Метод динамических сеток

Постановка задачи поиска глобального экстремума функции многих переменных

Дана целевая функция $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенная на множестве допустимых решений $D \subseteq R^n$.

Требуется найти глобальный условный максимум функции $f(x)$ на множестве D, т.е. такую точку $x^* \in D$, что

$$f(x^*) = \max_{x \in D} f(x), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $D = \{x \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, ..., n\}$.

Задача поиска минимума целевой функции $f(x)$ сводится к задаче поиска максимума путем замены знака перед функцией на противоположный:

$$f(x^*) = \min_{x \in D} f(x) = -\max_{x \in D}[-f(x)]. \qquad (2)$$

Стратегия поиска решения

При работе метода происходит эволюция начальной популяции – смена одного поколения другим путем расширения и последующего сокращения популяции.

В методе динамических сеток популяция представляется в виде некоторой *сетки*, состоящей из набора решений, называемых *узлами*. В процессе поиска сетка подвергается изменениям: *расширению* – добавлению новых узлов в сетку, и *сокращению* – удалению узлов, расположенных слишком близко друг к другу.

В методе динамических сеток рассматривается целевая функция $f(x)$. Каждому узлу ставится в соответствие вектор параметров $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ целевой функции. Каждый вектор $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T \in D$ является возможным решением поставленной оптимизационной задачи. При решении задачи используются конечные наборы $I=\{x^j=(x_1^j,x_2^j,\ldots,x_n^j)^T, j=1,2,\ldots,P\}\subset D$ возможных решений, называемые *популяциями* или *сеткой*, где x^j – узел с номером j, P – количество узлов в сетке. Применение метода динамических сеток сводится к исследованию множества D при помощи изменения сетки и перехода от одной популяции к другой. Чем больше значение целевой функции $f(x^j)$, тем более узел x^j подходит в качестве решения.

Метод динамических сеток имитирует эволюцию начальной популяции $I_0=\{x^j, j=1,2,\ldots,P \mid x^j=(x_1^j,x_2^j,\ldots,x_n^j)^T\in D\}$ и представляет собой итерационный процесс. Во время работы метода на каждой итерации происходит расширение (локальное, глобальное и дополнительное) и последующее сокращение сетки. Таким образом, формируется новая сетка. Критерием окончания поиска является достижение заранее заданного количества C вычислений целевой функции. В качестве приближенного решения задачи из последней популяции выбирается узел, которому соответствует наибольшее значение целевой функции.

В процессе расширения происходит добавление новых узлов в сетку. Стадия расширения состоит из нескольких этапов:

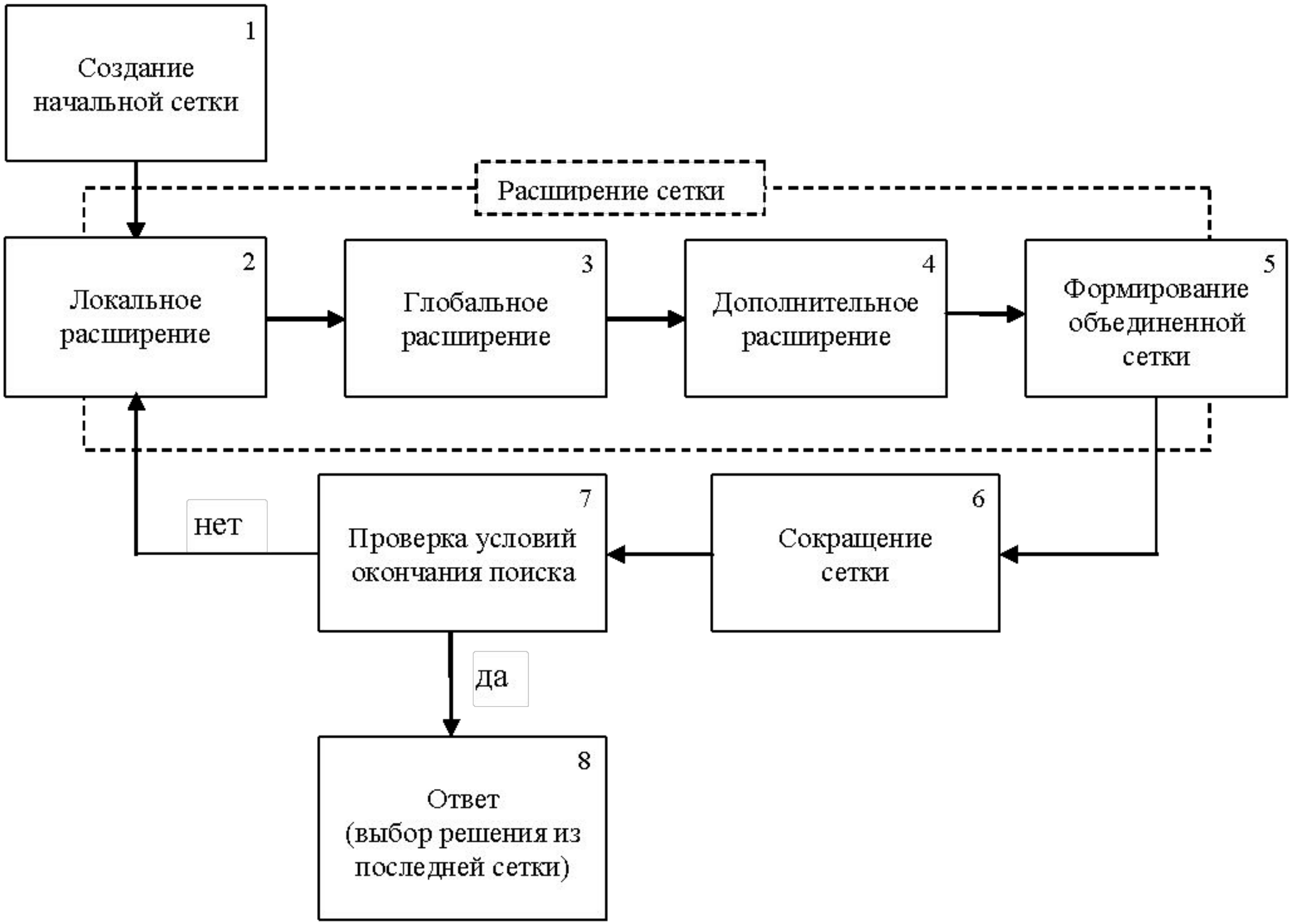
- локальное расширение,
- глобальное расширение,
- дополнительное расширение.

На этапе *локального расширения* в окрестности каждого p-го узла сетки, $p = 1, 2, ..., P$, выбирается некоторое заранее заданное число K ближайших по расстоянию узлов, называемых соседними узлами. Среди соседних узлов выбирается наилучший и, если данный соседний узел лучше p-го узла, то производится генерация нового узла в направлении наилучшего из K соседних узлов.

На этапе *глобального расширения* для всех узлов сетки, кроме наилучшего узла сетки x^{best}, производится генерация нового узла в направлении наилучшего узла сетки.

Если при локальном и глобальном расширении сгенерировано узлов меньше, чем заранее заданное число T, то выполняется *дополнительное расширение* сетки. Путем генерации новых узлов производится исследование новых участков множества допустимых решений.

На последующей за расширением *стадии сокращения* в методе динамических сеток происходит удаление слишком близких друг к другу решений, таким образом, стратегия метода направлена на поддержание достаточного разнообразия узлов в сетке.



Общая схема работы метода динамических сеток

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Шаг 1. *Задать параметры метода*:

P – размер популяции – количество узлов в сетке на каждой итерации;

T – число новых узлов, генерируемых в процессе расширения;

K – количество соседних узлов каждого узла сетки;

C – максимальное число вычисление целевой функции.

Вычислить:

– вектор амплитуд множества допустимых решений по каждой координате $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_n)^T$, где $\Delta_i = |b_i - a_i|$, $i = 1, ..., n$;

– центр множества допустимых решений – узел $x^m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m)^T$, где $x_i^m = \dfrac{a_i + b_i}{2}$, $i = 1, ..., n$.

Шаг 2. *Генерация начальной сетки*. С помощью равномерного распределения на множестве допустимых решений D сгенерировать сетку (начальную популяцию): $I_0 = \{x^p = (x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p)^T, \ p = 1, 2, ..., P\} \subset D$.

Задать счетчик количества вычислений целевой функции $c = 0$, и счетчик популяций $t = 0$.

Шаг 3. *Вычислить* значения целевой функции во всех узлах сетки: $f(x^1), f(x^2), ..., f(x^P)$, и найти среди них наилучшее решение x^{best}, которому соответствует наибольшее значение целевой функции: $f(x^{best}) = \max\limits_{p=1,..,P} f(x^p)$. Положить $c = c + P$.

Шаг 4. *Локальное расширение сетки*. Генерация новых узлов по направлению к локальным экстремумам в окрестности каждого узла.

Для каждого узла x^p, $p = 1,\ldots,P$ выполнить шаги 4.1.–4.4.

Шаг 4.1. Вычислить расстояния от p-го узла до всех остальных узлов сетки $d(x^p, x^j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^p - x_i^j\right)^2}$, $j = 1, 2, \ldots, P$, $j \neq p$.

Шаг 4.2. Выбрать K узлов $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^K$, для которых расстояние d_{pj} до узла x^p минимально, данные узлы являются соседними узлами с узлом x^p.

Шаг 4.3. Среди соседних узлов найти наилучший узел $\tilde{x}^{best}$, которому соответствует наибольшее значение целевой функции $f(\tilde{x}^{best}) = \max\limits_{k=1,\ldots,K} f(\tilde{x}^k)$.

Шаг 4.4. Сравнить значения целевой функции в узлах $\tilde{x}^{best}$ и x^p: если $f(\tilde{x}^{best}) < f(x^p)$, новый узел не генерировать; если $f(\tilde{x}^{best}) \geq f(x^p)$, то сгенерировать новый узел $x^{loc} = (x_1^{loc}, x_2^{loc}, \ldots, x_n^{loc})^T$:

– вычислить фактор близости текущего узла x^p и наилучшего соседнего с ним узла $\tilde{x}^{best}$: $Pr(x^p, \tilde{x}^{best}) = \dfrac{1}{1 + \left|f(x^p) - f(\tilde{x}^{best})\right|}$ (значение $Pr(x^p, \tilde{x}^{best})$ принадлежит отрезку $[0;1]$, чем больше значение целевой функции $f(x^p)$ в узле x^p, тем больше значение $Pr(x^p, \tilde{x}^{best})$);

– вычислить вектор средних значений $\tilde{m}^p = (\tilde{m}_1^p, \tilde{m}_2^p, \ldots, \tilde{m}_n^p)^T$, где $\tilde{m}_i^p = \dfrac{x_i^p + \tilde{x}_i^{best}}{2}$, $i = 1,\ldots,n$;

– вычислить вектор минимальных расстояний по каждой координате $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$, где каждая компонента ξ_i определяется по формуле:

$$\xi_i = \begin{cases} \dfrac{\Delta_i}{4}, \text{ если } c < 0,15\,C \\ \dfrac{\Delta_i}{8}, \text{ если } c \in [0,15\,C;\ 0,3\,C) \\ \dfrac{\Delta_i}{16}, \text{ если } c \in [0,3\,C;\ 0,6\,C) \\ \dfrac{\Delta_i}{50}, \text{ если } c \in [0,6\,C;\ 0,8\,C) \\ \dfrac{\Delta_i}{100}, \text{ если } c \geq 0,8\,C \end{cases}$$

– вычислить координаты нового узла x^{loc}:

$$x_i^{loc} = \begin{cases} m_i^p, \text{ если } \left|m_i^p - x_i^{best}\right| > \xi_i \text{ и } R[0,1] \leq Pr(x^p, x^{best}), \\ x_i^{best} + R[-\xi_i, \xi_i], \text{ если } \left|m_i^p - x_i^{best}\right| \leq \xi_i, \\ R\left[x_i^p, m_i^p\right] \text{ или } R\left[m_i^p, x_i^p\right] \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $R[x, y]$ – равномерное распределение на отрезке $[x, y]$, $i = 1, ..., n$.

В результате шага 4 генерируется множество новых узлов $I_{loc} = \{x^{loc,1}, x^{loc,2}, .., x^{loc,Z}\}$, состоящее из Z узлов.

Шаг 5. *Глобальное расширение сетки.* Генерация новых узлов по направлению к глобальному экстремуму.

Для каждого узла сетки с номером p, кроме наилучшего узла x^{best}, выполнить:

– вычислить фактор близости текущего узла x^p и наилучшего узла x^{best}: $Pr(x^p, x^{best}) = \dfrac{1}{1 + \left| f(x^p) - f(x^{best}) \right|}$;

– вычислить вектор средних значений $m^p = (m_1^p, m_2^p, .., m_n^p)^T$, где $m_i^p = \dfrac{x_i^p + x_i^{best}}{2}$, $i = 1, \ldots, n$;

– вычислить координаты нового узла x^{glob}:

$$x_i^{glob} = \begin{cases} m_i^p, & \text{если } R[0;1] \le Pr(x^p, x^{best}), \\ R\left[m_i^p; x_i^{best}\right] \text{ или } R\left[x_i^{best}; m_i^p\right], & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n.$$

В результате шага 5 генерируется множество новых узлов $I_{glob} = \{x^{glob,1}, x^{glob,2}, \ldots, x^{glob,P-1}\}$, состоящее из $(P-1)$ узлов.

Шаг 6. *Дополнительное расширение сетки*. Генерация новых узлов для границ сетки. Если $Z + P - 1 < T$, то выполнить шаги 6.1–6.5, иначе перейти к шагу 7.

Шаг 6.1. Найти расстояния от центра x^m множества допустимых решений до всех узлов сетки: $d(x^m, x^j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^m - x_i^j \right)^2}$, $j = 1, 2, \ldots, P$. Упорядочить все узлы по возрастанию расстояния от центра множества допустимых решений (первый элемент соответствует минимальному расстоянию, последний – максимальному): $I^{(\cdot)} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(P)}\}$, где узлы $x^{(1)}$ и $x^{(P)}$ удовлетворяют условиям: $d(x^m, x^{(1)}) = \min_{j=1,\ldots,P} d(x^m, x^{(j)})$, $d(x^m, x^{(P)}) = \max_{j=1,\ldots,P} d(x^m, x^{(j)})$.

Шаг 6.2. Вычислить вектор смещения $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, где $w_i = (w_i^0 - w_i^1) \cdot \dfrac{C - c}{C} + w_i^1$, $w_i^0 = \dfrac{\Delta_i}{10}$, $w_i^1 = \dfrac{\Delta_i}{100}$, $i = 1, \ldots, n$.

Шаг 6.3. Вычислить количество генерируемых узлов $Y = T - (Z + P - 1)$. Если $Y > P$, то положить $Y = P$.

Шаг 6.4. Генерировать по одному новому узлу для $\left[\dfrac{Y}{2}\right]$ последних узлов из упорядоченной популяции $I^{(\cdot)}$: $x^{ef,j} = (x_1^{ef,j}, x_2^{ef,j}, \ldots, x_n^{ef,j})^T$, $j = P, P-1, \ldots, P - \left[\dfrac{Y}{2}\right] + 1$,

$$x_i^{ef,j} = \begin{cases} x_i^{(j)} + w_i, \text{если} & x_i^{(j)} \geq 0, \\ x_i^{(j)} - w_i, \text{если} & x_i^{(j)} < 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Шаг 6.5. Генерировать по одному новому узлу для $Y - \left[\dfrac{Y}{2}\right]$ первых узлов из упорядоченной популяции $I^{(\cdot)}$: $x^{if,j} = (x_1^{if,j}, x_2^{if,j}, \ldots, x_n^{if,j})^T$, $j = 1, 2, \ldots, Y - \left[\dfrac{Y}{2}\right]$,

$$x_i^{if,j} = \begin{cases} \left| x_i^{(j)} + w_i \right|, \text{если} & x_i^{(j)} \geq 0, \\ \left| x_i^{(j)} - w_i \right|, \text{если} & x_i^{(j)} < 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n.$$

В результате шага 6 генерируется множество новых узлов $I_{ef,if} = \{x^{ef,1}, \ldots, x^{ef,\left[\frac{Y}{2}\right]}, x^{if,1}, \ldots, x^{if,Y-\left[\frac{Y}{2}\right]}\}$, состоящее из Y узлов.

Шаг 7. *Добавление сгенерированных узлов в текущую популяцию.*

Шаг 7.1. Вычислить значения целевой функции в узлах множеств I_{loc}, I_{glob} и $I_{ef,if}$; положить $c = c + Z + P - 1 + Y$

Шаг 7.2. Добавить узлы множеств I_{loc}, I_{glob} и $I_{ef,if}$ в текущую популяцию I_t и упорядочить узлы в популяции по убыванию соответствующих им значений целевой функции. В результате получается упорядоченная популяция, состоящая из $\tilde{P} = 2P + Z + Y - 1$ узлов: $I_t = \{x^p = (x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p)^T,\ p = 1, 2, ..., \tilde{P}\}$, $f(x^1) = \max\limits_{p=1,...,\tilde{P}} f(x^p)$, $f(x^{\tilde{P}}) = \min\limits_{p=1,...,\tilde{P}} f(x^p)$.

Шаг 8. *Сокращение популяции.* Задать индекс узла $j = 1$. Для j-го узла сетки выполнить шаги 8.1– 8.3.

Шаг 8.1. Вычислить векторы разностей координат узла x^j и всех последующих в упорядоченной популяции I_t узлов x^k: $\delta^{j,k} = \{\delta_1^{j,k}, \delta_2^{j,k}, ..., \delta_n^{i,k}\}$, где $\delta_i^{j,k} = \left| x_i^j - x_i^k \right|$, $k = j + 1, 2, ..., \tilde{P}$.

Шаг 8.2. Сравнить координаты векторов $\delta^{j,k}$, $k = j + 1, 2, ..., \tilde{P}$, с координатами вектора ξ, найденного на шаге 4:

– если для k-го узла для всех $i = 1, 2, ..., n$ выполняется условие $\delta_i^{j,k} \geq \xi_i$, то узел с индексом k остается в сетке;

– если условие $\delta_i^{j,k} \geq \xi_i$ не выполняется хотя бы для одной координаты i, $i = 1, 2, ..., n$, k-го узла, то удалить из сетки узел с индексом k, положить $\tilde{P} = \tilde{P} - 1$.

Шаг 8.3. Положить $j = j + 1$. Если $j \geq \tilde{P}$, то процесс сокращения завершить; если $j < \tilde{P}$, то повторить шаги 8.1– 8.3.

В результате шага 8 остается популяция, содержащая B узлов.

Шаг 9. *Генерация новой популяции.*

Сравнить количество оставшихся узлов в сетке B с количеством узлов в начальной сетке P:

– если $B < P$, то генерировать $P - B$ новых узлов, используя равномерное распределение на множестве допустимых решений D;

– если $B \ge P$, то выбрать P первых узлов сетки, которым соответствует наибольшее значение целевой функции.

Положить $t = t + 1$.

Шаг 10. *Проверка условий окончания работы алгоритма.*

Если $c < C$, то перейти к шагу 3; иначе перейти к шагу 11.

Шаг 11. *Получение приближенного решения.*

Завершить процесс поиска, в качестве приближенного решения задачи (5.1) выбрать из последней популяции узел, которому соответствует наибольшее значение целевой функции: $x^* \cong \tilde{x}^* = \arg\max\limits_{p=1,\dots,P} f(x^p)$.

Модификация метода динамических сеток

Шаг 8.2*. Сравнить координаты векторов $\delta^{j,p}$, $p = j+1, j+2, \ldots, P$, с координатами вектора ξ, найденного на шаге 4: если для p-го узла условие $\delta_i^{j,p} \ge \xi_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, не выполняется более чем для l координат, где l – параметр, то удалить из сетки узел с индексом p, положить $P = P - 1$.

Шаг 6*. *Локальное расширение сетки вблизи лучшего решения.*

Генерация новых узлов в окрестности лучшего узла сетки.

6.1. Для лучшего узла сетки u^{best} выполнить операцию клонирования: сгенерировать Nc клонов, где Nc – параметр операции клонирования.

6.2. Для клонов $u^{cl,j}$, $j = 1,2,\ldots,Nc$, выполнить операцию мутации:

1) используя равномерный закон распределения на отрезке $[0;1]$, сгенерировать случайный вектор $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$;

2) если $w_i < \beta$, где β – параметр метода, $i = 1,2,\ldots,n$, то координату $u_i^{cl,j}$ клона $u^{cl,j}$ заменить на $y_i^{cl,j}$: $y_i^{cl,j} = u_i^{cl,j} + \gamma \cdot N(0;1) \cdot (b_i - a_i)$, где γ – параметр;

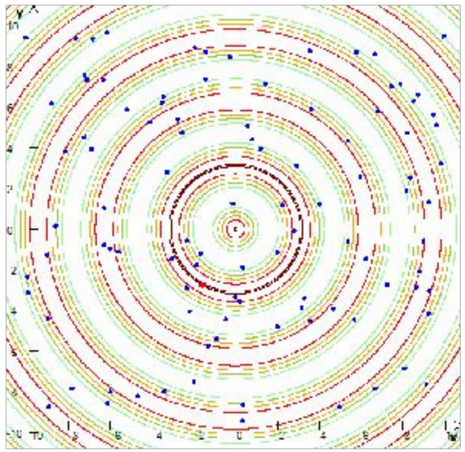
3) если $y_i^{cl,j} > b_i$, то положить $y_i^{cl,j} = b_i$; если $y_i^{cl,j} < a_i$, положить $y_i^{cl,j} = a_i$.

6.3. Вычислить соответствующие клонам-мутантам значения функции приспособленности $I(x^{cl,j}(\cdot), u^{cl,j}(\cdot))$, $j = 1,2,\ldots,Nc$. Положить $c = c + Nc$.

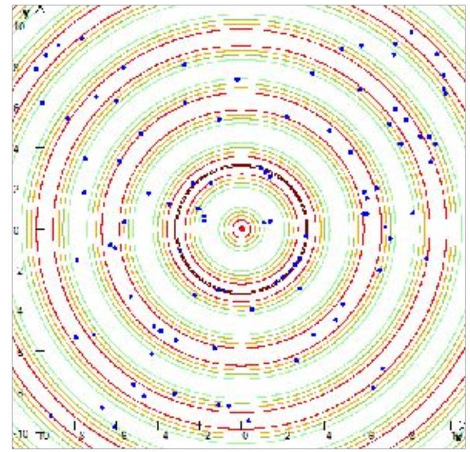
В результате шага 6* генерируется множество узлов $Y_{cl} = \{u^{cl,1}, \ldots, u^{cl,Nc}\}$.

Пример 1. Рассмотрим функцию Шаффера. Множество допустимых решений $x, y \in [-10;10]$. Параметры алгоритма: размер популяции $P = 100$; количество вычислений целевой функции $C = 5000$; количество соседних узлов $K = 5$; количество генерируемых узлов при расширении $T = 200$;

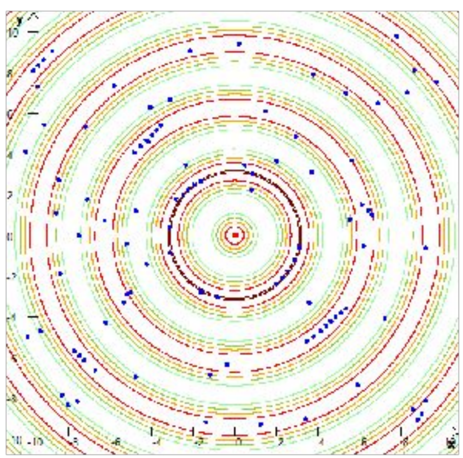
На рис. представлена начальная ($t = 0$), промежуточные ($t = 3$, $t = 15$) и конечная ($t = 21$) популяции. Результаты работы метода динамических сеток: сформировано популяций $t = 21$; узел с наилучшим значением целевой функции $(x^*; y^*)^T = (-0{,}0199; -0{,}0141)^T$; наилучшее значение целевой функции $f(x^*; y^*) = 0{,}9994$; отклонение от точного решения $\Delta = 0{,}0006$.



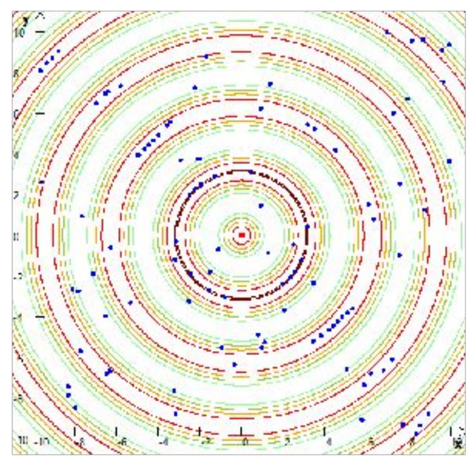
$t = 0$



$t = 3$

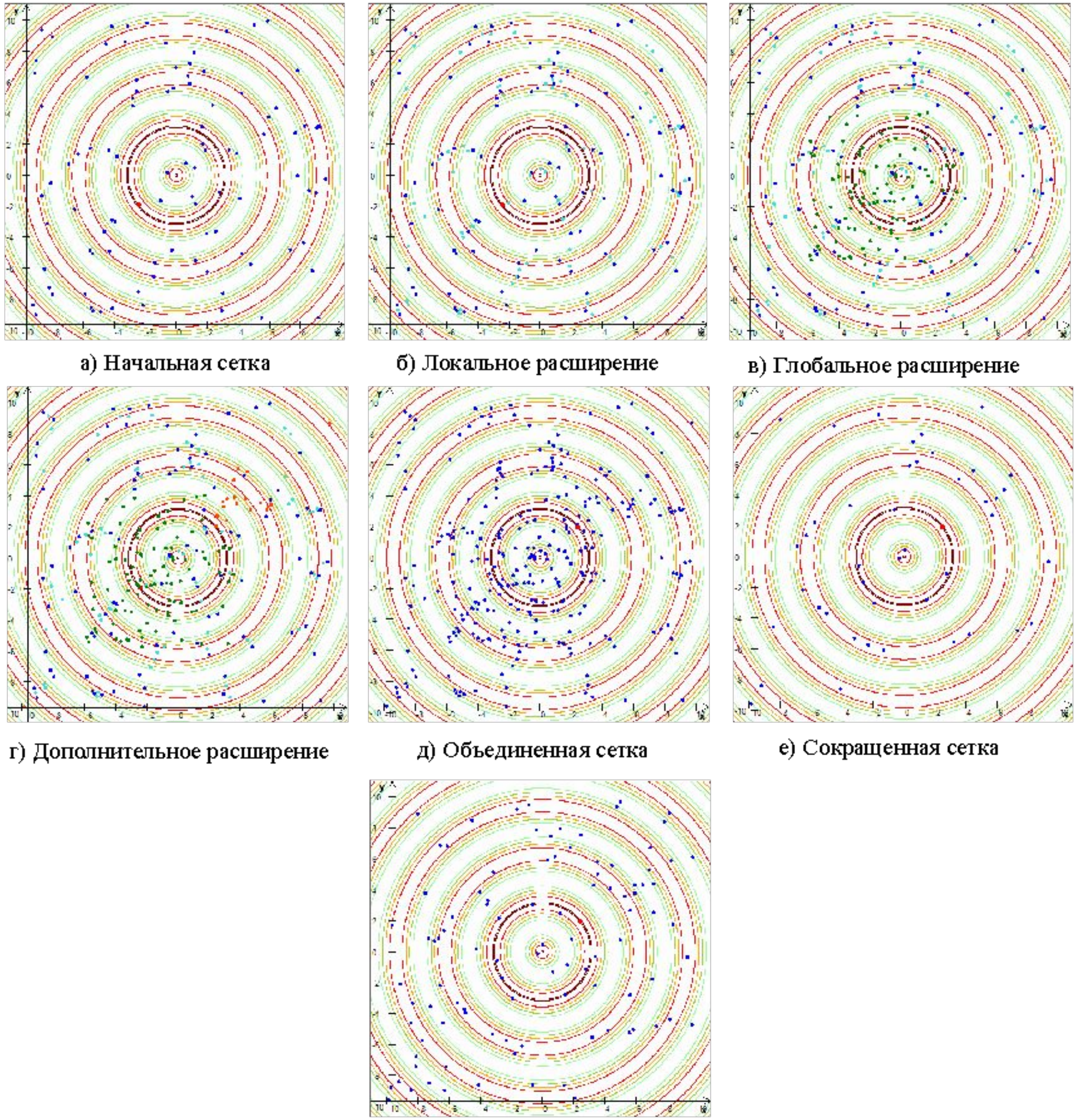


$t = 15$



$t = 21$

Начальная, промежуточные и конечная популяции



а) Начальная сетка

б) Локальное расширение

в) Глобальное расширение

г) Дополнительное расширение

д) Объединенная сетка

е) Сокращенная сетка

ж) Новая сетка

Формирование новой сетки

Результаты применения эволюционных методов к задаче поиска экстремума функции многих переменных

Среднее отклонение от точного решения по 1000 запускам

	ГА и БК	ГА с ВК	ИИС	Расш. ИИС	SS	CMA-ES	Мод. CMA-ES	VMO
Параболическая функция	$3{,}04\cdot10^{-8}$	$2{,}08\cdot10^{-6}$	$3{,}69\cdot10^{-7}$	**$1{,}64\cdot10^{-5}$**	$1{,}41\cdot10^{-5}$	**$1{,}08\cdot10^{-43}$**	$1{,}35\cdot10^{-8}$	$9{,}13\cdot10^{-6}$
Функция Розенброка	$5{,}51\cdot10^{-4}$	$1{,}51\cdot10^{-2}$	**$5\cdot10^{-6}$**	$3{,}45\cdot10^{-3}$	$6{,}\ 57\cdot10^{-4}$	**0,12**	$6{,}87\cdot10^{-3}$	$3{,}41\cdot10^{-4}$
Функция Швефеля	**$1{,}53\cdot10^{-7}$**	$3{,}3\cdot10^{-3}$	$3{,}72\cdot10^{-4}$	17,63	0,74	**283**	2,97	0,0374
Мульти-функция	**$3{,}17\cdot10^{-7}$**	$1{,}25\cdot10^{-3}$	$6\cdot10^{-6}$	$5{,}23\cdot10^{-4}$	$1{,}34\cdot10^{-2}$	**1,39**	$3{,}03\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-6}$
Корневая функция	$5{,}98\cdot10^{-4}$	$1{,}79\cdot10^{-2}$	$1{,}2\cdot10^{-3}$	$2{,}\ 83\cdot10^{-5}$	**$2{,}27\cdot10^{-2}$**	**$1{,}19\cdot10^{-10}$**	$2{,}24\cdot10^{-4}$	$6{,}65\cdot10^{-3}$
Функция Шаффера	$4{,}67\cdot10^{-3}$	$3{,}47\cdot10^{-3}$	$3{,}85\cdot10^{-3}$	**$4{,}47\cdot10^{-6}$**	$1{,}7\cdot10^{-3}$	**$8{,}15\cdot10^{-3}$**	$4{,}34\cdot10^{-3}$	$1{,}41\cdot10^{-3}$
Функция Экли	$1{,}94\cdot10^{-3}$	$3{,}36\cdot10^{-3}$	$1{,}03\cdot10^{-2}$	$1{,}06\cdot10^{-2}$	$8{,}36\cdot10^{-3}$	**0**	$6{,}61\cdot10^{-4}$	0,0389
Функция Растригина	**$6{,}68\cdot10^{-5}$**	$3{,}8\cdot10^{-4}$	0,1636	$6{,}45\cdot10^{-2}$	$1{,}52\cdot10^{-2}$	**0,65**	0,02	$8{,}73\cdot10^{-3}$

Примеры применения эволюционных методов

Пример 1. Задача оптимального управления дискретной системой. Поведение модели объекта управления описывается системой разностных уравнений

$$x_1(t+1)=\frac{x_1(t)}{1+0.01\cdot u_1(t)\cdot(3+u_2(t))};$$

$$x_2(t+1)=\frac{x_2(t)+u_1(t)x_1(t+1)}{1+u_1(t)\cdot(1+u_2(t))};$$

$$x_3(t+1)=\frac{x_3(t)}{1+0.01\cdot u_2(t)\cdot(1+u_3(t))},$$

где $t=0,1,\dots,N-1$, N - параметр задачи. Задано начальное состояние системы $x(0)=[2,\ 5,\ 7]^T$ и ограничения на управление $0\le u_1(t)\le 4$, $0\le u_2(t)\le 4$, $0\le u_3(t)\le 0.5$.

На множестве допустимых процессов определен функционал качества

$$I=x_1^2(N)+x_2^2(N)+x_3^2(N)+[\sum_{t=1}^{N-1}\left(x_1^2(t-1)+x_2^2(t-1)+2u_3^2(t-1)\right)\cdot$$

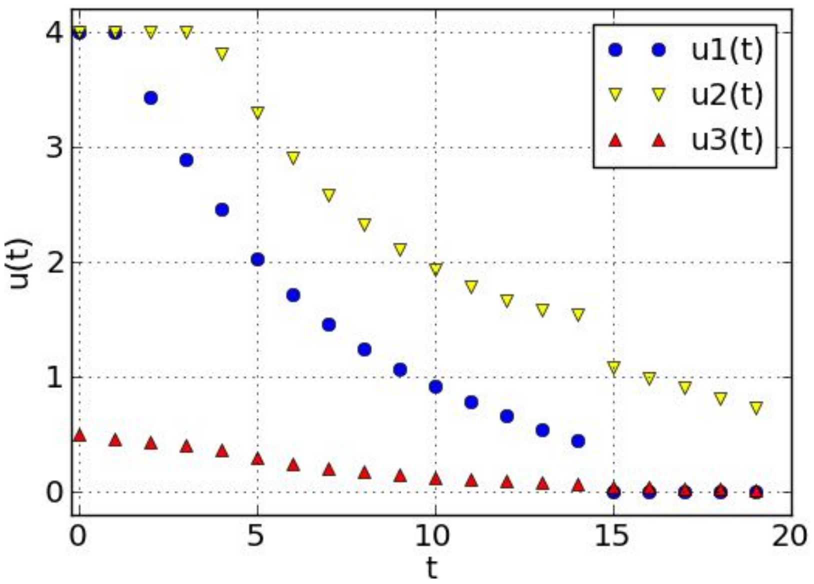
$$\sum_{t=1}^{N-1}\left(x_3^2(t-1)+2u_1^2(t-1)+2u_2^2(t-1)\right)]^{1/2}.$$

Требуется найти минимальное значение функционала и оптимальный процесс $\left(x^*(\cdot),u^*(\cdot)\right)$, на котором это значение достигается.

Примеры применения эволюционных методов

Результаты работы эволюционных методов в примере 1

Метод	*N=20*	*N=50*	*N=100*
ГА бинарным кодированием	209.27381	241.01111	260.83801
ГА с вещественным кодированием	**209.26937**	**240.91706**	**258.33987**
Метод ИИС	**211.74483**	**262.01719**	**326.71907**
Мод. метод ИИС	209.27319	**240.91904**	**258.34077**
Расширенный метод ИИС	209.30731	241.37386	261.13136
Мод. расширенный метод ИИС	**209.26945**	240.93244	258.40943
МДС	**216.73137**	**276.23071**	**353.11170**
Мод. МДС	209.27319	240.92003	258.97413
Метод ИДП	**209.26937**	**240.91700**	**258.33922**



Примеры применения эволюционных методов

Пример 2. Задача оптимального управления непрерывной системой. Поведение непрерывной модели объекта управления описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = u_4 - qx_1 - 17,6x_1x_2 - 23x_1x_6u_3;$$

$$\dot{x}_2 = u_1 - qx_2 - 17,6x_1x_2 - 146x_2x_3;$$

$$\dot{x}_3 = u_2 - qx_3 - 73x_2x_3;$$

$$\dot{x}_4 = -qx_4 + 35,2x_1x_2 - 51,3x_4x_5;$$

$$\dot{x}_5 = -qx_5 + 219x_2x_3 - 51,3x_4x_5;$$

$$\dot{x}_6 = -qx_6 + 102,6x_4x_5 - 23x_1x_6u_3;$$

$$\dot{x}_7 = -qx_7 + 46x_1x_6u_3;$$

$$\dot{x}_8 = 5,8\left(qx_1 - u_4\right) - 3,7u_1 - 4,1u_2 + q\left(23x_4 + 11x_5 + 28x_6 + 35x_7\right) - 5u_3^2 - 0,099,$$

где $q = u_1 + u_2 + u_4$, $0 \le t \le t_N = 0,2$.

Начальное условие: $x(0) = \left[0,1883; 0,2507; 0,0467; 0,0899; 0,1804; 0,1394; 0,1046; 0\right]^T$.

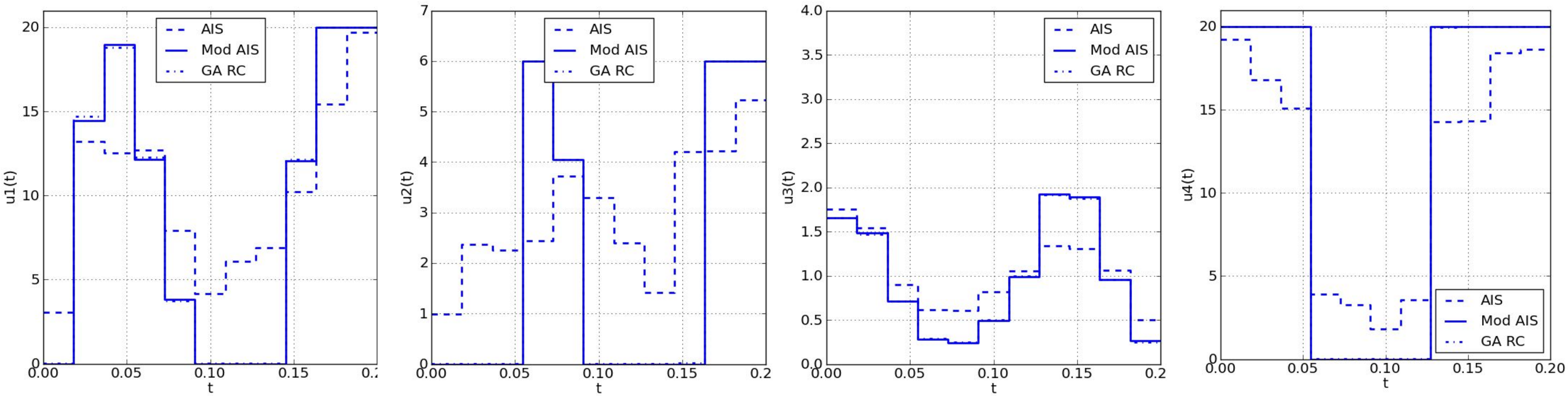
Ограничения на управление: $0 \le u_1(t) \le 20$, $0 \le u_2(t) \le 6$, $0 \le u_3(t) \le 4$, $0 \le u_4(t) \le 20$.

Критерий качества управления: $I = x_8(t_N)$. Необходимо максимизировать критерий.

Примеры применения эволюционных методов

Результаты работы эволюционных методов в примере 2

Метод	$N = 11$	$N = 20$	$N = 40$
ГА бинарным кодированием	**21.7660**	21.7938	21.7745
ГА с вещественным кодированием	**21.7660**	**21.7973**	**21.8178**
Метод ИИС	**21.1552**	**20.9672**	**20.6444**
Модифицированный метод ИИС	21.7483	**21.7970**	21.8007
Расширенный метод ИИС	21.5073	21.0973	20.8627
Мод. расширенный метод ИИС	21.7482	21.7935	21.6588
МДС	**20.4297**	**20.2702**	**19.7823**
Модифицированный МДС	21.7483	21.7950	**21.8118**
Метод ИДП	**21.7572**	--	--
Эволюционные алгоритмы	**21.7574**	--	--



Оптимальное управление, полученное методом ИИС, модифицированным методом ИИС и ГА с вещественным кодированием

Примеры применения эволюционных методов

Пример 3. Задача оптимального управления непрерывной системой с запаздыванием. Модель непрерывной детерминированной системы с запаздыванием описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_2(t);$$

$$\dot{x}_2 = -10x_1(t) - 5x_2(t) - 2x_1(t-\tau) - x_2(t-\tau) + u(t);$$

$$\dot{x}_3 = 0.5(10x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)),$$

где $0 \le t \le t_N = 5$, τ - время запаздывания, параметр задачи.

Начальное условие: $x_1(t) = x_2(t) = 1,\ -\tau \le t \le 0,\ x_3(0) = 0$.

Ограничения на управление: $-1 \le u \le 1$.

Критерий качества управления: $I = x_3(t_N)$.

Необходимо минимизировать критерий при помощи выбора кусочно-линейного управления, удовлетворяющего заданным ограничениям.

Примеры применения эволюционных методов

Результаты работы эволюционных методов в примере 3

Метод	*N=10*		*N=20*	
	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$
ГА бинарным кодированием	2.6080	2.9307	**2.6066**	**2.9295**
ГА с вещественным кодированием	2.6079	2.9307	2.6067	**2.9295**
Метод ИИС	**2.6077**	**2.9304**	2.6067	2.9296
Мод. метод ИИС	**2.6077**	**2.9304**	**2.6066**	**2.9295**
Расширенный метод ИИС	**2.6077**	2.9305	2.6067	**2.9295**
Мод. расширенный метод ИИС	**2.6077**	**2.9304**	**2.6066**	**2.9295**
МДС	**2.6121**	**2.9399**	**2.6217**	**2.9402**
Мод. МДС	**2.6077**	**2.9304**	**2.6066**	**2.9295**
Метод ИДП	**2.6076**	**2.9302**	**2.6064**	**2.9292**