

Временные ряды

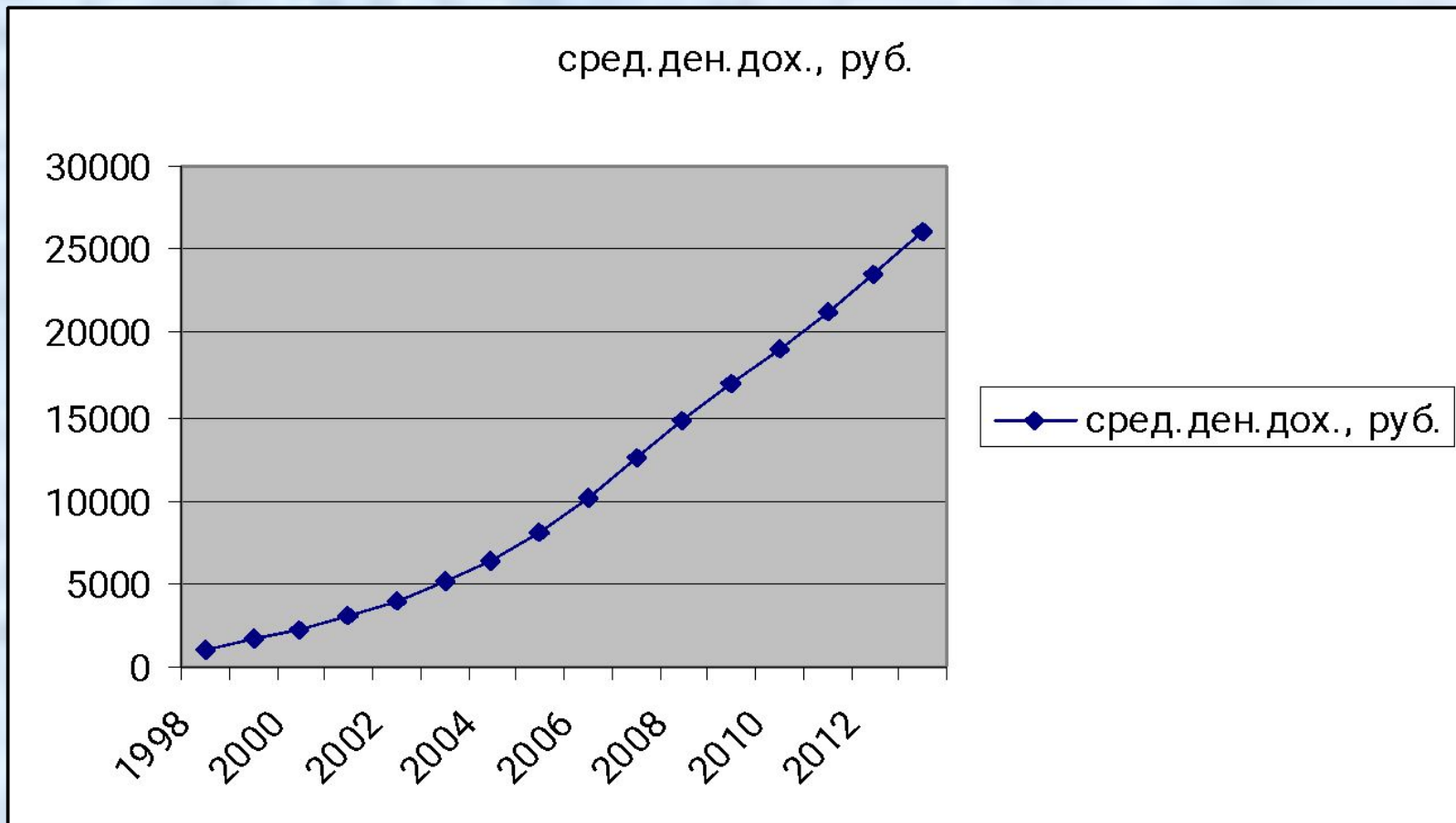
Временной ряд – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов времени:

$$y_1, y_2 \dots y_n$$

Значение временного ряда в каждый момент времени (уровень ряда) формируется под воздействием большого числа факторов, которые можно подразделить на 3 группы:

- **долговременные факторы**, формирующие **тенденцию (тренд)** ряда;
- **кратковременные (сезонные) факторы**, формирующие **сезонные колебания** ряда;
- **случайные факторы**.

Есть только тренд и случайная компонента



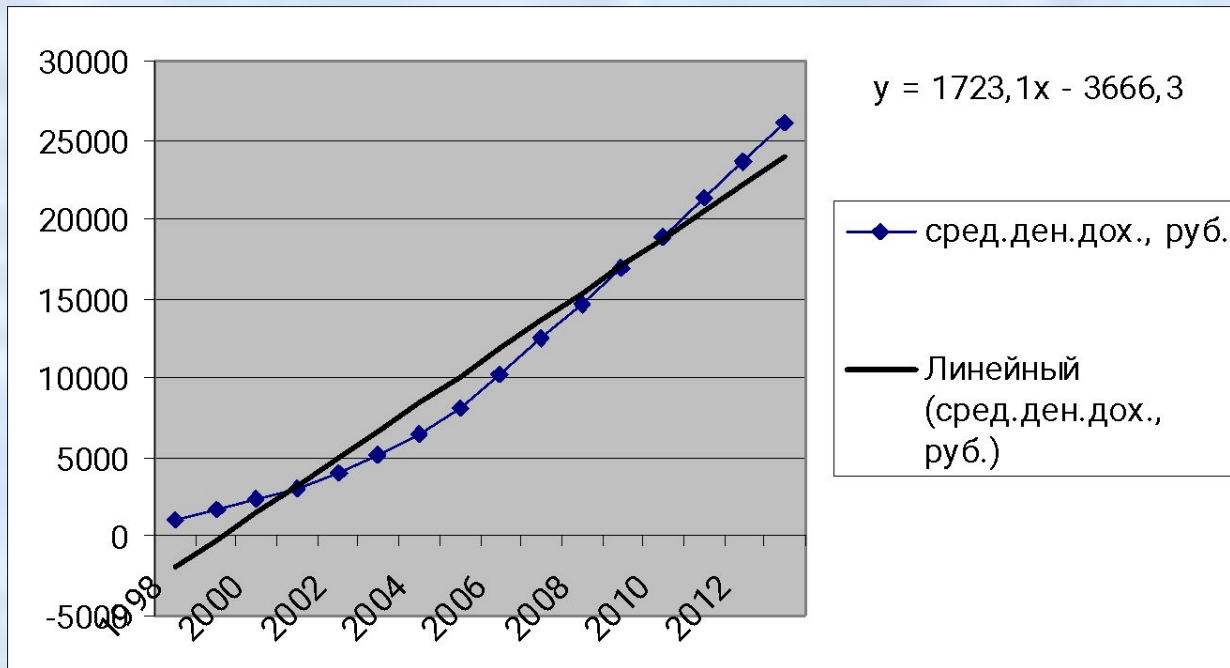
Есть и тренд, и сезонная компонента, и случайная компонента

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

линейный тренд

$$y_t = a_0 + a_1 t$$

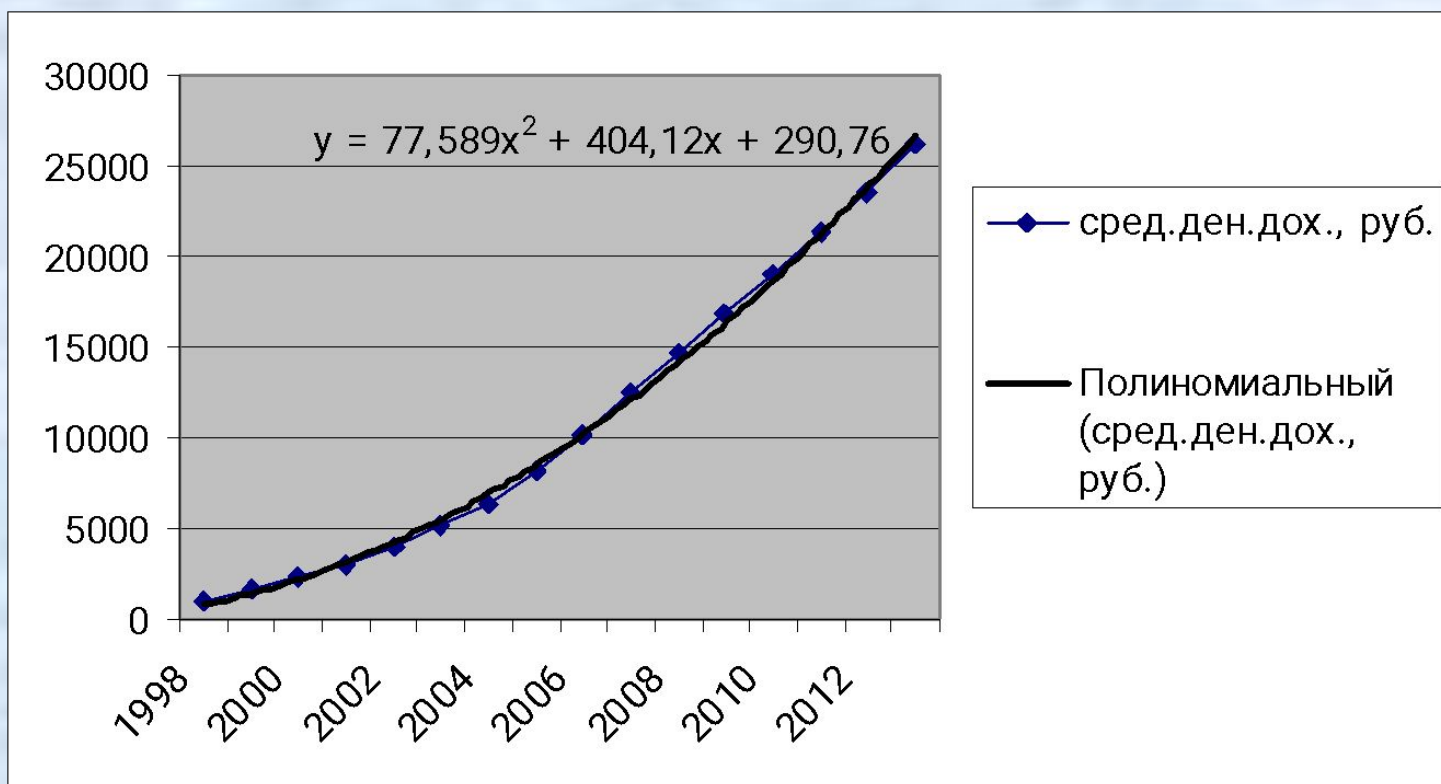


Линейный тренд используют в случае постоянного абсолютного прироста

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

квадратичный (параболический) тренд: $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$

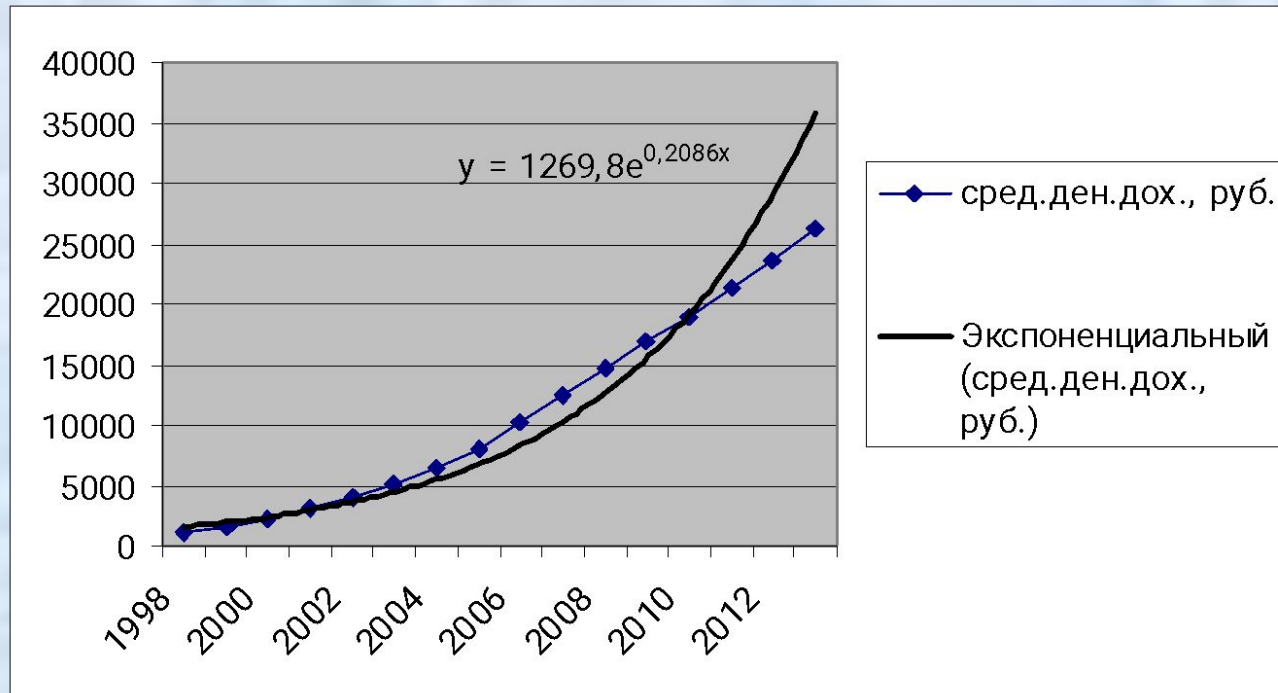


Квадратичный тренд используют в случае увеличивающегося абсолютного прироста

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

показательный тренд: $y_t = a_0 \cdot a_1^t$

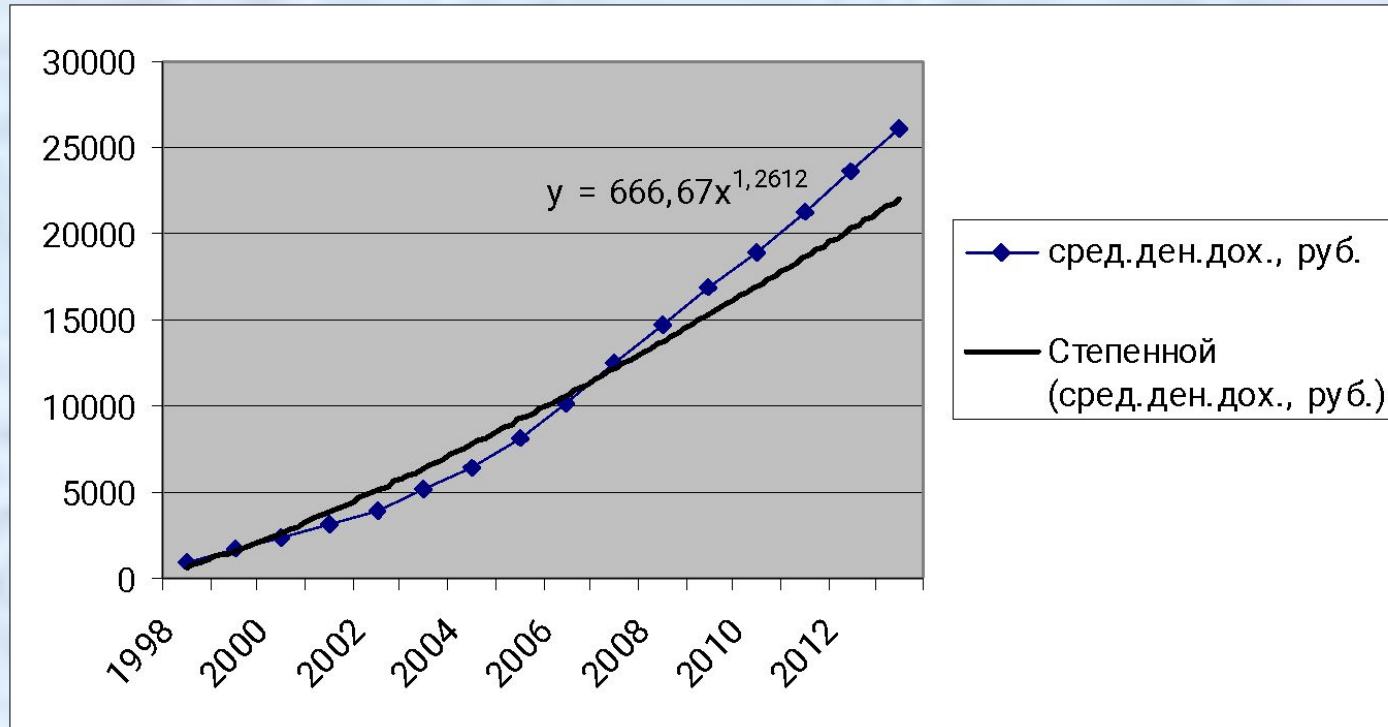


Показательный тренд используют в случае увеличивающегося абсолютного прироста

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

степенной тренд: $y_t = a_0 t^{a_1}$

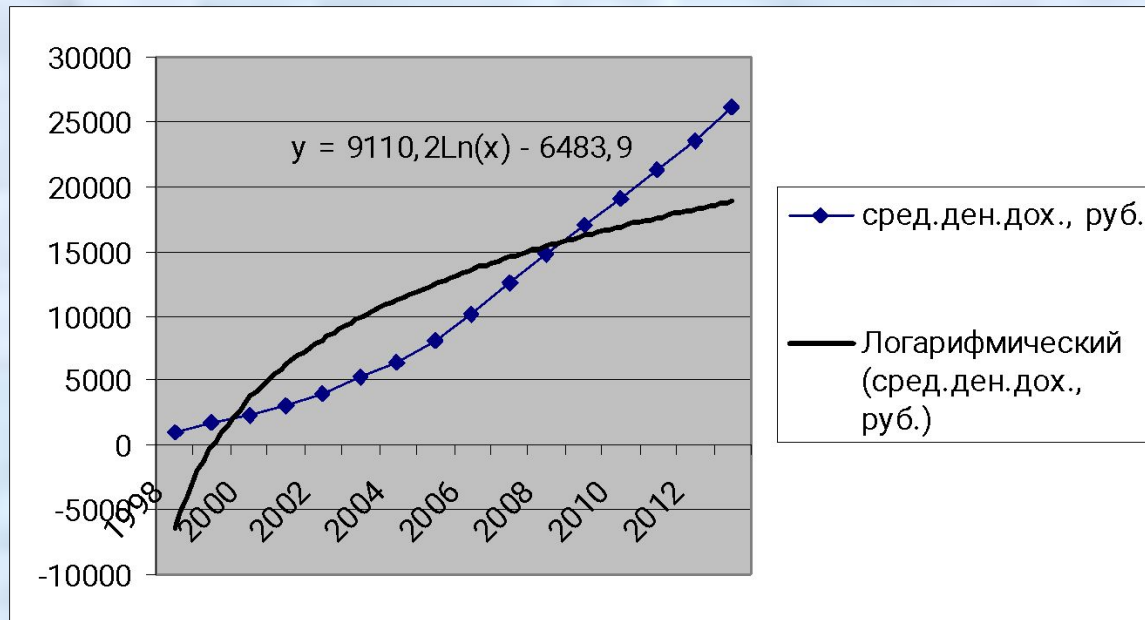


Степенной тренд используют как в случае увеличивающегося абсолютного прироста $a_1 > 1$, так и в случае уменьшающегося $a_1 < 1$

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

логарифмический тренд: $y_t = a_0 + a_1 \ln t$

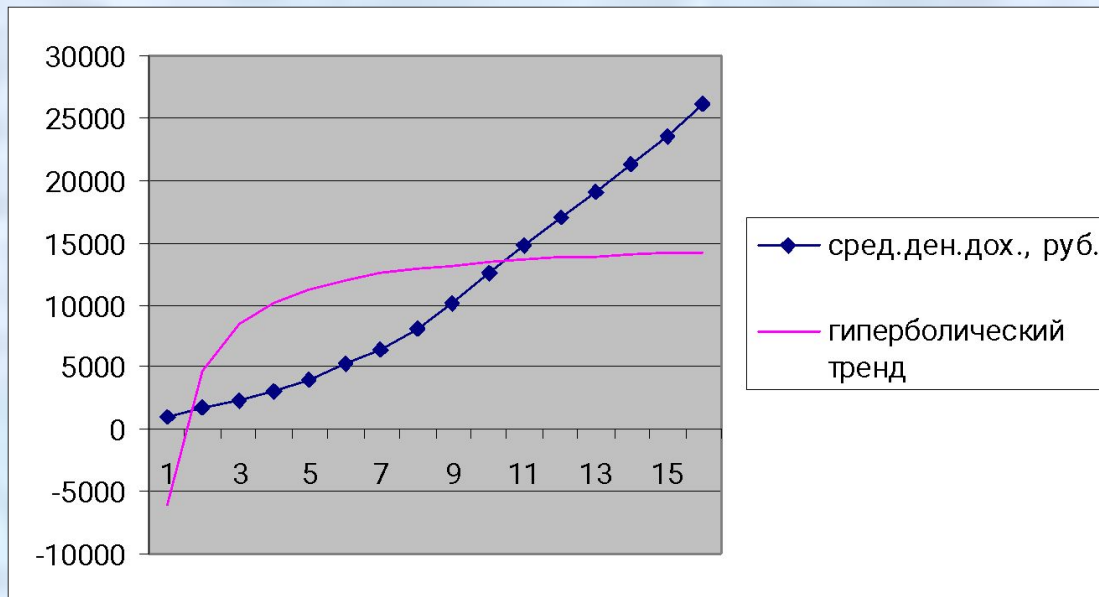


Логарифмический тренд используют в случае уменьшающегося абсолютного прироста

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

гиперболический тренд: $y_t = a_0 - \frac{a_1}{t}$

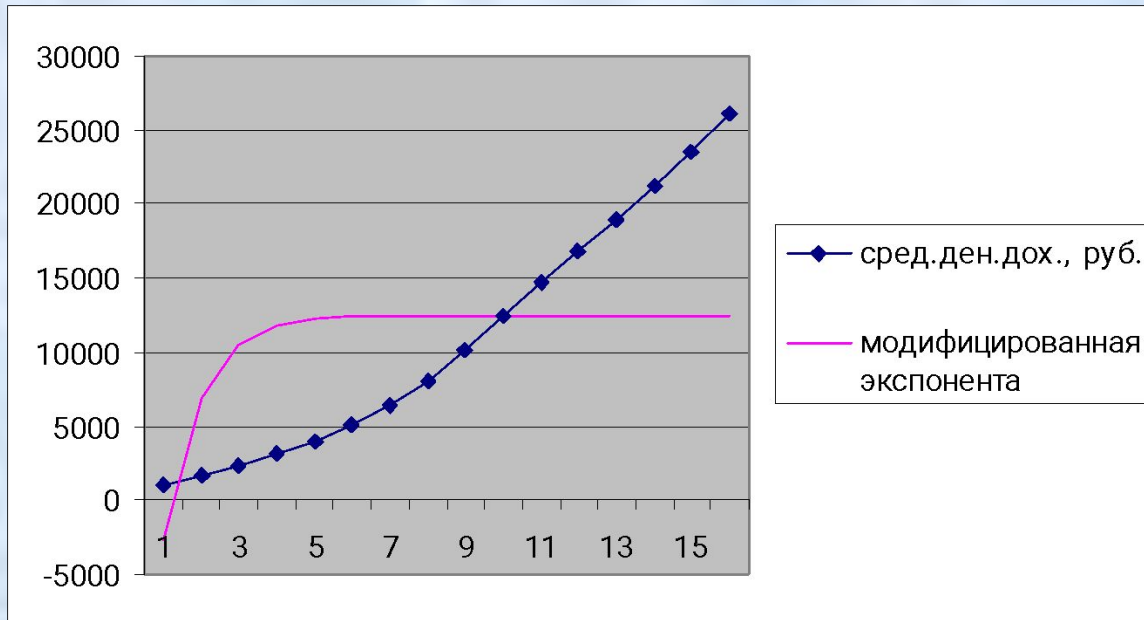


Гиперболический тренд используют в случае уменьшающегося абсолютного прироста

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

модифицированная экспонента: $y_t = a_0 - a_1 e^{-t}$



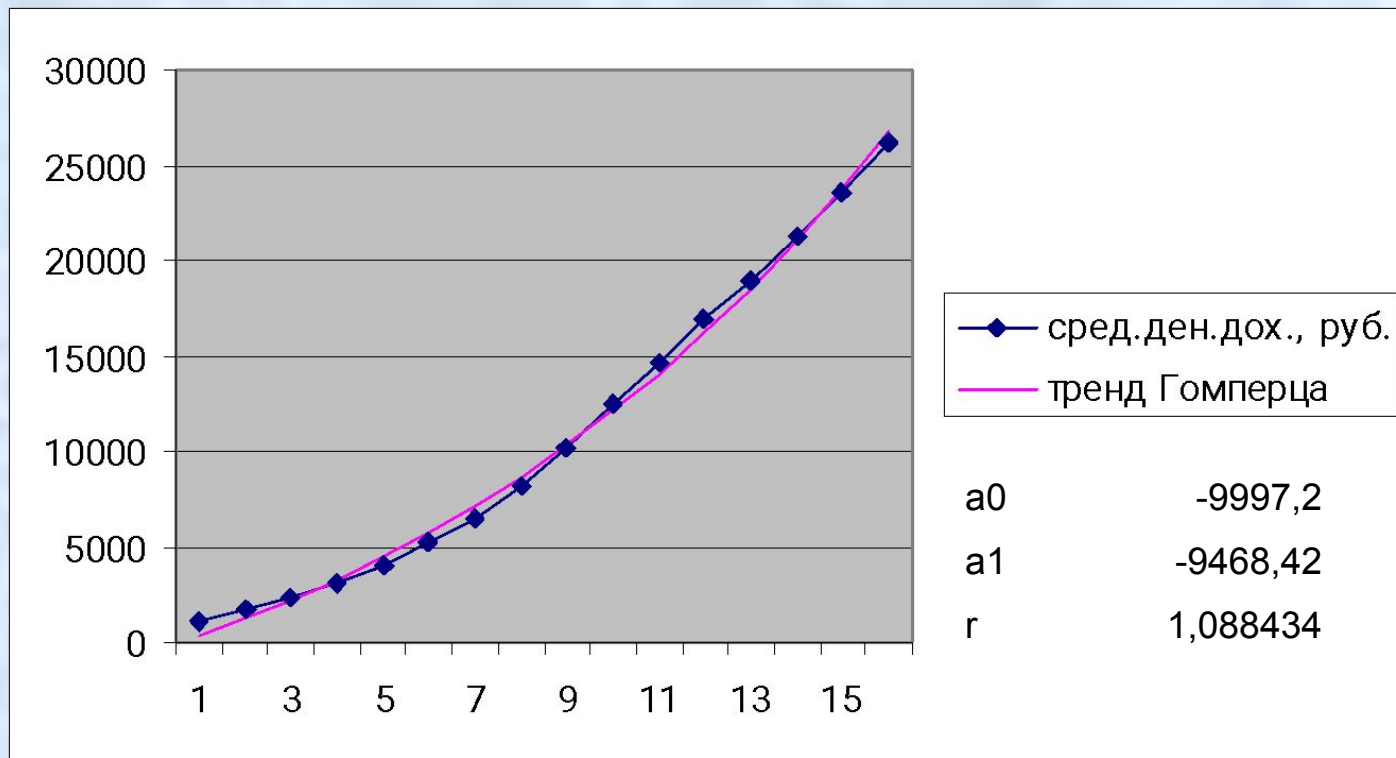
Этот тренд используют в случае уменьшающегося абсолютного прироста

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

тренд Гомперца:

$$y_t = a_0 - a_1 r^t$$



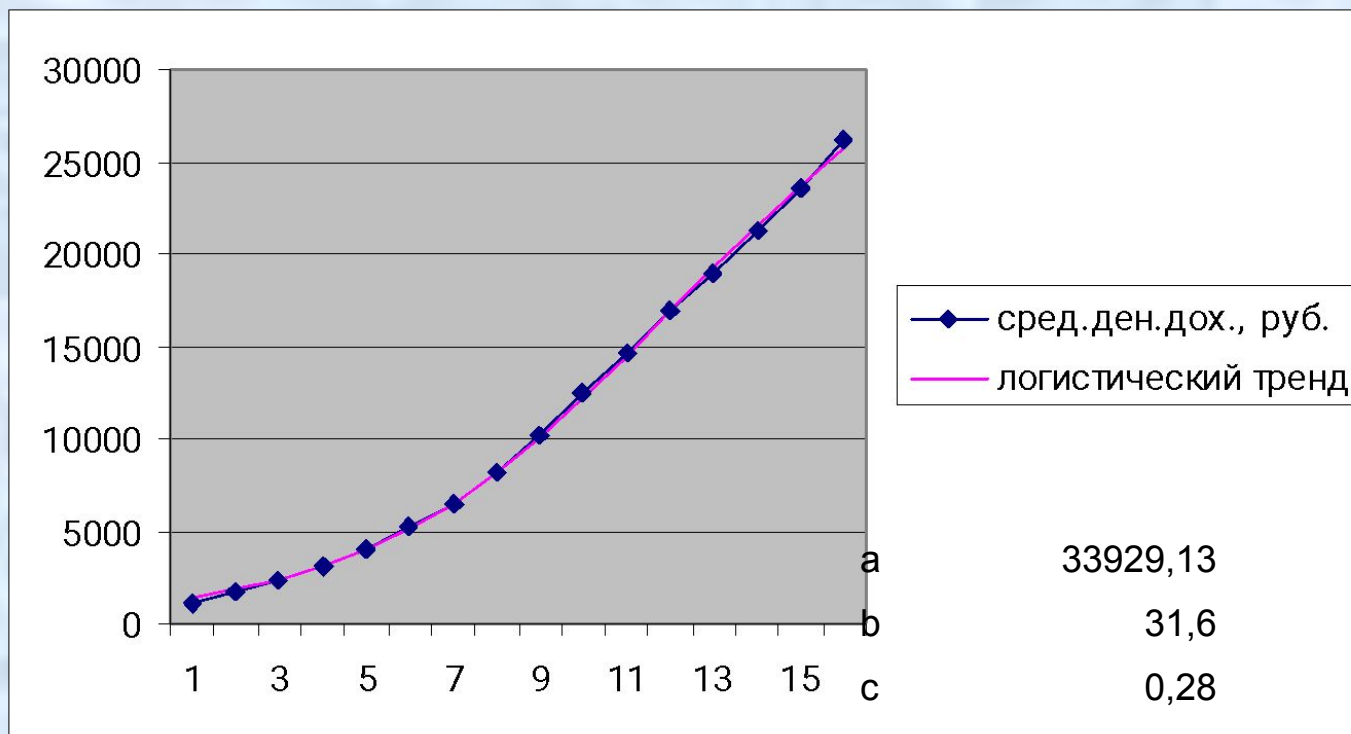
Тренд Гомперца используют как в случае увеличивающегося абсолютного прироста, так и в случае уменьшающегося

Моделирование тренда

Для построения трендов чаще всего используются следующие функции:

логистический тренд:

$$T_t = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$



Логистический тренд используют как в случае увеличивающегося абсолютного прироста, так и в случае уменьшающегося. Также логистический тренд можно использовать в случае смены типа прироста.

Как получить уравнение тренда?

линейный тренд $y_t = a_0 + a_1 t + \xi_t$

Это обычная модель парной регрессии. Расчет параметров трендов осуществляется **методом наименьших квадратов**.

a_0 и a_1 выбирают из условия минимума функции

$$f(a_0, a_1) = \sum_{t=1}^n (y_t - a_1 t - a_0)^2$$

Как получить уравнение тренда?

Для автоматического поиска параметров **линейного тренда** в Excel есть 2 способа

1. Данные – Анализ данных – Регрессия

Входной интервал Y – значения временного ряда

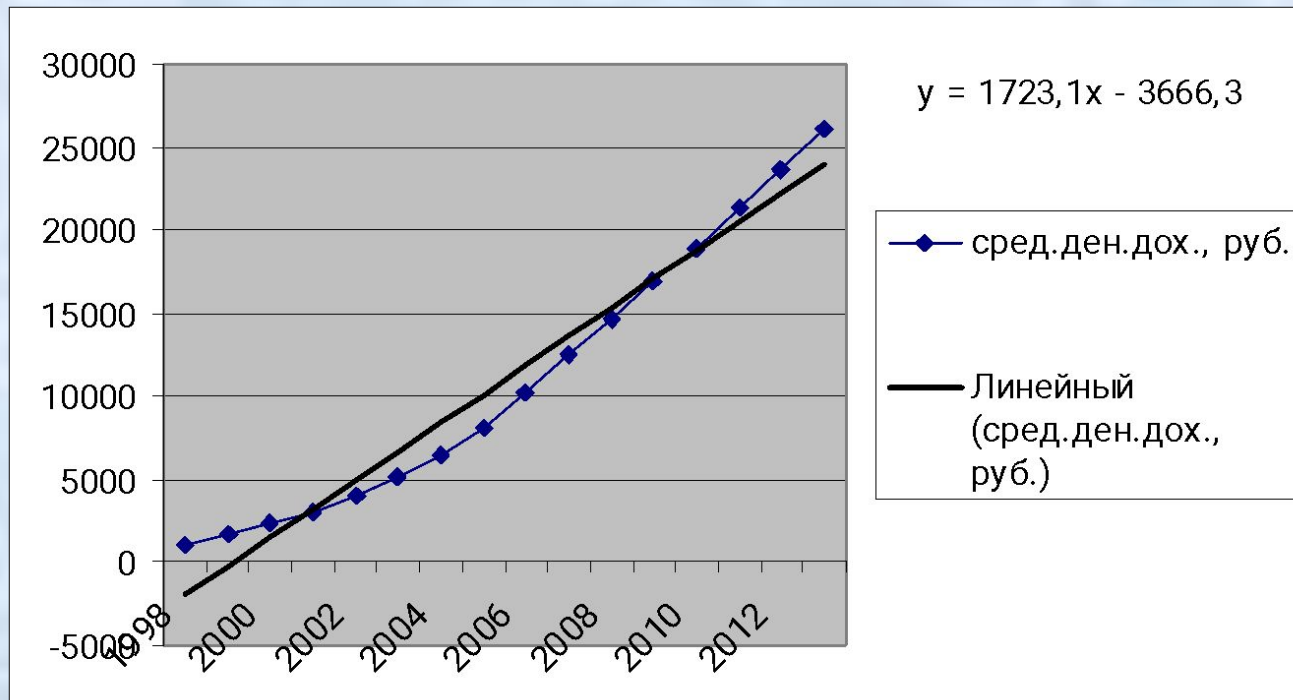
Входной интервал X – столбец, куда занесены числа 1, 2, 3, 4,n

	Коэф фици енты	Стан дарт ная ошибк а	t- стат истик а	P- Значе ние	Нижн ие 95%	Верхн ие 95%
Y- пересечен ие	-3666, 29	844,7 813	-4,339 92	0,000 679	-5478, 16	-1854, 41
$y = -3666,29 + 1723,13t$	1723, 13	1336 52	19,72 332	1,3E-1 1	1535, 752	1910, 512

Как получить уравнение тренда?

Для автоматического поиска параметров линейного тренда в Excel есть 2 способа

2. Построить диаграмму график для временного ряда, после чего щелкнуть правой кнопкой мыши и выбрать Добавить линию тренда. Указать тип тренда – линейный.



$$y = -3666,29 + 1723,13t$$

Как получить уравнение тренда?

Нелинейные тренды надо свести к линейному, если это возможно.

квадратичный (параболический) тренд: $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$

t	t ²	сред.ден. дох., руб.
1	1	1010,2
2	4	1658,9
3	9	2281,1
4	16	3062
5	25	3947,2
6	36	5167,4
7	49	6399
8	64	8088,3
9	81	10154,8

Данные – Анализ данных – Регрессия

Входной интервал Y – значения
временного ряда

Входной интервал X – столбцы t и t²,

Как получить уравнение тренда?

Нелинейные тренды надо свести к линейному, если это возможно.

квадратичный (параболический) тренд: $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$

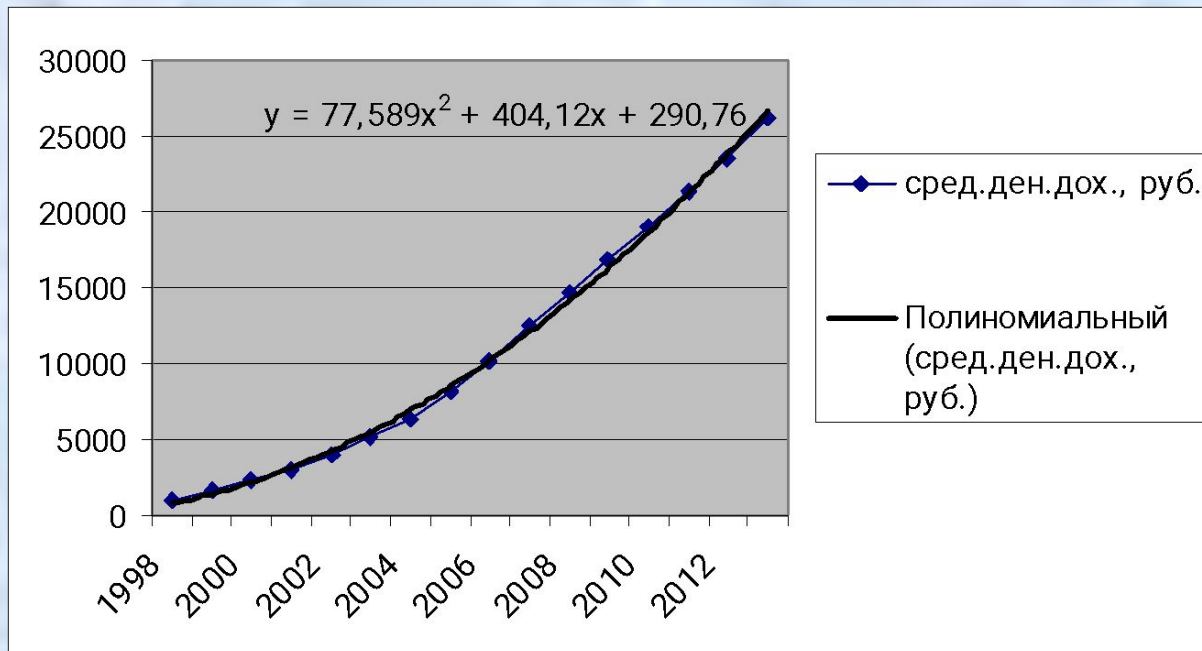
	Коэф фици енты	Стан дарт ная ошибк а	t- стат истик а	P- Значе ние
Y- пересечен ие	290,7 579	330,5 593	0,879 594	0,395 048
t	404,1 178	89,49 656	4,515 456	0,000 581
t ²	77,58 908	5,117 851	15,16 048	1,21E- 09

$$Y = 290,8 + 404,1t + 77,6t^2$$

Как получить уравнение тренда?

квадратичный (параболический) тренд: $y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$

2 способ. Построить диаграмму график для временного ряда, после чего щелкнуть правой кнопкой мыши и выбрать Добавить линию тренда. Указать тип тренда – полиномиальный 2-го порядка.



Как получить уравнение тренда?

Нелинейные тренды надо свести к линейному, если это возможно.

степенной тренд: $y_t = a_0 t^{a_1}$

Прологарифмируем $\ln(y_t) = \ln(a_0) + a_1 \ln(t)$

ln t	ln y
0	6,917904
0,6931472	7,41391
1,0986123	7,732413
1,3862944	8,026824
1,6094379	8,280762
1,7917595	8,550125
1,9459101	8,763897
2,0794415	8,998174
2,1972246	9,225702

Данные – Анализ данных – Регрессия
Входной интервал Y – столбец ln y
Входной интервал X – столбец ln t ,

Как получить уравнение тренда?

Нелинейные тренды надо свести к линейному, если это возможно.

степенной тренд: $y_t = a_0 t^{a_1}$

Прологарифмируем $\ln(y_t) = \ln(a_0) + a_1 \ln(t)$

	Коэф фици енты	Стан дарт ная ошибк а	t- стат истик а	P- Значе ние
Y- пересечен	6,502	0,128	50,49	3,04E-17
$\ln(y_t)$	6,502	0,128	50,49	3,04E-17
$\ln t$	1,261	0,062	20,21	9,32E-12

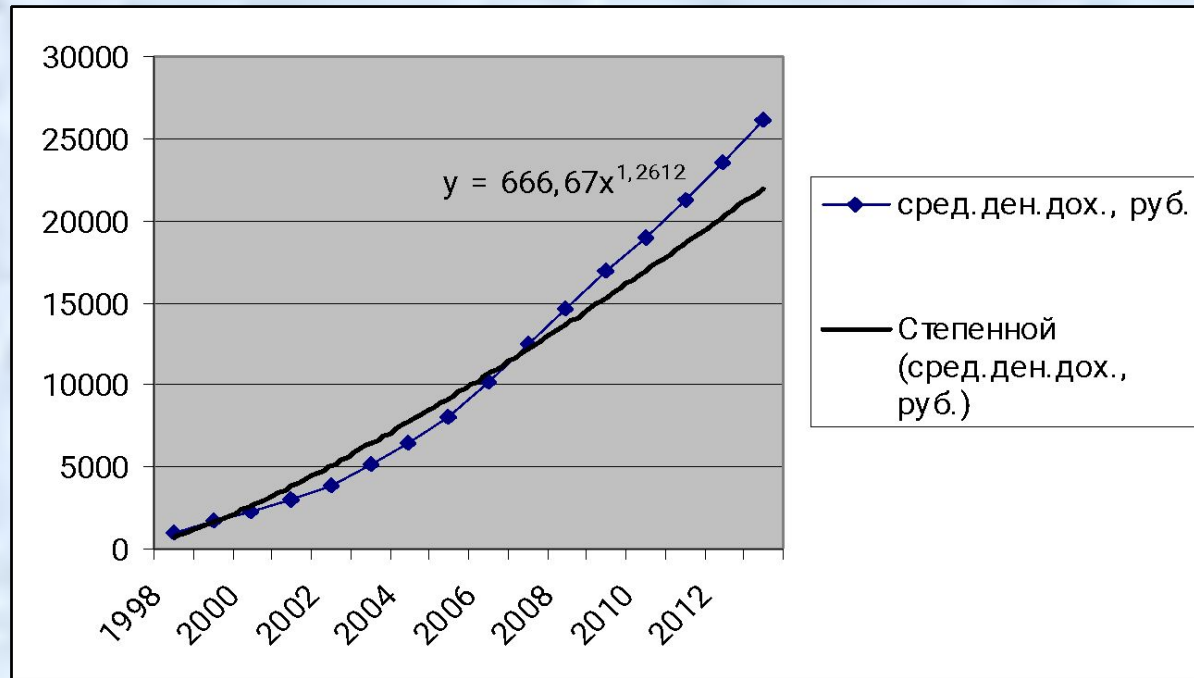
$$\ln(y_t) = 6,5 + 1,26 \ln(t)$$

$$y_t = \exp(6,5 + 1,26 \ln(t)) = 666,7 \cdot 1,26^t$$

Как получить уравнение тренда?

степенной тренд: $y_t = a_0 t^{a_1}$

2 способ. Построить диаграмму график для временного ряда, после чего щелкнуть правой кнопкой мыши и выбрать Добавить линию тренда. Указать тип тренда – степенной.



Как получить уравнение тренда?

Тренды, не сводящиеся к линейным (Гомперца и логистический) можно построить, используя сервис Поиск решения

Рассмотрим на примере логистического тренда

год	сред. ден. дох., $y(t)$	t	логистический тренд, $T(t)$	квадрат ошибки
1998	1010,2	1	1372,4185	131202,23
1999	1658,9	2	1804,1031	21083,952
2000	2281,1	3	2361,7212	6499,7803
2001	3062	4	3075,1913	174,01138
2002	3947,2	5	3977,0444	890,68537
2003	5167,4	6	5099,6664	4587,8468

$$T_t = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$

$$(y_t - T_t)^2$$

Сумма **789691,8**

Целевая ячейка, ее надо минимизировать

a	100
b	100
c	1

← начальные значения
← берем любые

Как получить уравнение тренда?

Тренды, не сводящиеся к линейным (Гомперца и логистический) можно построить, используя сервис Поиск решения

Рассмотрим на примере логистического тренда

год	сред. ден. дох., $y(t)$	t	логистический тренд, $T(t)$	квадрат ошибки
1998	1010,2	1	1372,4185	131202,23
1999	1658,9	2	1804,1031	21083,952
2000	2281,1	3	2361,7212	6499,7803
2001	3062	4	3075,1913	174,01138
2002	3947,2	5	3977,0444	890,68537
2003	5167,4	6	5099,6664	4587,8468

$$T_t = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$

$$(y_t - T_t)^2$$

Сумма **789691,8**

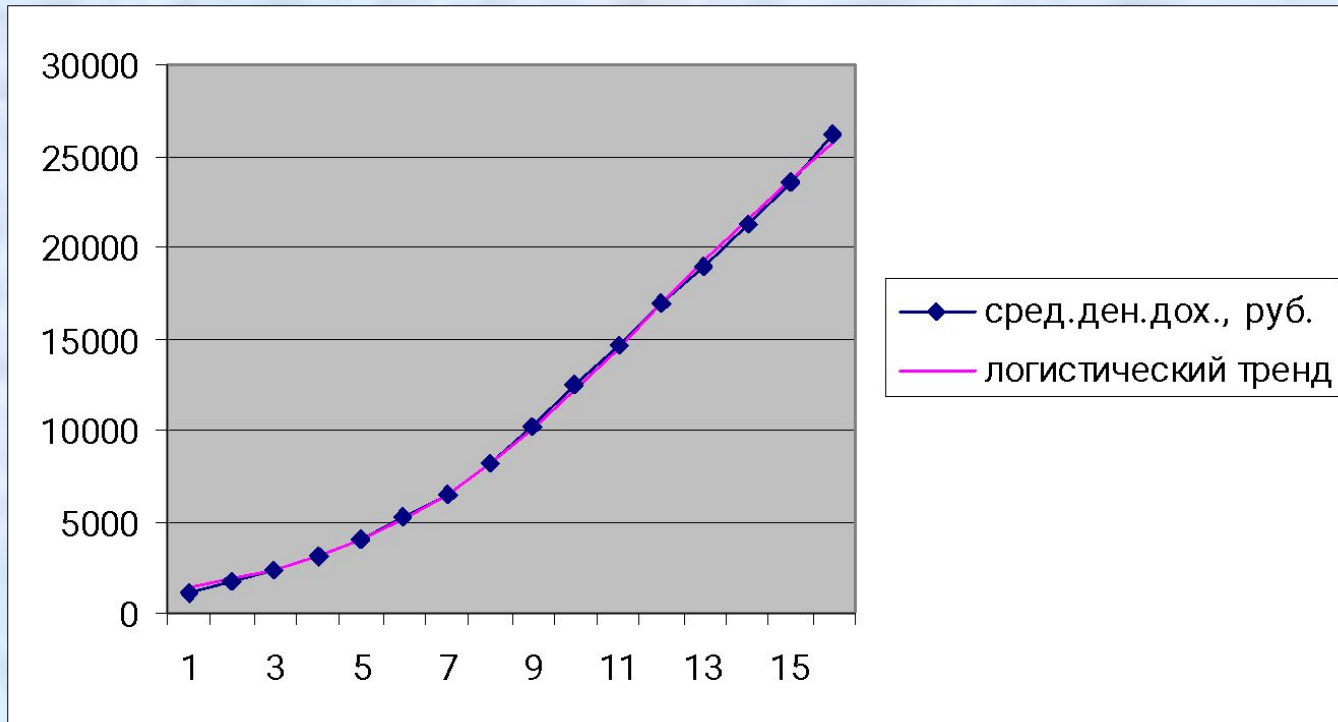
Целевая ячейка, ее надо минимизировать

a	33929,13
b	31,60
c	0,29

значения, дающие минимальную сумму квадратов ошибок, полученные через Поиск решения

Как получить уравнение тренда?

Тренды, не сводящиеся к линейным (Гомперца и логистический) можно построить, используя сервис Поиск решения



Как выбрать подходящую модель тренда?

После того, как построены несколько моделей, лучшую из них выбирают по сумме квадратов ошибок.

$$\sum_{t=1}^n (y_t - T_t)^2$$

год	y	$y_{\text{линейная}}$	$y_{\text{квадратичная}}$	$y_{\text{экспоненциальная}}$	$(y - y_{\text{линейная}})^2$	$(y - y_{\text{квадратичная}})^2$	$(y - y_{\text{экспоненциальная}})^2$
1998	1010,2	772,5	1564,4	666,7	56518,1	307084,4	118013,7
1999	1658,9	1409,3	1927,3	1598,0	62275,3	72022,0	3714,5
2000	2281,1	2201,4	2374,4	2664,7	6350,0	8701,2	147144,1
2001	3062	3148,7	2925,2	3830,2	7508,9	18709,4	590082,8
Сумма квадратов ошибок					1944942,5	146311222,6	49357881,0

Как построить прогноз по выбранной модели тренда?

Точечный прогноз строим, подставив вместо t в уравнение тренда соответствующее значение

год	t	Точечный прогноз
2014	17	29584,0
2015	18	32703,7
2016	19	35978,7

Формула для лучшей модели



Как построить прогноз по выбранной модели тренда?

Доверительный интервал для прогноза на момент времени $t^* > n$

1. Задаем α - вероятность ошибки прогноза, обычно 0,05, 0,01.
2. Вычисляем стандартную ошибку прогноза по формуле

$$s_y(t^*) = S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t^* - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2}}$$

S – стандартная ошибка уравнения регрессии. Берем из таблицы регрессионного анализа

<i>Регрессионная статистика</i>	
Множественный R	0,99907
R-квадрат	0,99814
Нормированный R-квадрат	0,997854
Стандартная ошибка	386,7958
Наблюдения	16

S

Как построить прогноз по выбранной модели тренда?

Доверительный интервал для прогноза

1. Задаем α - вероятность ошибки прогноза, обычно 0,05, 0,01.
2. Вычисляем стандартную ошибку прогноза по формуле

$$s_y(t^*) = S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t^* - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2}}$$

n – длина временного ряда (число наблюдений)

t^* момент времени, для которого строится прогноз

\bar{t} - среднее по столбцу, содержащему 1,2, ...,n

Как построить прогноз по выбранной модели тренда?

Доверительный интервал для прогноза

3. Для заданного α вычисляем квантиль распределения Стьюдента

$$t_{\alpha}(n-k)$$

k – число оцениваемых параметров, например для линейного тренда $k=2$, для параболического $k=3$.

Вычисляем с помощью функции Excel

=СТЮДРАСПОБР(0,05;16-2)

α

$n-k$

Как построить прогноз по выбранной модели тренда?

Доверительный интервал для прогноза

4. Вычисляем доверительный интервал по формуле

$$\left(\hat{y}_{t^*} - s_y(t^*) \cdot t_\alpha(n-k); \hat{y}_{t^*} + s_y(t^*) \cdot t_\alpha(n-k) \right)$$

\hat{y}_{n+t} - точечный прогноз на t периодов времени вперед

год	t^*	Точечный прогноз	стандартная ошибка прогноза	нижняя граница	верхняя граница
2014	17	29584,0	412,3	28693,4	30474,6
2015	18	32703,7	415,6	31806,0	33601,5
2016	19	35978,7	419,2	35073,0	36884,3

$$\hat{y}_{t^*} = a_0 + a_1 t^* + a_2 (t^*)^2$$

$$s_y(t^*) = S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t^* - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2}}$$

Задание

На сайте www.gks.ru выбрать временной ряд по одному из социально-экономических показателей, не содержащих сезонную составляющую.

- 1) Подобрать кривую роста (трендовую модель) к выбранному временному ряду.
- 2) Получить точечные и интервальные прогнозы показателя на следующие 3 периода времени.