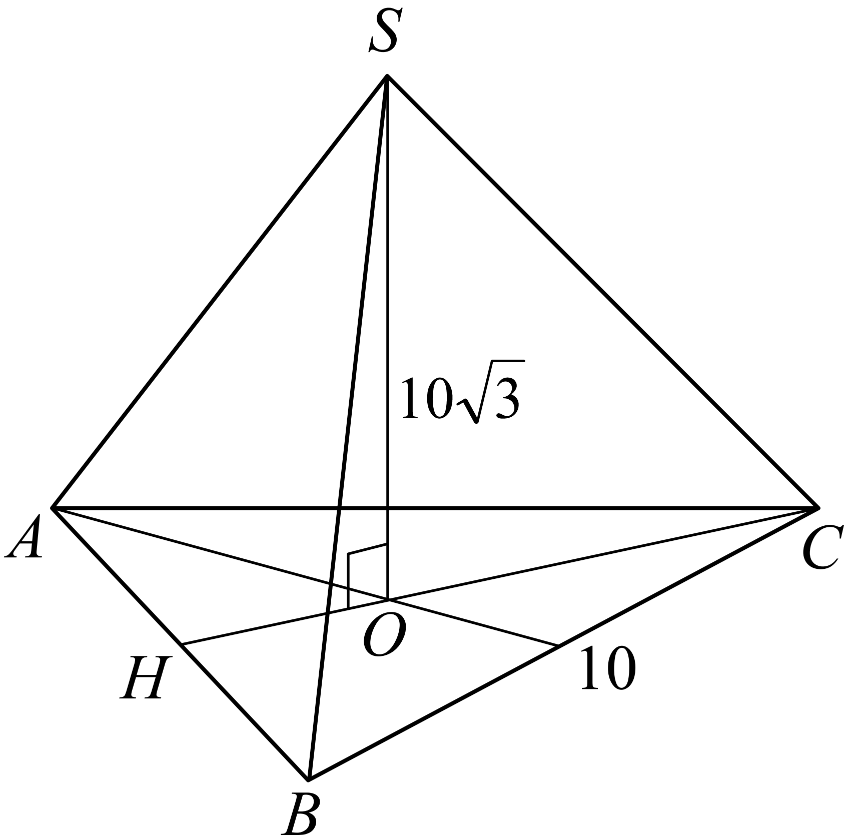
$$S_{осн.} = AB \cdot BC = 40 \cdot 30 = 1200$$

$$h = \frac{3V_{пир.}}{S_{осн.}} = \frac{3 \cdot 16000}{1200} = 40.$$

Ответ:

№5

Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 10, а высота равна $10\sqrt{3}$.



Решение.

$$V_{пир.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$$

Площадь правильного треугольника

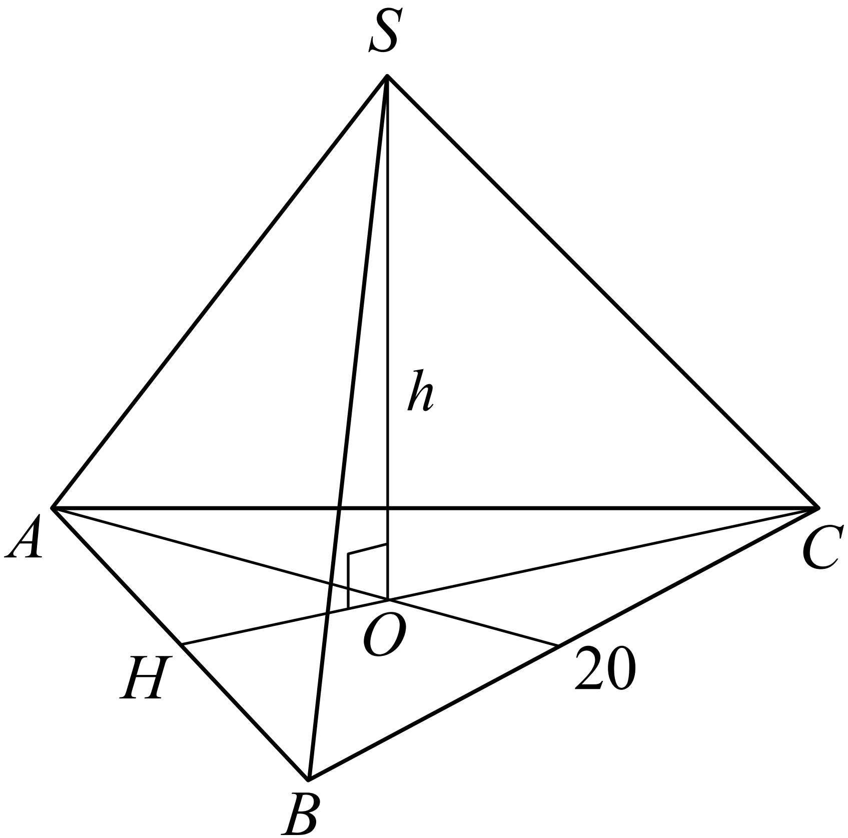
$$S_{осн.}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{10^2\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}$$

$$V_{пир.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 25\sqrt{3}\cdot 10\sqrt{3}=250.$$

Ответ: 250.

№6

Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 20, а объём равен $1000\sqrt{3}$.



Решение.

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

Площадь правильного треугольника

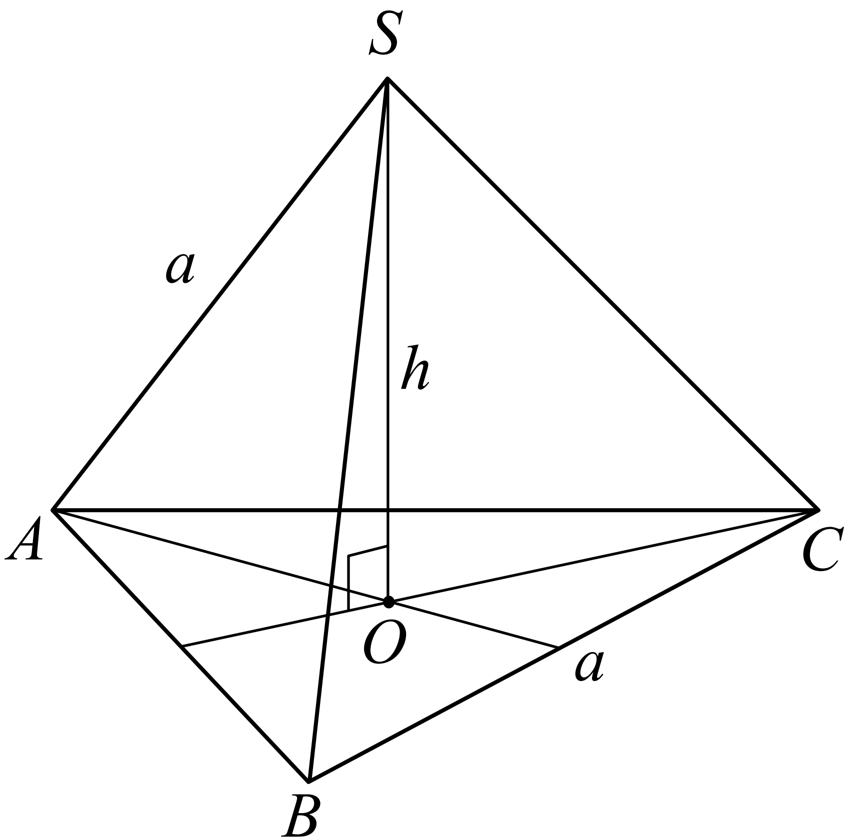
$$S_{осн.} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{20^2\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}$$

$$h = \frac{3V_{пир.}}{S_{осн.}} = \frac{3 \cdot 1000\sqrt{3}}{100\sqrt{3}} = 30.$$

Ответ: 30.

№7

Во сколько раз увеличится объём пирамиды, если ее высоту увеличить в пятнадцать раз?



Решение.

При увеличении высоты в 15 раз объем пирамиды увеличится также в 15 раз

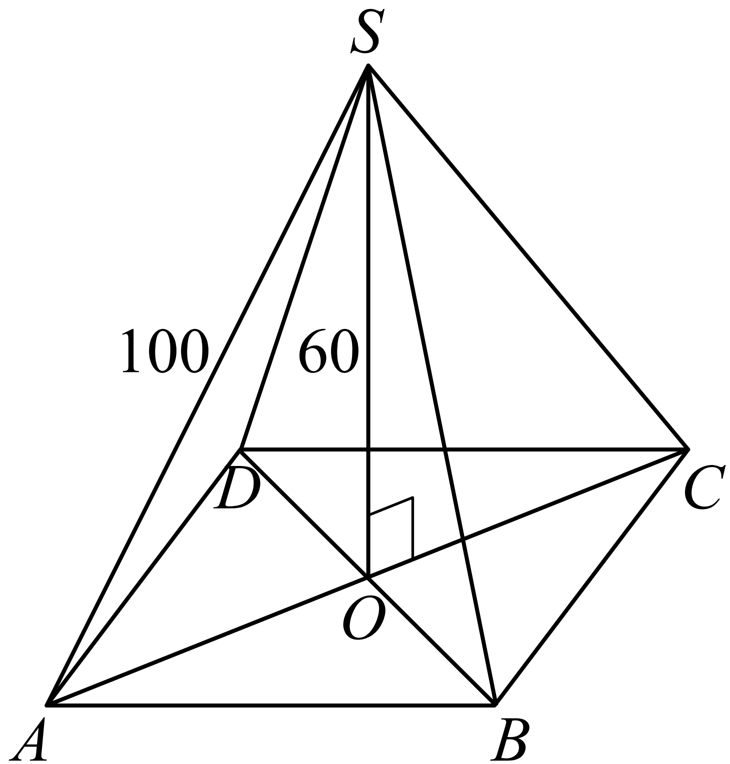
$$V_{пир.1} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

$$V_{пир.2} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot 15h = 15 \cdot V_{пир.1}$$

Ответ: 15.

№8

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 60, боковое ребро равно 100. Найдите ее объём.



Решение:

В п/у ΔASO *по т. Пифагора*

$$AO^2 = SA^2 - SO^2$$

$$AO^2 = 100^2 - 60^2 = 80^2$$

$$AO = 80$$

$$AB = 80\sqrt{2}$$

$$S_{осн.} = AB^2 = \left(80\sqrt{2}\right)^2 = 12800$$

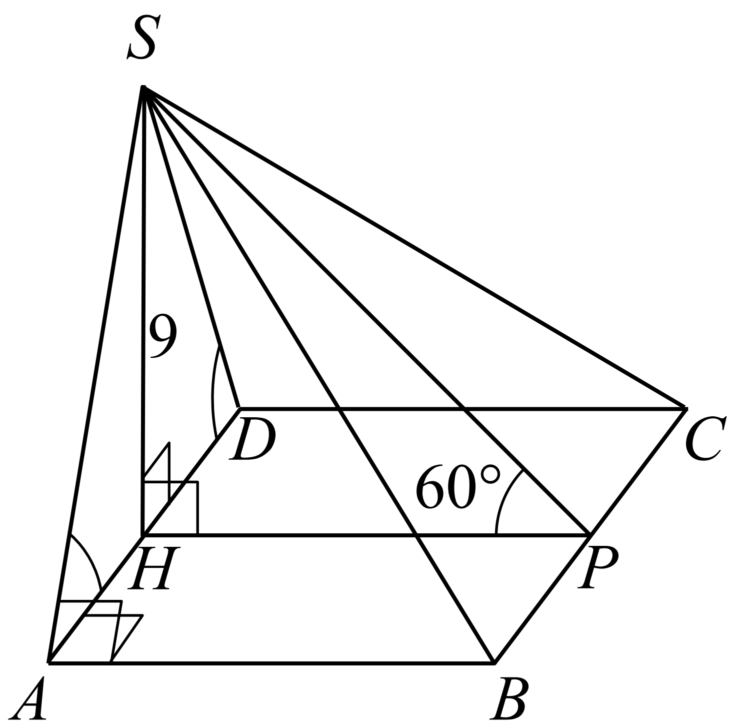
$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot 12800 \cdot 60 = 256000.$$

Ответ:

№9

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 9. Найдите объём пирамиды.



Решение.

$\Delta ASD - р/с,\ т.к.\ \angle SAH = \angle SDH = 60°$

$(как\ линейные\ углы\ двугранных\ углов$

$при\ сторонах\ основания\ AB\ и\ CD)$

$$В\ п/у\ \ \Delta SHP\ \ HP = \frac{SH}{tg60°} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$AD = \frac{2SH}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

$(как\ сторона\ \ р/с\ \ \Delta ASD)$

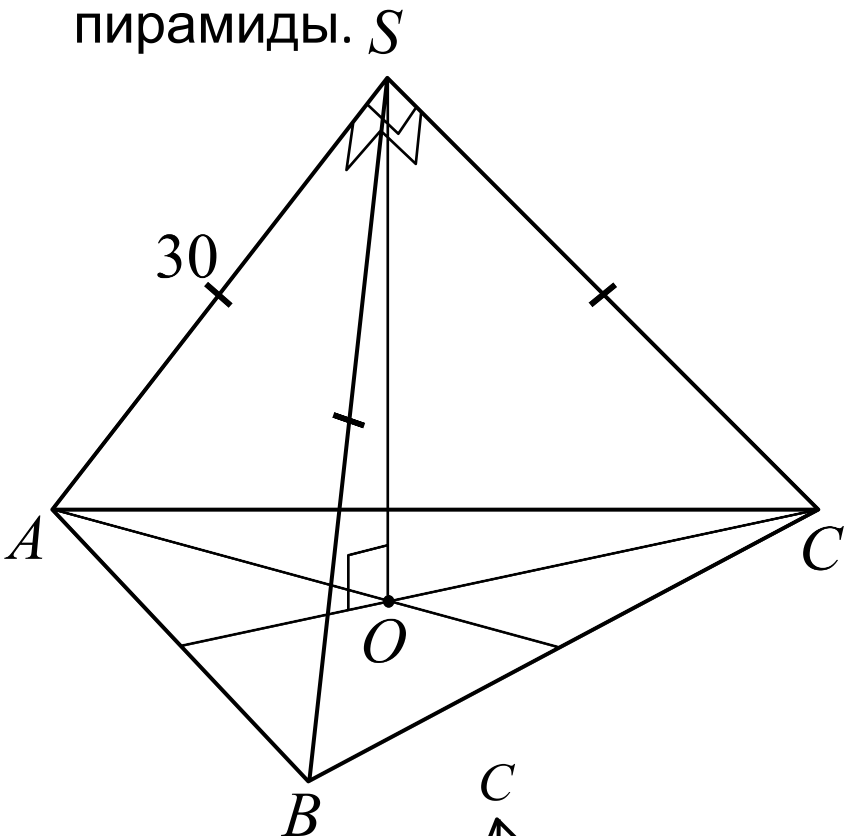
$$S_{осн.} = AB \cdot AD = HP \cdot AD = 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 54$$

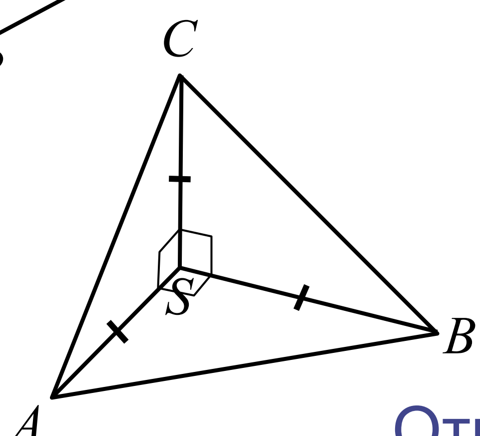
$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 54 \cdot 9 = 162.$$

Ответ:

№10

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 30. Найдите объём пирамиды.





Решение.

Повернем пирамиду на одну из боковых граней так, что боковое ребро станет высотой пирамиды

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

$В\ п/у\ \Delta SAB$

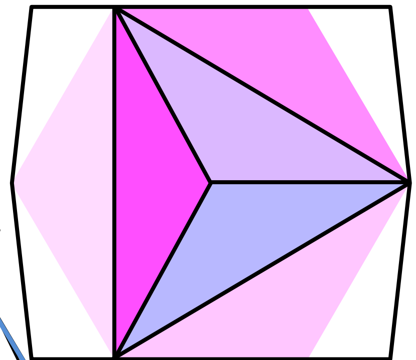
$$S_{осн.} = \frac{1}{2} SB \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 450$$

$$V_{пир.2} = \frac{1}{3} \cdot 450 \cdot 30 = 4500.$$

Ответ: 4500

№11

Объём треугольной пирамиды *SABC*, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF*, равен 10. Найдите объём шестиугольной пирамиды.



Решение.

Разобьем основание пирамиды на 6 равных частей как на рисунке

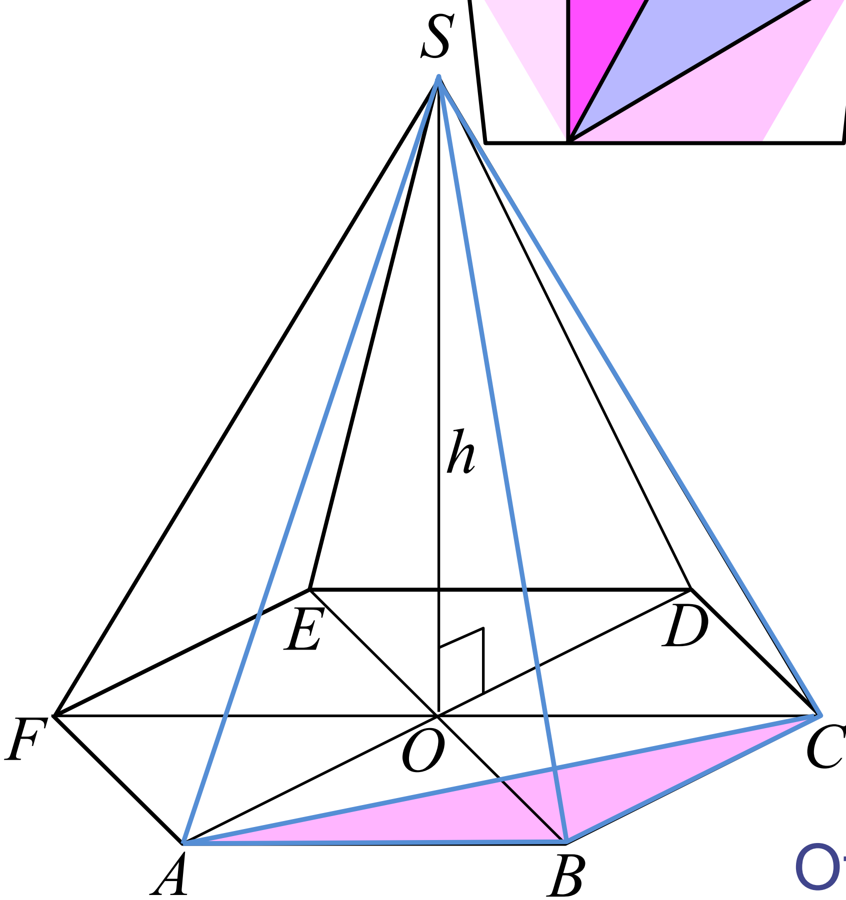
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta ABC}$$

SO - общая высота для обеих пирамид

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h = 10$$

$$V_{ABCDEF} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6S_{\Delta ABC} \cdot h$$

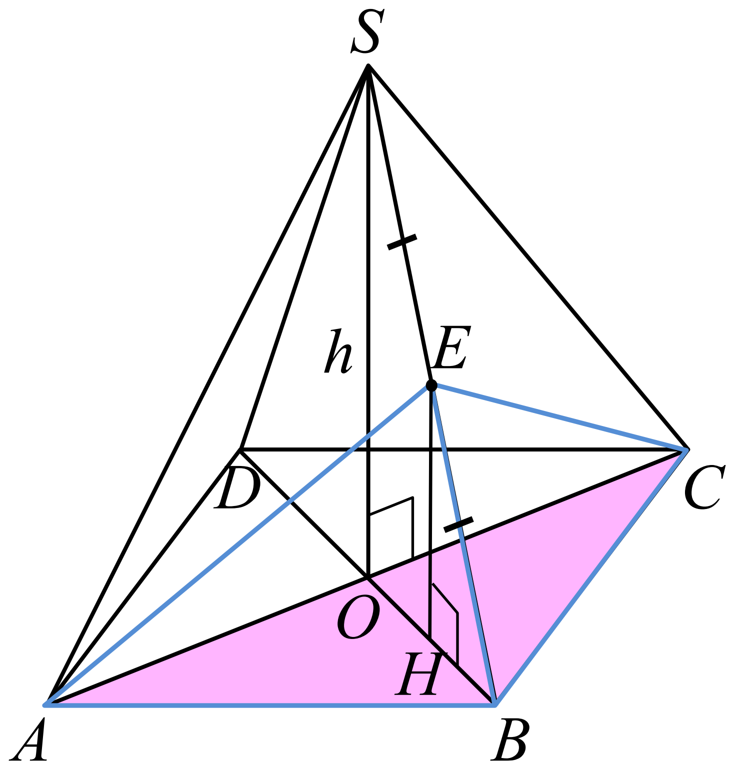
$$V_{ABCDEF} = 6V_{\Delta ABC} = 60.$$



Ответ:

№12

Объём правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* равен 120. Точка *E* – середина ребра *SB*. Найдите объём треугольной пирамиды *EABC*.



Решение.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

EH - высота пирамиды EABC,

$$EH = \frac{1}{2} SO = \frac{1}{2} h \text{ (как средняя линия } п/у\ \Delta SOB\text{)}$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = 120$$

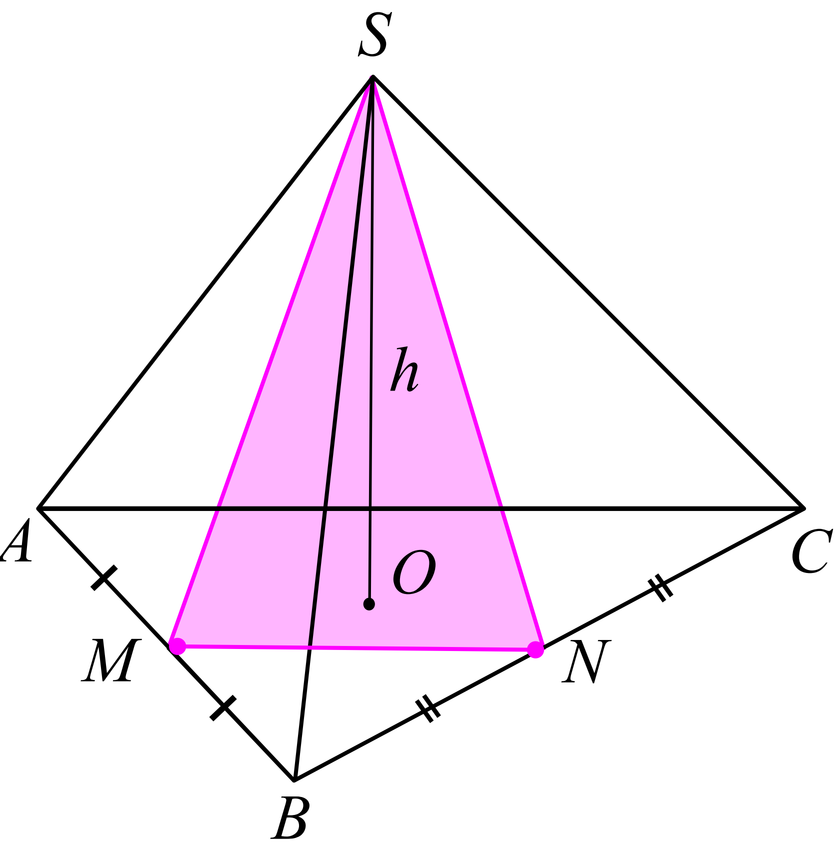
$$V_{EABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot EH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot \frac{1}{2} h$$

$$V_{EABC} = \frac{1}{4} V_{SABCD} = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30.$$

Ответ:

№13

От треугольной пирамиды, объём которой равен 120, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.



Решение.

$$S_{\Delta BMN}=\frac{1}{4}S_{ABC}\ (\textit{из отношения площадей подобных треугольников})$$

SO - общая высота обеих пирамид

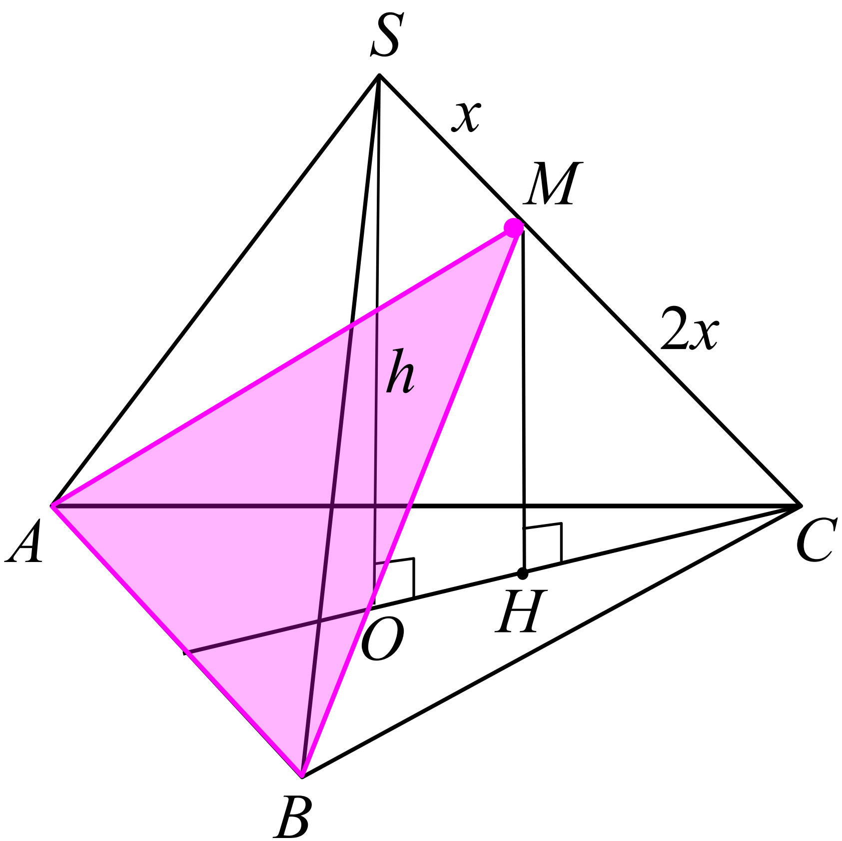
$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h=120$$

$$V_{SBMN}=\frac{1}{3}S_{\Delta BMN}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S_{ABC}\cdot h$$

$$V_{SBMN}=\frac{1}{4}V_{SABC}=\frac{1}{4}\cdot 120=30.$$

Ответ: 30

№14 Объём треугольной пирамиды равен 150. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



Решение:

Узнаем объем нижней части пирамиды

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot MH, \text{ где } MH = \frac{2}{3} h$$

(из подобия п/у ΔSOC и ΔMHC)

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} V_{SABC}$$

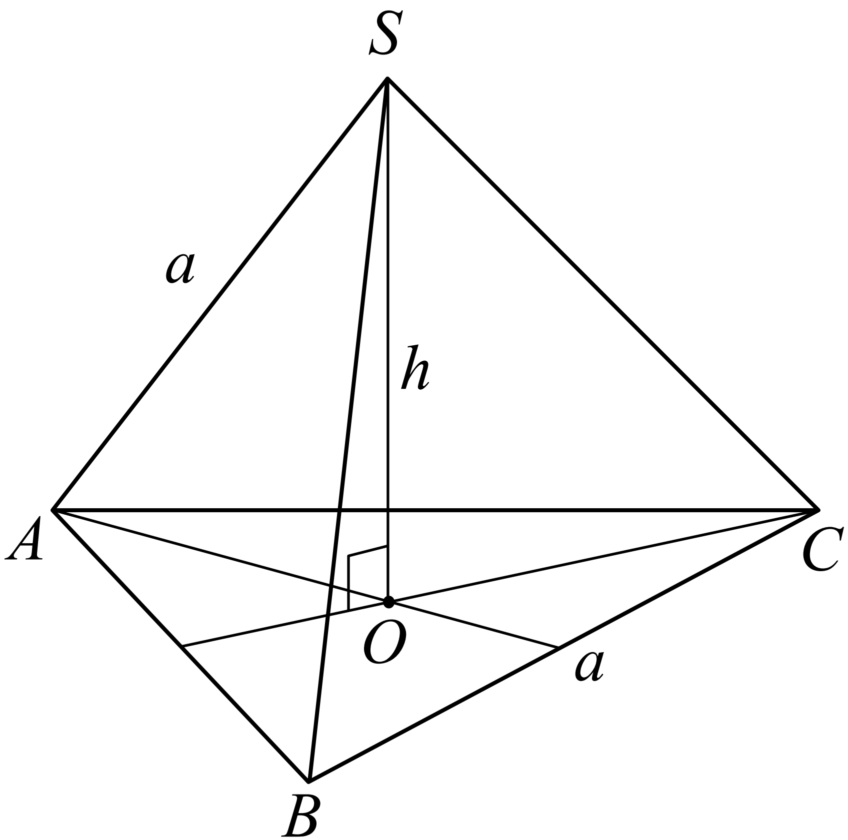
$$V_{MABC} = \frac{2}{3} \cdot 150 = 100 - \text{объем большей}$$

части пирамиды, поскольку оставшая часть пирамиды равна $\frac{1}{3} V_{SABC}$.

Ответ: 100

№15

Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в десять раз?



Решение.

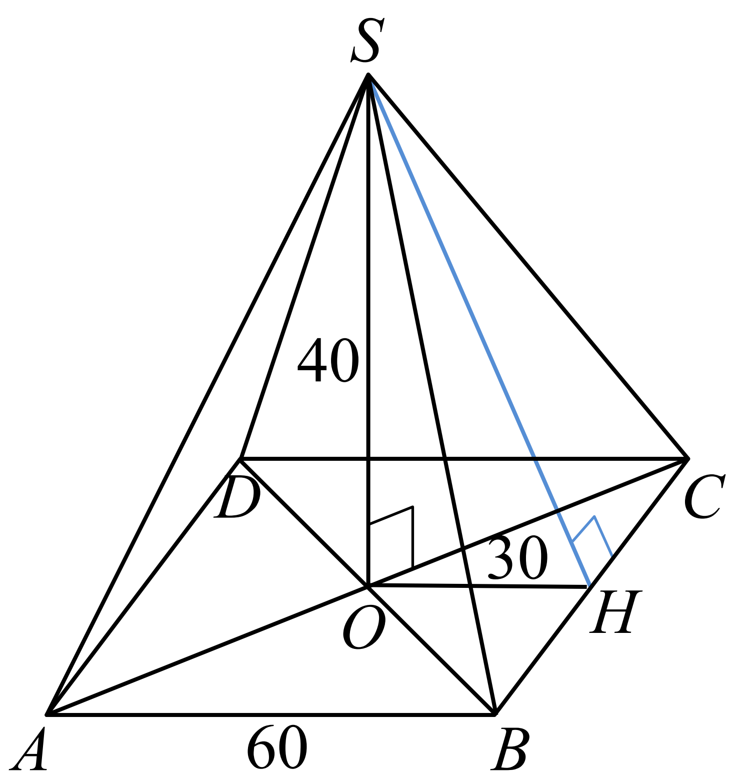
Площади подобных тел относятся как квадрат коэффицента подобия

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 = 10^2 = 100.$$

Ответ: 100.

№16

Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 60 и высота равна 40.



Решение.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники.

SH – высота и медиана одного из них.

В п/у ΔSOH по т. Пифагора

$$SH^2 = SO^2 + OH^2, \quad OH = \frac{1}{2}AB = 30$$

$$SH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2; \quad SH = 50$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2}P_{осн.} \cdot SH$$

$$P_{осн.} = 4AB = 4 \cdot 60 = 240$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 50 = 600$$

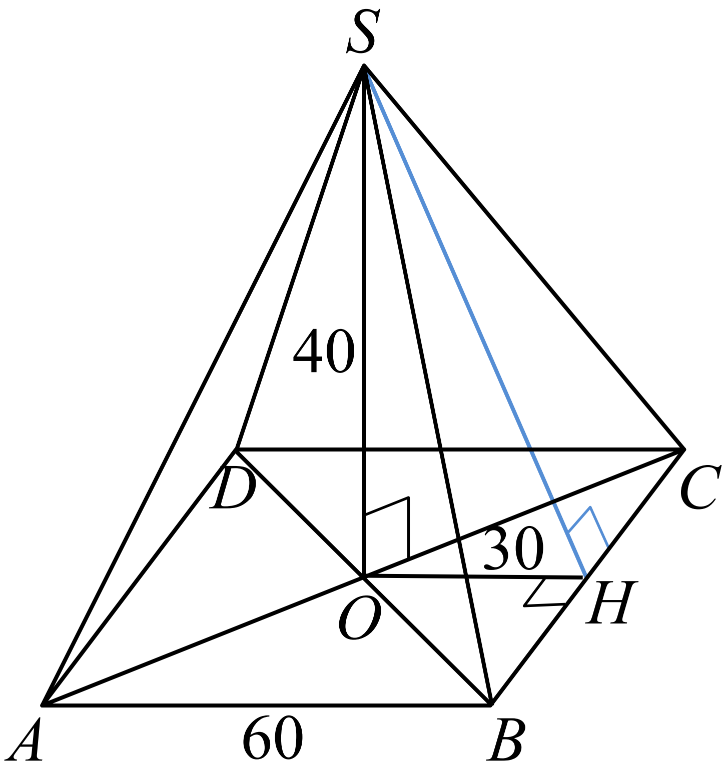
$$S_{осн.} = AB^2 = 60^2 = 3600$$

$$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.} = 600 + 3600 = 4200.$$

Ответ: 4200

№17

Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 60 и высота равна 40.



Решение.

В правильной пирамиде боковые грани – равнобедренные треугольники, SH – высота и медиана одного из них

В п/у ΔSOH *по т. Пифагора*

$$SH^2 = SO^2 + OH^2, \quad OH = \frac{1}{2}AB = 30$$

$$SH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2; \quad SH = 50$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2}P_{осн.} \cdot SH$$

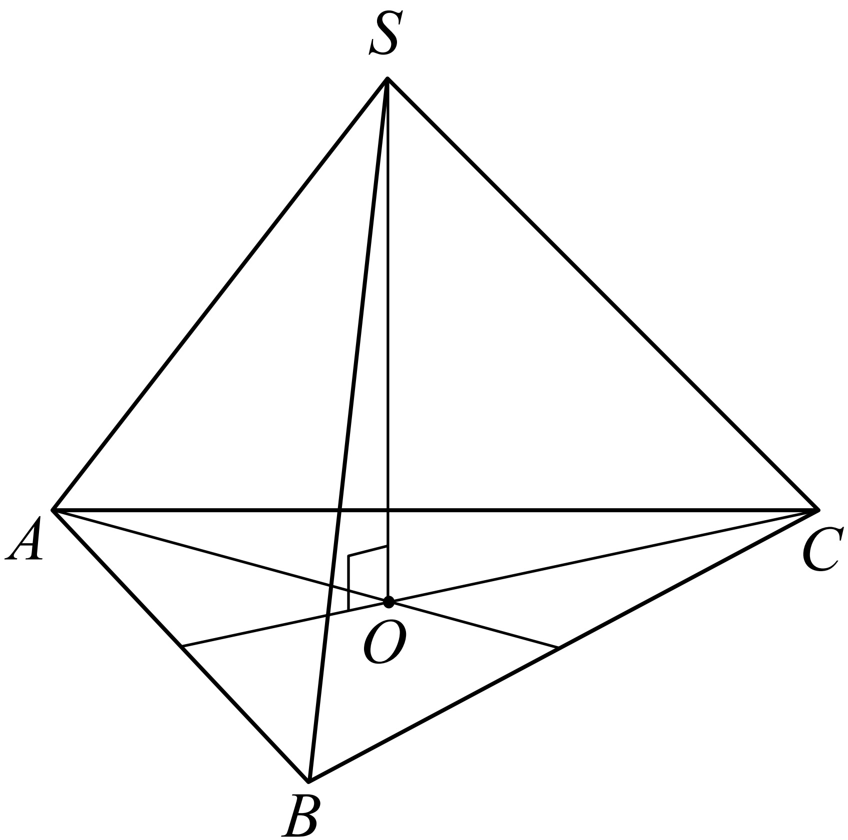
$$P_{осн.} = 4AB = 4 \cdot 60 = 240$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 50 = 600.$$

Ответ:

№18

Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все её ребра увеличить в 10 раз?



Решение.

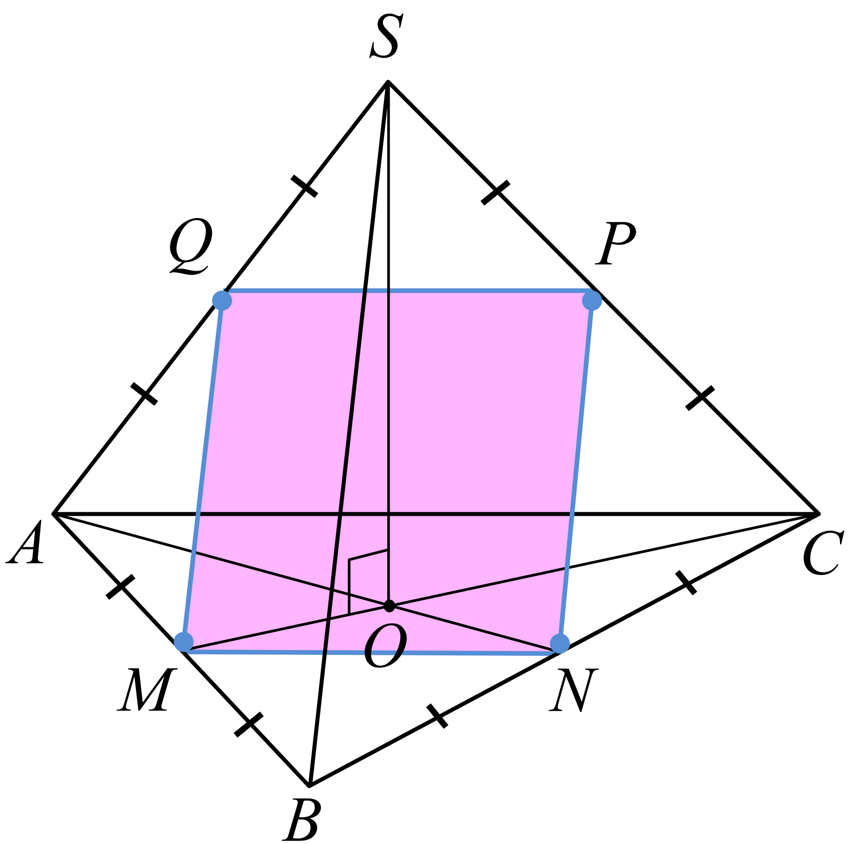
Площади подобных тел относятся как квадрат коэффицента подобия

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 = 10^2 = 100.$$

Ответ: 100.

№19

Ребра тетраэдра равны 10. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



Решение.

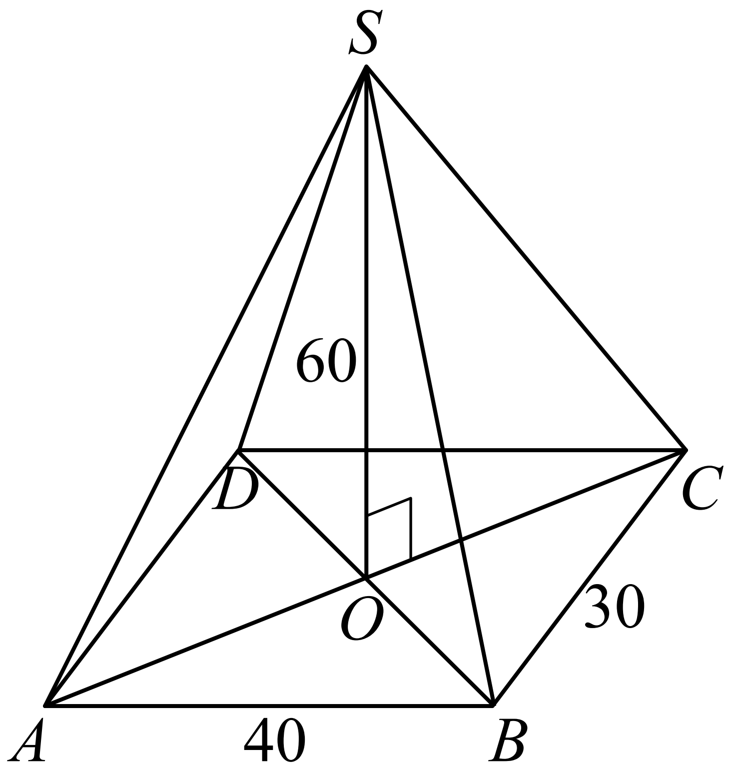
Стороны сечения – средние линии равносторонних треугольников (граней), противолежащие ребра – взаимноперпендикулярны, значит, сечение – квадрат, со стороной, равной половине ребра

$$S_{MNPQ} = MN^2 = 5^2 = 25.$$

Ответ: 25.

№20

Найдите объём пирамиды, высота которой равна 60, а основание – прямоугольник со сторонами 30 и 40.



Решение.

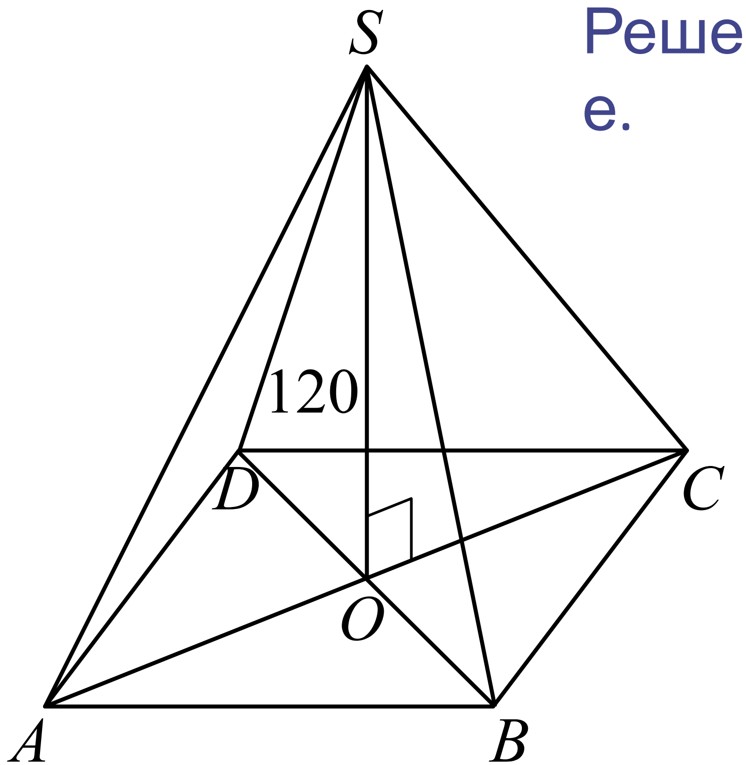
$$S_{осн.} = AB \cdot BC = 40 \cdot 30 = 1200$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1200 \cdot 60 = 2400.$$

Ответ: 2400.

№21

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 120, объём равен 20000. Найдите боковое ребро этой пирамиды.



Решение.

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h \Rightarrow S_{осн.} = \frac{3V}{h}$$

$$S_{осн.} = \frac{3 \cdot 20000}{120} = 500$$

$$S_{осн.} = a^2 = 500 \Rightarrow a = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$

$$AO = \frac{1}{2} AC, \text{ где } AC = a\sqrt{2},$$

$$AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{10\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{10}$$

В п/у ΔASO по т. Пифагора

$$AS^2 = AO^2 + OS^2$$

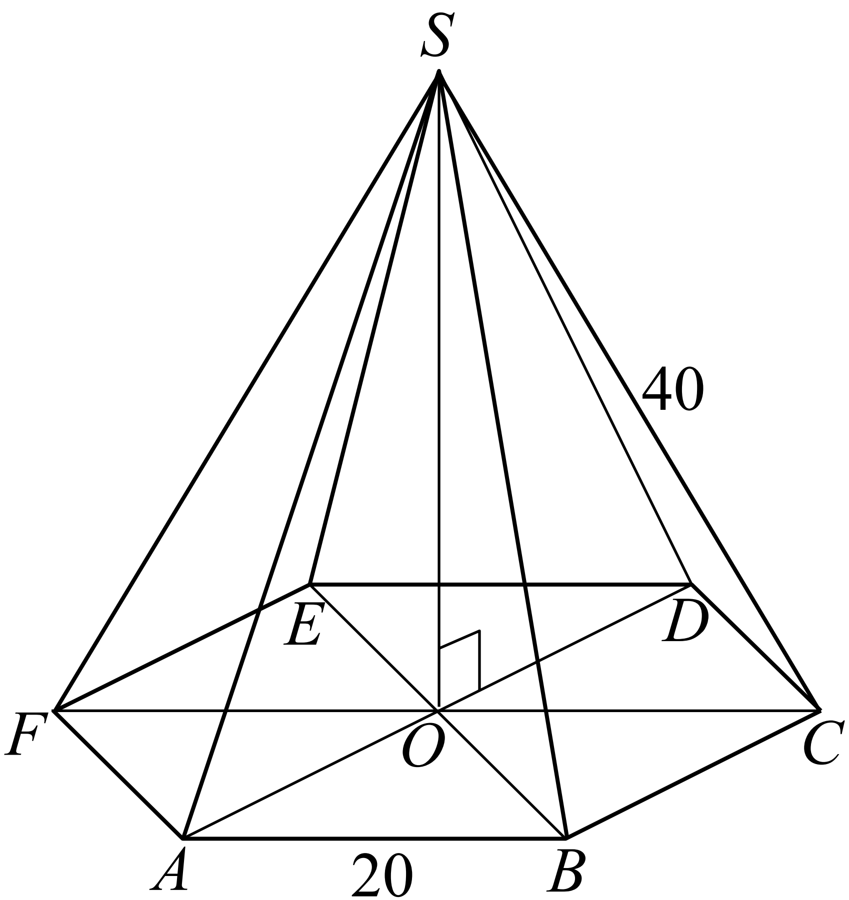
$$AS^2 = \left(5\sqrt{10}\right)^2 + 120^2 = 130^2$$

$$AS = 130.$$

Ответ: 130

№22

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 20, боковое ребро равно 40. Найдите объём пирамиды.



Решение.

В правильном шестиугольнике

$OC = AB = 20,$

$$S_{осн.} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 20^2\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}$$

В п/у ΔSOC *по т. Пифагора*

$$SO^2 = SC^2 - OC^2$$

$$SO^2 = 40^2 - 20^2 = 1200$$

$$SO = 20\sqrt{3}$$

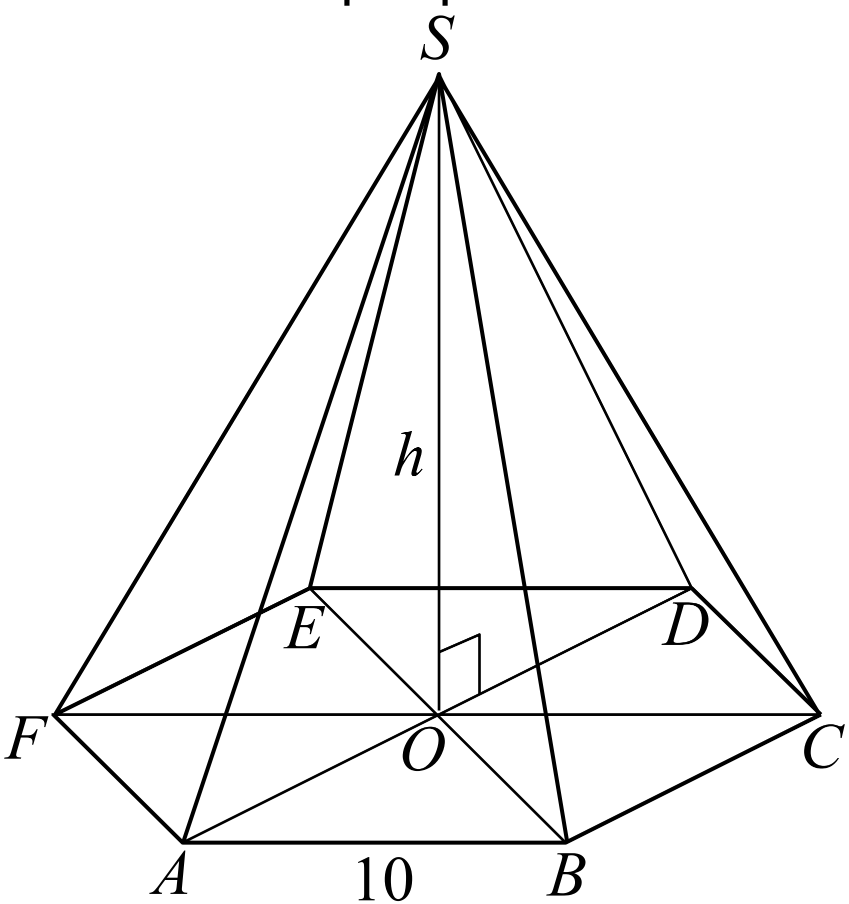
$$V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3}\cdot 600\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{3} = 12000.$$

Ответ:

№23

Объём правильной шестиугольной пирамиды 6000. Сторона основания равна 10. Найдите боковое ребро.



Решение.

В правильном шестиугольнике

$$OC = AB = 10,$$

$$S_{осн.} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 10^2\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h \Rightarrow h = \frac{3V_{пир.}}{S_{осн.}}$$

$$h = \frac{3\cdot 6000}{150\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} = SO$$

В п/у ΔSOC по т. Пифагора

$$SC^2 = SO^2 + OC^2$$

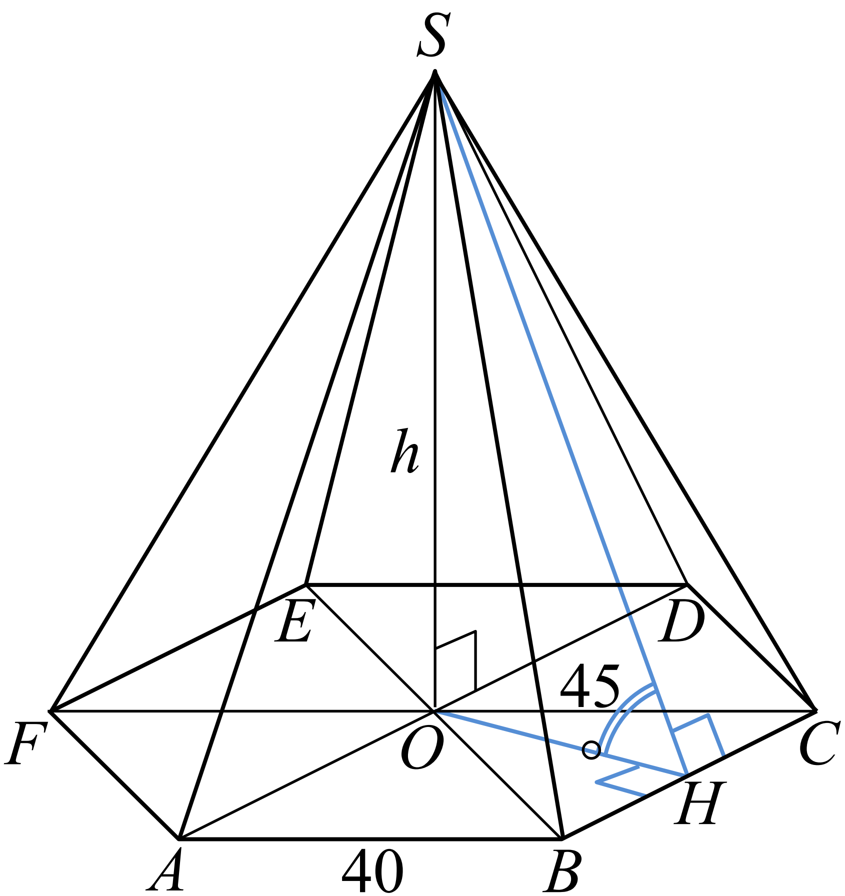
$$SC^2 = \left(40\sqrt{3}\right)^2 + 10^2 = 4900$$

$$SO = 70.$$

Ответ:

№24

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 40, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объём пирамиды.



Решение.

В правильном шестиугольнике

$$OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{40\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}$$

$$S_{осн.}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3\cdot 40^2\sqrt{3}}{2}=2400\sqrt{3}$$

$$\Delta SOH - \ п/у,\ \ р/б \Rightarrow$$

$$SO=OH=20\sqrt{3}$$

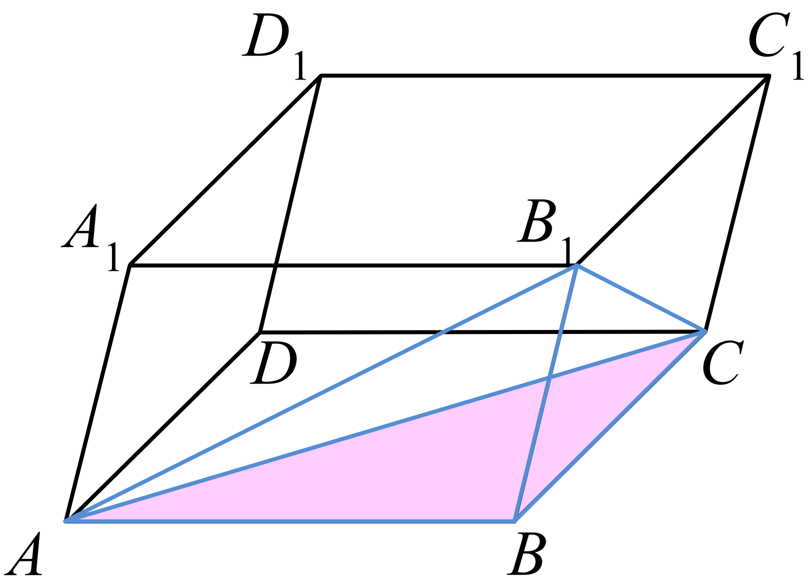
$$V_{пир.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$$

$$V_{пир.}=\frac{1}{3}\cdot 2400\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{3}=4800.$$

Ответ: 4800

№25

Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 120. Найдите объём треугольной пирамиды B_1ABC.



Решение.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Высота пирамиды совпадает с высотой параллелепипеда

$$V_{пар-да} = S_{ABCD} \cdot h = 120$$

$$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot h$$

$$V_{B_1ABC} = \frac{1}{6} V_{пар-да} = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20.$$

Ответ: 20