# Виды тригонометрических уравнений

Выполнила  ученица 10 класса
Назарова Марина

# Так какие же они эти уравнения?

# Решение простейших тригонометрических уравнений

# Уравнение cos t = a.

Если |a|>1, то уравнение не имеет корней.
Если |a|≤1, то

$$t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

**Частные случаи:**

$\cos t = 0,\ t = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z.$

$\cos t = 1,\ t = 2\pi n,\ n \in Z.$

$\cos t = -1,\ t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$\cos(\arccos a) = a$

# Уравнение sin t = a.

Если |a|>1, то уравнение не имеет решений.

Если |a|≤1, то

**$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$**

**Частные случаи:**

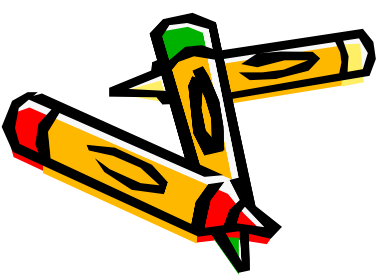
$\sin t = 0,\ t = \pi n,\ n \in Z.$

$\sin t = 1,\ t = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\sin t = -1,\ t = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z.$

**$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$**

$\arccos a + \arcsin a = \pi/2$



# Уравнение tg t = a

$t = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$

# Уравнение ctg t = a.

$t = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.$

$\operatorname{arcctg}(-a) = -\operatorname{arcctg} a.$

$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \pi/2$

# Типы тригонометрических уравнений

# Уравнения приводимые к алгебраическим

# Уравнение $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$.

Обозначив $\sin x = y$, получим уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Его корни

$y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению простейших уравнений

$\sin x = 1$ и $\sin x = -2$.

Уравнение $\sin x = 1$ имеет корни $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

Уравнение $\sin x = -2$ не имеет корней.

# Уравнение
# $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$

Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем:

$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$ или

$2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$

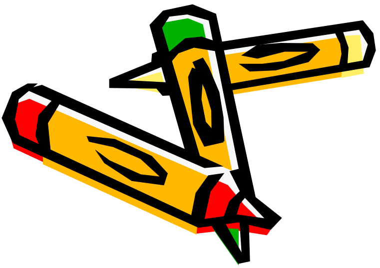
Обозначая $\sin x = y$, получаем

$2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\sin x = -3$ – уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$.

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$.

# Уравнения, являющиеся равенством двух одноименных тригонометрических функций.



# Уравнение вида
# $\sin f(x) = \sin \varphi(x)$

Равносильно единению уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) + 2\pi k,\ k \in Z \\ \\ f(x) = \pi - \varphi(x) + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

# Уравнение вида $\cos f(x) = \cos \varphi(x)$

Равносильно единению уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) + 2\pi n,\ n \in Z \\ f(x) = -\varphi(x) + 2\pi m,\ m \in Z \end{array}\right.$$

# Уравнение вида
# tg f(x) = tg φ(x)

Равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x) + \pi k; \\ \varphi(x) \neq \pi/2 + \pi n \text{ ( или } f(x) \neq \pi/2 + \pi m), \; k, n, m \in Z \end{cases}$$

# Однородные уравнения

# $2\cos x - 3\sin x = 0$

Это однородное уравнение первой степени. Обе части уравнения нужно разделить на $\cos x = 0$. Уравнение $\cos x = 0$ не содержит корней данного уравнения. Действительно, если

$$\begin{cases} \cos x_0 = 0, \\ 2\cos x_0 - 3\sin x0 = 0, \end{cases} \quad \text{то} \quad \begin{cases} \cos x_0 = 0, \\ \sin x_0 = 0, \end{cases}$$

но это не возможно, так как $\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0 = 1$.

Следовательно, имеем равносильное уравнение

$\operatorname{tg} x = 2/3$;

$x = \operatorname{arctg} 2/3 + \pi m,\ m \in Z$.

## $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

Это уравнение второй степени. Значения $x$, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями этого уравнения, так как если $\cos x = 0$, то должно выполнятся равенство $3\sin^2 x = 0$, а косинус и синус не могут быть одновременно равными нулю. Поэтому можно обе части уравнения разделить на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$) и при этом получить уравнение, равносильное данному уравнению $3\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$, откуда $\mathrm{tg}\,x = 1$ или $\mathrm{tg}\,x = 1/3$. Следовательно,

$x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z$, или $x = \mathrm{arctg}\,1/3 + \pi n,\ n \in Z$.

Если уравнение может быть приведено к виду, когда его левая часть однородное выражение второй степени относительно тригонометрических функций, а в правой есть число, отличное от нуля, то такое уравнение можно привести к однородному уравнению второй степени относительно cos f(x) и sin f(X), представив число в правой части

$a = a(\sin^2 f(x) + \cos^2 f(x))$.

# Уравнения, решающиеся разложением на множители.

При решении этого типа уравнения необходимо пользоваться известным правилом: произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

1) $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \qquad\qquad \text{или} \quad 3\,\mathrm{tg}\,x = 5 \\ \cos x \neq 0, \end{array}\right.$

$x = \mathrm{arctg}\,5/3 + \pi m,\ m \in Z.$

2) $(2\cos x - 1)\sqrt{\sin x} = 0,$

$\sin x = 0$ или $\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x > 0. \end{array}\right.$

$x = \pi k,\ k \in Z;$

**Уравнения вида**

**$a \cos x + b \sin x = c (a \cdot b \cdot c \neq 0)$**

Один из способов решения такого уравнения состоит в том, что левую часть уравнения можно преобразовать по формуле:

$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (x - \varphi)$, где

$$\begin{cases} \cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2} \\ \sin \varphi = b/\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

# Уравнения, решающиеся оценкой значения левой и правой части.

1) $2 \cos 3x + 4 \sin x/2 = 7$. Уравнение корней не имеет.
2) $3 \cos 3x + \cos x = 4$.

Так как $\cos x \leq 1$,

$3\cos 3x \leq 3$,

то $\cos x + 3 \cos 3x \leq 4$

и равенство возможно лишь при $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1. \end{cases}$

Корни первого уравнения определяются формулой $x = 2\pi к$, $к \in Z$

Подставим эти значения *х* во второе уравнение:

$\cos 3x = \cos (6 \pi к) = 1$ (верно). Значит, это корни данного уравнения.