Физика. Математика. Лекция 1

Математический анализ

Лектор: ЗЕЛЕЕВ МАРАТ ХАСАНОВИЧ

Понятие числовой функции

- Переменной величиной будем называть числовую величину, которая в изучаемой задаче принимает различные значения. Величина, принимающая только одно значение, есть частный случай переменной. Ее называют постоянной величиной или константой.
- Если в изучаемой задаче несколько переменных, то различают зависимые и независимые переменные. Таковыми переменные являются лишь по отношению друг к другу, и их различие определяется условием задачи.

Если каждому числу x ставится в соответствие одно, определенное по правилу f, число – значение числовой переменной y, то говорят, что на множестве X задана однозначная функция, или просто функция, и пишут $y=f(x)$ $x \in X$.

Переменную x называют аргументом, множество X – областью определения функции .

Множество всех значений переменной y, поставленных в соответствие значениям аргумента x из множества X, называют множеством значений функции $y = f(x)$. Обозначим его буквой Y.

Функция $y=f(x)$ полностью определена, если известна область ее определения X и для каждого значения аргумента x из области определения X известно соответствующее ему значение y или известно правило f, по которому может быть найдено

Предел функции и его свойства

Пусть f(x) — функция непрерывного аргумента. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать зависящее от ε число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x_0 - x| < \delta$, имеет место неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$. В формализованной форме это записывается так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Если при $x \to x_0$ функция $f(x)$ стремится к 0, то ее называют **бесконечно малой величиной** (или просто бесконечно малой) в окрестности точки x_0. Бесконечно малые на практике часто обозначают греческими буквами α, β, γ. Примеры бесконечно малых величин: $\alpha = 2x - 6$ при $x \to 3$, $\beta = e^{-x}$ при $x \to \infty$, $\gamma = \sin x$ при $x \to 0$ и т. п.

а) Если функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ конечный предел, равный числу A, то она представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to a$;

б) Если функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to a$, то $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Справедливы следующие свойства пределов.

1. Если предел функции существует, то он единственен.

2. Предел постоянной величины равен самой постоянной.

3. Если при $x \to x_0$ существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то:

$$\lim_{x \to x_0} [(af(x) + bg(x))] = a \lim_{x \to x_0} f(x) + b \lim_{x \to x_o} g(x),$$

где a и b — числа.

4. $$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

5. $$\lim_{x \to x_0} f(x) / g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) / \lim_{x \to x_0} g(x), \quad \textit{если} \quad \lim g(x) \neq 0.$$

Замечание: Разность двух функций бесконечно больших при $x \to a$,имеющих значения одинаковых знаков, неопределена; неопределены также частное двух бесконечно больших функций, частное двух бесконечно малых функций, произведение бесконечно малой и бесконечно большой функций. В этом случае говорят о неопред

$$\infty - \infty, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0} \text{ и } 0 \cdot \infty$$

.

Для нахождения предела выражения следует раскрыть соответствующую неопределенность.

Замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

В качестве примера вычислим два предела.

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{2x+1}{3+x} = \frac{2\lim\limits_{x \to -1} x + 1}{3 + \lim\limits_{x \to -1} x} = \frac{2(-1)+1}{3+(-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

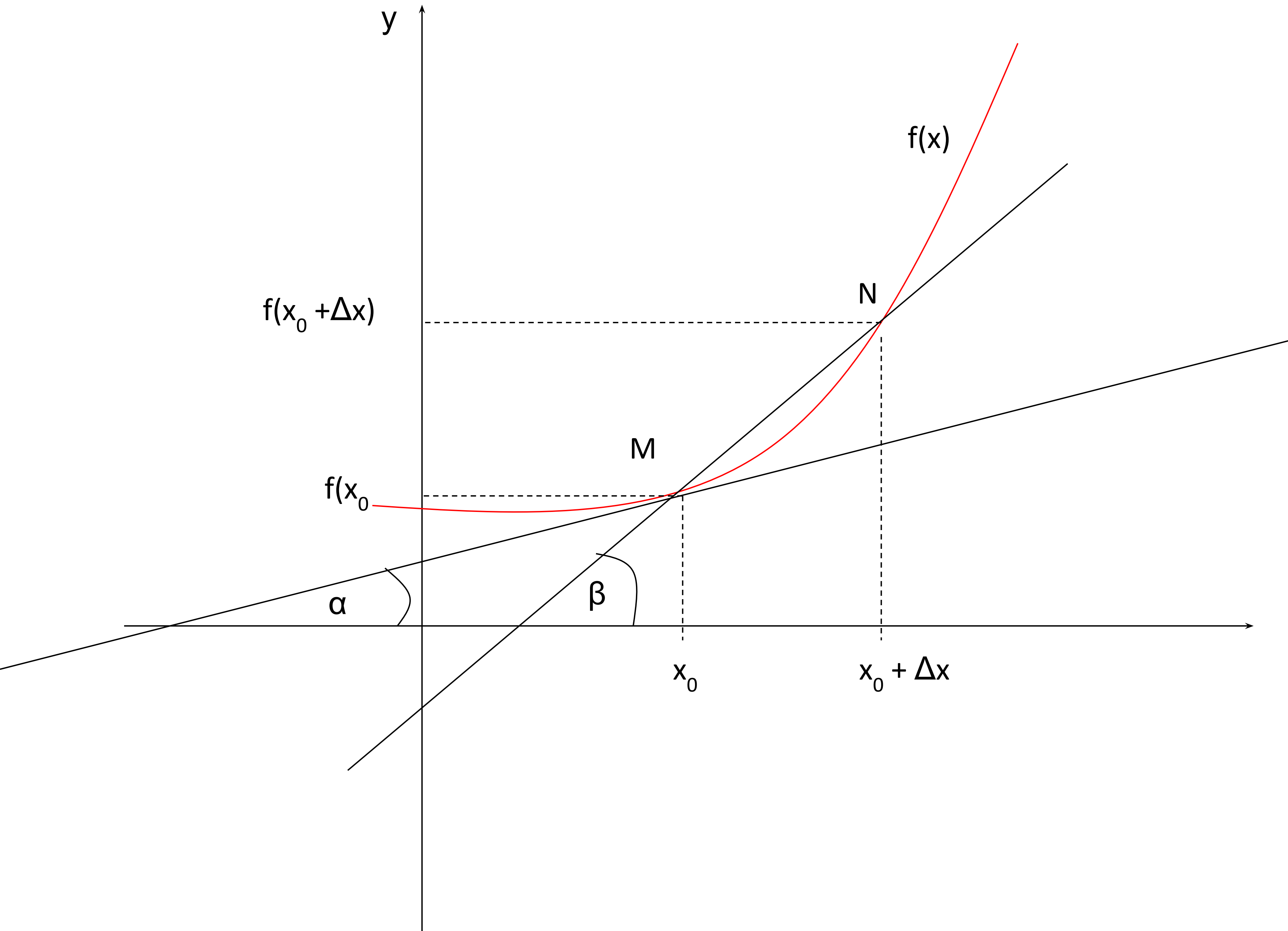
Определение производной

Если существует конечный предел отношения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то функция f(x) называется **дифференцируемой в точке** x, а значение предела называется **производной от функции** f(x) в точке x и обозначается

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv f'_x.$$



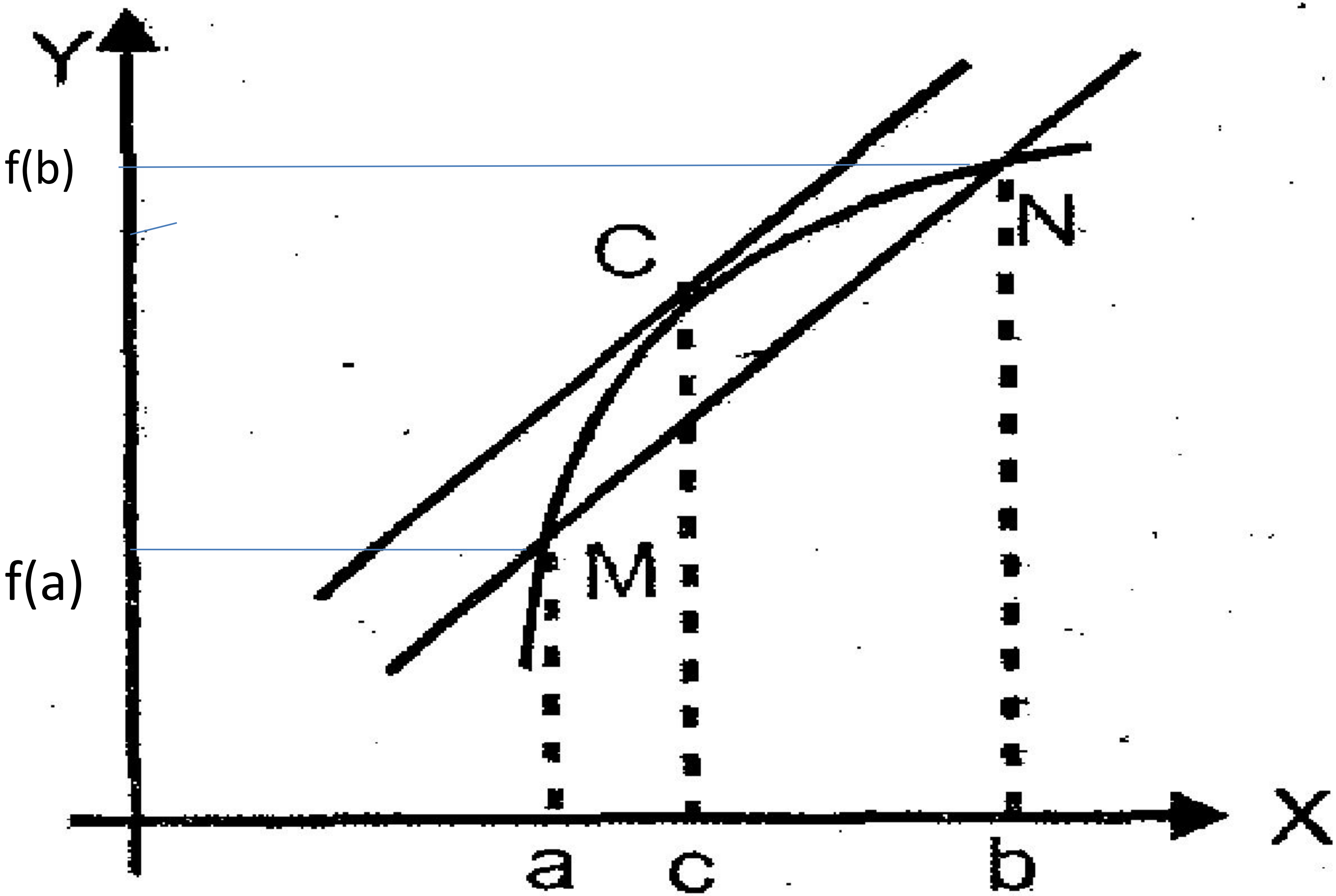
y
f(x)
N
$f(x_0 + \Delta x)$
M
$f(x_0$
α
β
x_0
$x_0 + \Delta x$

Пусть f(x) определена на некотором промежутке (a, b). Тогда тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha ,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$



Для практического применения математического анализа важен еще и механический смысл производной. Если пройденный путь есть известная функция времени $s = f(t)$, то ее производная $f'(t)$ равна скорости движения в каждый момент времени t. В общем случае *производная описывает скорость изменения функции* при изменении аргумента независимо от физического смысла величины, описываемой этой функцией.

Основные правила дифференцирования.

1. Производная линейной комбинации функций:

$$(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x))' = c_1 f_1'(x)+c_2 f_2'(x).$$

Например: $(6\sin x-2\ln x)' = 6\cos x-\dfrac{2}{x}$.

2. Производная произведения функций:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Например: $(\ln x\cdot\cos x)' = \dfrac{1}{x}\cdot\cos x-\ln x\cdot\sin x$.

3. Производная частного двух функций:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^1 = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Например:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\times\cos x-(-\sin x)\times\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0;$

2) $(x^m)' = mx^{m-1};$

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

8) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

<u>Производная сложной функции.</u>

<u>Теорема.</u> *Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции и входит в область определения функции f.*

Тогда $\boxed{y' = f'(u) \cdot u'}$

<u>Пример.</u> Найти производную функции

$$y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

.

Сначала преобразуем данную функцию:

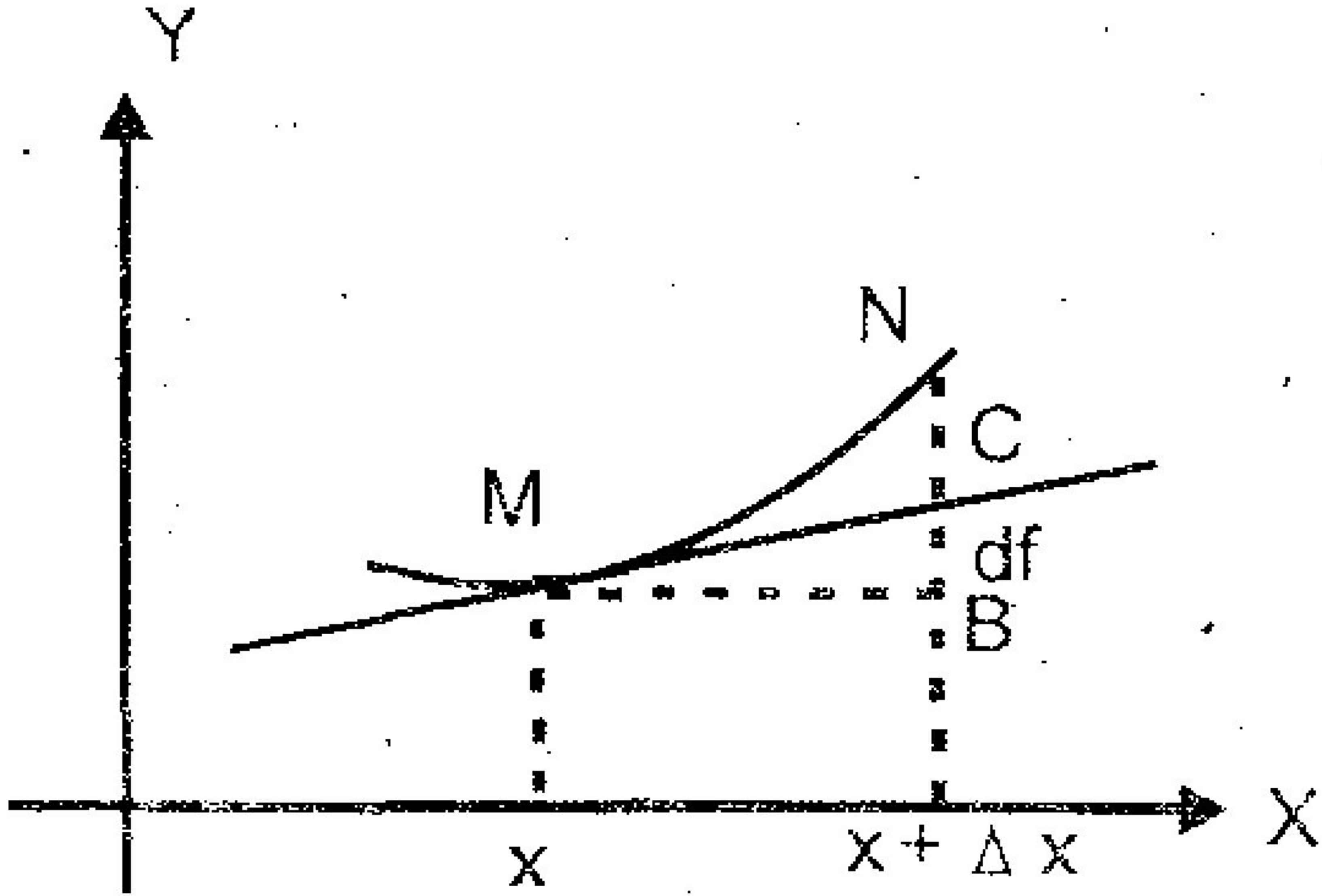
$$y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Дифференциалом df(x) функции f(x) в точке x называется произведение производной от функции f(x) в этой точке на величину приращения аргумента Δx:

$$df(x) = f'(x)\Delta x,$$

$$df(x) = f'(x)dx.$$


Y
N
C
M
df
B
X
X + Δ X
X

Производные высших порядков

$$(f'(x))' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

$$d^k f(x) = d\,(d^{k-1} f(x)) = \ldots = f^{(k)}(x)dx^k.$$

Интегральное исчисление.

Первообразная функция.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение:
Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x)+C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
1. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2-2\sin x+1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgx dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgx dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$	12	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$
5	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$
6	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{a} + C$
7	$\int x^{\alpha} dx$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \dfrac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \dfrac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int \dfrac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg\dfrac{x}{2}\right\rvert + C$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Способ подстановки (замены переменных).

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = sinx$, $dt = cosxdt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

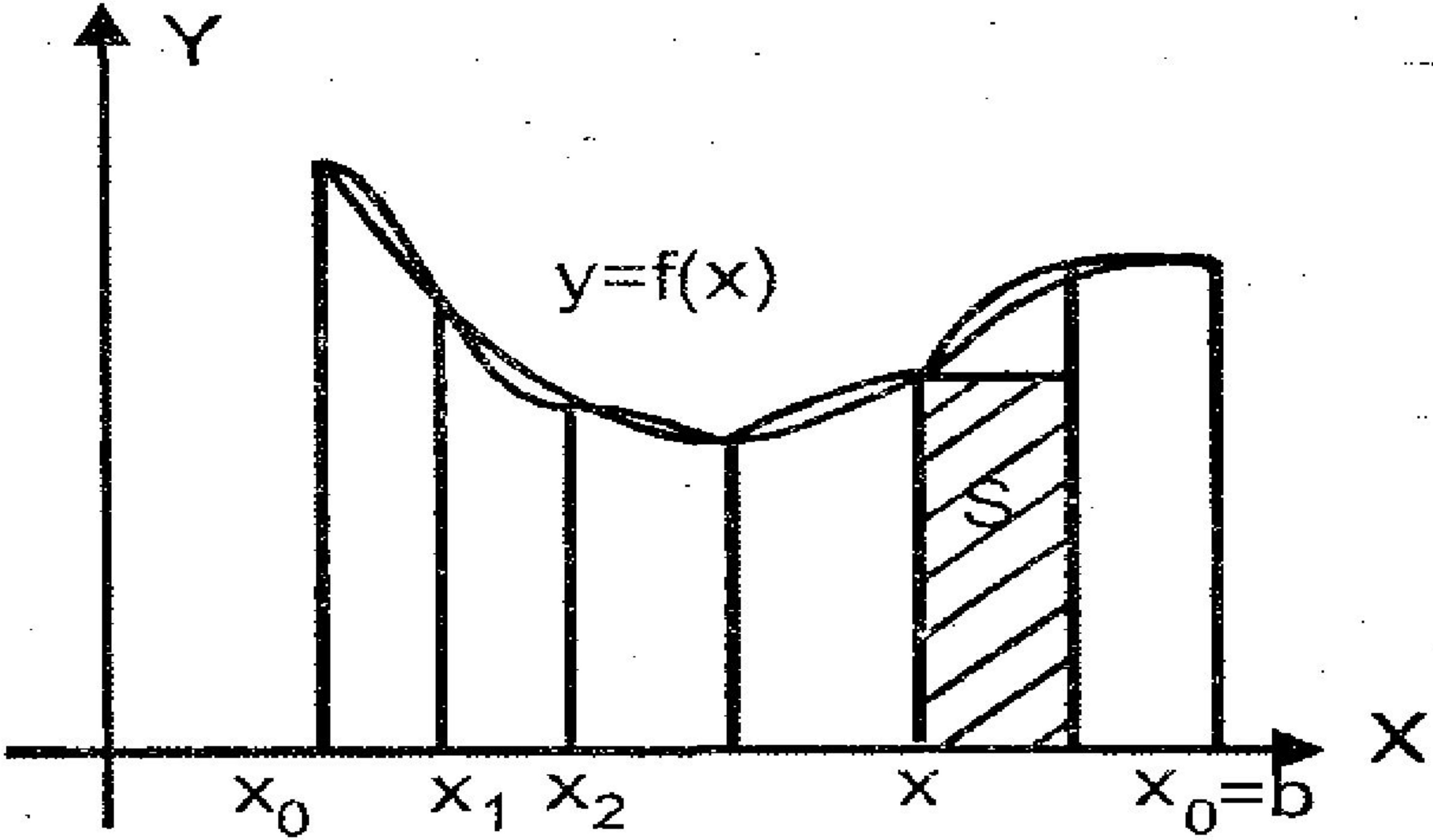
$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu\,;$$

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



$$\text{Если } S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \text{ , то } \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$$

- Если для функции f(x) существует предел то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

Свойства определенного интеграла.

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- Если $f(x) \le \phi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$$