

Математичні методи дослідження операцій (ММДО)

Лекцій – 36 год.

Лабораторних робіт – 18 год.

Практичних занять – 27 год.

СРС – 69 год.

Разом – 150 год.

Перелік рекомендованої літератури

- Математичні методи дослідження операцій. Лінійне програмування. Частина 1 : навчальний посібник / **А. А. Яровий, Л. М. Ваховська, Л. В. Крилик**. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 86 с.
- **Роїк О.М., Месюра В.І., Ракитянська Г.Б.** Математичні методи дослідження операцій. Ч1. Теорія та практика лінійного програмування. Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2002.
- **Хом'юк І.В., Карпенко В.Л., Хом'юк В.В.** Математичне програмування. Частина 1. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2004.
- **Хом'юк І.В., Хом'юк В.В., Карпенко В.Л.** Математичне програмування. Частина 2. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005.
- **Катренко А.В.** Дослідження операцій. Підручник. – Львів: «Магнолія 2006», 2009. – 350 с.
- **Зайченко Ю.П.** Дослідження операцій. Підручник. 7-е видання. – К.: ВД "Слово", 2006. – 816 с.
- **Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П.** Дослідження операцій. Збірник задач. – К.: ВД "Слово", 2007. – 472 с.
- **Хемди А. Таха** Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2007. – 912 с.

МРС ММДО

Поточний рубіжний контроль та самостійна робота		Екзамен	Сума
Модуль №1	Модуль №2		
39	36	25	100

Модуль №1 8 тижнів	Модуль №2 7 тижнів
Заг. сума балів = 39	Заг. сума балів = 36
Колоквіум №1 = 10 (2+2+4+2)	Колоквіум №2 = 10 (2+2+4+2)
3 лаб. роботи = 12 (1 лаб. робота = 4)	3 лаб. роботи = 12 (1 лаб. робота = 4)
5 практ. заняття = 15 (1 практ. заняття = 3)	4 практ. заняття = 12 (1 практ. заняття = 3)
СРС = 2	СРС = 2
Всього за М1 та М2 : 39+36= 75 балів	

Лекція 1. Предмет і задачі дисципліни “Математичні методи дослідження операцій” Основні поняття і термінологія

План:

- Предмет та задачі дослідження операцій (ДО).
- Лінійне та нелінійне програмування: побудова математичних моделей проблемних ситуацій.
- Основні принципи і задачі ДО.
- Етапи ДО.
- Розділи і класи задач ДО
- Математичне моделювання та його етапи
- Місце лінійного програмування в математичному програмуванні
- Теоретичні основи лінійного програмування

Предмет та задачі ДО

Яку ж конкретно роль відіграють математичні методи і моделі у техніці та технічних науках.

Використання їх дає можливість:

- точно і компактно викладати визначення і закони;**
- виділяти і формально описувати найістотніші зв'язки змінних і характеристик;**
- одержувати висновки про функціонування об'єкта;**
- отримувати нові знання про об'єкт;**
- передбачати майбутню поведінку об'єкта у разі зміни якихось його параметрів.**

Предмет та задачі ДО

Модель — це такий матеріальний або уявлюваний об'єкт (об'єкт-замінник), який у процесі дослідження заміщає об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про об'єкт-оригінал.

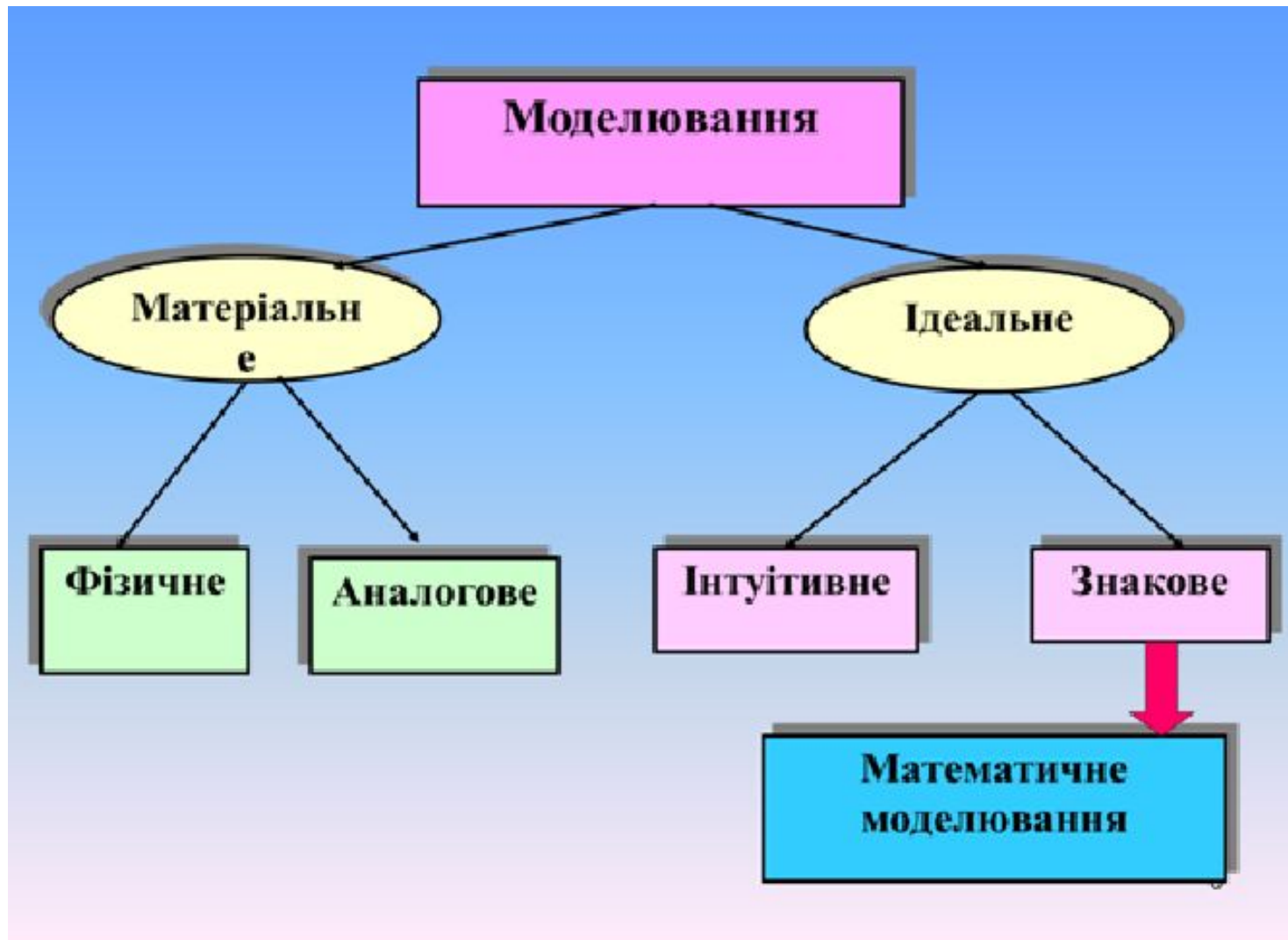
Предмет та задачі ДО

Модель потрібна щоб

- зрозуміти з чого складається конкретний об'єкт;
- навчитись керувати об'єктом (процесом) і визначати найкращі способи управління при заданих умовах;
- прогнозувати прямі і непрямі наслідки реалізації заданих форм впливу на об'єкт.

Процес побудови, вивчення і застосування моделей називають моделюванням.

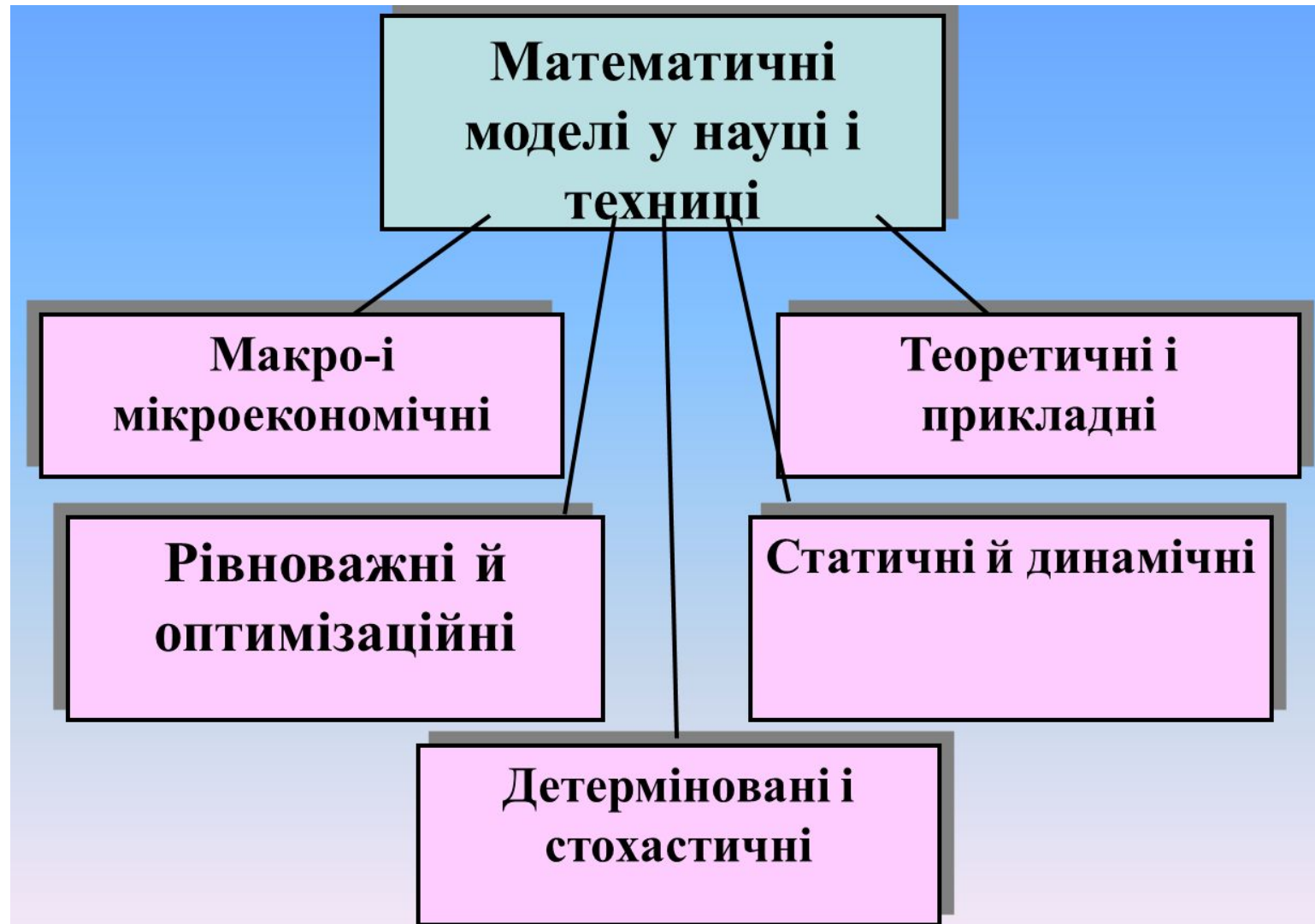
Предмет та задачі ДО



Предмет та задачі ДО

Математична модель об'єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

Предмет та задачі ДО



Предмет та задачі ДО

Дослідження операцій - це теорія використання наукових *кількісних* методів для прийняття **найкращого** рішення у різних галузях діяльності людини.

Ця наука дає об'єктивні, **кількісні** рекомендації з управління цілеспрямованими діями людини.

Предмет та задачі ДО

Томас Сааті



"Дослідження операцій - це мистецтво давати погані відповіді на ті практичні запитання, на які даються ще гірші відповіді за допомогою інших методів"

Предмет та задачі ДО

В 1939р. радянський математик Л. В. Канторович у роботі „Математичні методи організації та планування виробництва” сформулював клас умовно-екстремальних лінійних задач та запропонував методи їх розв'язування, що поклало початок **лінійному програмуванню**.

У 1951 р. була опублікована робота Г.М.Куна і А.В.Такера, у якій наведені необхідні і достатні умови оптимальності для розв'язання **нелінійних задач**.

Предмет та задачі ДО

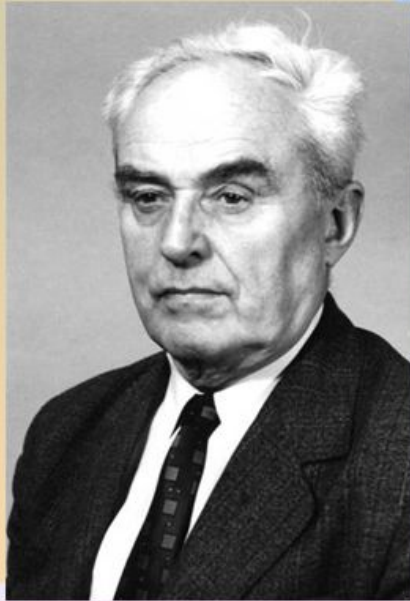
Широко відомими в світі є роботи українських вчених



В.М. Глушков - основоположник інформаційних технологій в Україні, засновник і директор Інституту кібернетики АН УРСР (1962-1982).

Великим є його вклад в розроблення та впровадження оптимізаційних задач в АСУ

Предмет та задачі ДО



О.Г. Івахненко

**Запропонував та розробив
метод групового врахування
аргументів, що знайшов
застосування в прогнозуванні
процесів**

Предмет та задачі ДО

Предметом дослідження операцій є: військові операції, рішення у політиці та виробництві, сільському господарстві, фінансових справах і т.п.

Ми будемо розглядати **виробничі** процеси у господарській діяльності людини.

Предмет та задачі ДО



Предмет та задачі ДО

Операція — це будь-який керований захід, спрямований на досягнення мети. Результат операції залежить від способу її проведення чи організації, інакше — від вибору деяких параметрів.

Будь-який вибір набору параметрів називається ***рішенням***.

Оптимальними вважаються ті рішення, що в обговореному заздалегідь сенсі мають переваги над іншими.

Предмет та задачі (ДО).

Дослідження операцій – це теорія використання наукових кількісних методів для прийняття найкращого (якісного) рішення у різних галузях людської діяльності.

Дослідження операцій – це розділ прикладної математики, що займається побудовою математичних моделей реальних задач і процесів (економічних, соціальних, технічних, військових і таких інших), їх аналізом і застосуваннями. Більшість цих моделей пов'язані з отриманням рекомендацій для прийняття «оптимальних» рішень.

Операція – будь-яка діяльність людини, спрямована на досягнення певної мети (у виробництві, у військових справах, у перевезенні вантажів, у плануванні робіт, у прийнятті політичного рішення та інші).

Перед дослідженням операцій стоять такі задачі:

- складання математичних моделей задач прийняття рішення;
- знаходження "оптимальних" рішень у різних класах задач;
- розробка необхідних і достатніх ознак оптимальності;
- розробка методів обчислення "оптимальних" рішень (аналітичних і чисельних).

Лінійне та нелінійне програмування: побудова математичних моделей проблемних ситуацій

Лінійне програмування - це метод математичного програмування, що об'єднує методи розв'язання задач, які описуються лінійними рівняннями.

Нелінійне програмування об'єднує методи розв'язання задач, які описуються нелінійними рівняннями.

Математична модель - це спрощена схема реального об'єкта (системи, процесу), складена за допомогою математичних символів і співвідношень.

Процес побудови математичної моделі називається **формалізацією**.
Процес формалізації - це один з найскладніших етапів прикладного математичного дослідження.

Основні принципи і задачі ДО.

- Отримане на основі дослідження операцій рішення має свої особливості:
- **1. Наукове кількісне обґрунтування** рекомендованої варіанту рішення із визначенням: найкращого способу дії повноти досягнення мети і ціни досягнутої мети, ступеня ризику.
- **2. Системний підхід:** будь-яка задача розглядається з точки зору її впливу на критерії функціонування всієї системи.
- **3. Дорогий фізичний експеримент** замінюється відносно дешевим математичним моделюванням, яке дає відповідь на багато питань і дозволяє прийняти оптимальне рішення. При цьому використовується ЕОМ.
- **4. Рекомендуючий характер** висновків із дослідження операцій: рішення приймає людина, яка повинна нести повну відповідальність за наслідки цих рішень.

Методи ДО вміщують цілий арсенал математичних засобів:

- теорію лінійного, нелінійного, дискретного (цілочисленого, бінарного, неподільного), динамічного, стохастичного програмування;
- теорію ігор;
- теорію систем масового обслуговування;
- прийняття рішень в умовах нечіткої інформації;
- теорію експертних систем.

Етапи ДО

1. **Визначення мети дослідження**
2. **Складання плану розробки проекту**
3. **Формулювання проблеми**
4. **Збір даних**
5. *Побудова математичної моделі*
6. *Розробка обчислювального методу*
7. *Розробка технічного завдання на програмування*
8. *Перевірка математичної моделі та оцінка рішення*
9. **Реалізація результатів на практиці**

етапи 1-4 – **доматематична частина дослідження**

етапи 5-8 – *математична частина дослідження*

етап 9 – **заключна частина**

Розділи і класи задач ДО

- Типовими класами задач дослідження операцій є:
- *Розподіл ресурсів.*
- *Управління запасами.*
- *Задачі мережного планування і управління*
- *Мережні задачі*
- *Задачі планування і розміщення*
- *Задачі дослідження конфліктних ситуацій*
- *Задачі масового обслуговування:*
- *Задачі складання розкладів (календарного планування)*
- *Ремонт та заміна устаткування.*
- *Задача рюкзака:* рюкзак (вантажна машина, вагон, судно, літак) має обмежену вантажопідйомність. Потрібно так заповнити рюкзак, щоб отримати максимальний прибуток.
- *Задачі комівояжера, створення сумішей, наймання / звільнення робітників, мережевого планування робіт, порядку обробки кількох різних деталей, комбіновані задачі* та ін. - усім цим займається наука "*Математичні методи дослідження операцій*".

Математичне моделювання та його етапи (I)

Математична модель – це відображення оригіналу у вигляді функцій, рівнянь, нерівностей, цифр і т.д.

Модель задачі математичного програмування включає:

- сукупність невідомих величин $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, діючи на які систему можна удосконалювати. Їх називають планом задачі (вектором рівняння, розв'язком, стратегією, поведінкою і т.п.);
- цільову функцію, яка дозволяє вибрати найкращий варіант з множини можливих. Цільова функція позначається $F(x)$. Це може бути прибуток, обсяг випуску або реалізації продукції, витрати виробництва, витрати обігу, рівень обслуговування чи дефіцитності і т.д.;
- умови (система обмежень), що накладаються на невідомі величини. Ці умови впливають з обмеження ресурсів, які має суспільство, з необхідності задоволення нагальних потреб, з умов виробничих та технологічних процесів. Математично обмеження виражаються у вигляді рівнянь і нерівностей. Їх сукупність утворює область допустимих рішень.

Математичне моделювання та його етапи (II)

- 1. Вивчення умови задачі (предметної області).
- 2. Визначення найважливіших факторів
- 3. Виділення відомих і невідомих параметрів.
- 4. Виявлення керованих і некерованих параметрів.
- 5. Доповнення умови задачі відсутніми відомостями.
- 6. Введення системи позначень.
- 7. Побудова математичної моделі задачі (математичний опис найважливіших факторів, співвідношень і зв'язків між параметрами).

Математичне моделювання та його етапи (III)

Вимоги до моделі:

- адекватність (відповідність моделі своєму оригіналу);
- простота (відсутність другорядних факторів);
- об'єктивність (відповідність наукових висновків реальним умовам);
- чутливість (здатність моделі реагувати на зміну параметрів);
- стійкість (малому збурюванню вихідних параметрів повинна відповідати мала зміна рішення задачі (моделі));
- універсальність (широта області застосування).

Місце лінійного програмування в математичному програмуванні

Залежно від особливостей цільової функції $F(x)$ і функцій обмежень $g_i(x)$, задачі математичного програмування діляться на:

- Задача лінійного програмування (ЗЛП) - задача оптимізації лінійної функції при лінійних обмеженнях.
- Задача нелінійного програмування (ЗНП) - задача оптимізації нелінійної функції при обмеженнях або без них (коли або $F(x)$ і / або $g_i(x)$ нелінійні).
- Задача дискретного (зокрема целочисленного) програмування - задача оптимізації, в якій на змінні задана додаткова вимога приймати лише дискретні (зокрема цілочисельні) значення.
- Задача динамічного програмування - задача оптимізації динамічних систем (тобто систем, що розвиваються зі зміною часу).
- Задача імовірнісного або стохастичного програмування - задача оптимізації, що містить випадкові величини.

Теоретичні основи лінійного програмування (І)

Задача математичного програмування

$$\max_{x \in X} f(x) \quad (f(x) \rightarrow \max)$$

або

$$\min_{x \in X} f(x) \quad (f(x) \rightarrow \min)$$

називається задачею лінійного програмування (ЛП), якщо цільова функція $f(x)$ є лінійною функцією, а множина допустимих рішень X задається лінійними нерівностями або рівняннями

$$\min (\max) f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1)$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1;$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2; \quad (2)$$

.....

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n \leq b_k;$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (3)$$

Теоретичні основи лінійного програмування (II)

Наведена модель є стандартною постановкою задачі ЛП, у якій в системі обмежень (2) можуть бути різні відношення типу

“ > ”, “ < ”, “ = ”.

Тут $c_1, \dots, c_n$ – коефіцієнти при цільовій функції (1),

$a_{11}, \dots, a_{nn}$ – коефіцієнти при змінних в системі обмежень,

$b_1, \dots, b_k$ – вільні члени системи обмежень.

Усі ці компоненти задачі ЛП є відомими (заданими) числами. Невідомими (шуканими) змінними будуть елементи вектора $\{x_1, \dots, x_n\}^T$. При цьому задача ЛП полягає у тому щоб знайти такі значення змінних $x_1^*, \dots, x_n^*$ (точку мінімуму (максимуму)), щоб вони, по-перше задовольняли обмеження (2) і (3) (умова допустимості), а, по-друге, щоб у точці $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ цільова функція f приймала мінімальне (максимальне) значення $f(x^*)$ (умова оптимальності). Аналогічно ставиться задача на мінімум.