ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ-3

4. Однородные ДУ I порядка.

- Функция $f(x;y)$ называется однородной степени n, если умножение всех её аргументов на одно и то же число t равносильно умножению функции на t^n, т.е.

$$f(tx;ty) = t^n f(x;y)$$

Пример 1.

1) $f(x;y)=x^3+2x^2y-5y^3$ - однородная функция 3-ей степени

Так как $f(tx;ty)=(tx)^3+2(tx)^2ty-5(ty)^3=$

$$=t^3x^3+2t^2x^2t\,y-5t^3y^3=t^3\left(x^3+2x^2y-5y^3\right)=$$

$$=t^3f(x;y)$$

2) $f(x;y)=3x+2y$ - однородная функция 1-ой степени

Так как $f(tx;ty)=3tx+2ty=t\left(3x+2y\right)=t\cdot f(x;y)$

3) $f(x;y)=\dfrac{x-y}{2x+3y}$ - однородная функция 0-ой степени

Так как $$f(tx;ty)=\frac{tx-ty}{2tx+3ty}=\frac{t\left(x-y\right)}{t\left(2x+3y\right)}=\frac{x-y}{2x+3y}=$$

$$=f(x;y)=t^{0}f(x;y)$$

4) $f(x;y) = x^2 \sin\frac{y}{x}$ - однородная функция 2-ой степени

Так как $f(tx;ty) = (tx)^2 \sin\frac{ty}{tx} = t^2 x^2 \sin\frac{y}{x} = t^2 f(x;y)$

5) $f(x;y) = \frac{1}{x+y}$ - однородная функция (-1)-ой степени

Так как $f(tx;ty) = \frac{1}{tx+ty} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{x+y} = t^{-1} \frac{1}{x+y} =$

$= t^{-1} f(x;y)$

- ДУ I порядка $y' = f(x;y)$ называется однородным, если $f(x;y)$- однородная функция 0-ой степени, т.е.

$$f(tx;ty) = f(x;y)$$

- Однородное ДУ I порядка $y' = f(x;y)$ можно записать в виде:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Т.к. $f(x;y) = f(tx;ty)$, то если положить $t = \frac{1}{x}$

Получаем:

$$f(x;y) = f\left(\frac{x}{x};\frac{y}{x}\right) = f\left(1;\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Решение однородного ДУ I порядка $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Это уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной

$$\frac{y}{x} = u \qquad \text{или} \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = u \cdot x$$

$$(u \cdot x)' = \varphi(u)$$

$$u'x + u \cdot x' = \varphi(u)$$

$$u'x + u = \varphi(u)$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$F(u) = \ln|\, x \,| + C$$

или

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|\, x \,| + C$$ -общее решение данного ДУ

Пример 2. Найти общее решение ДУ:

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$$

Это однородное ДУ вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$$

$$u'x + u\,x' = u + \tan u$$

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \tan u$$

$$x\frac{du}{dx} = \tan u$$

$$\frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\tan u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|x\right| + C$$

$$\ln\left|\sin x\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|$$

$$\ln\left|\sin x\right| = \ln\left|Cx\right|$$

$$\left|\sin x\right| = \left|Cx\right|$$

$$\sin x = \pm Cx$$

$$\sin x = Cx$$

$$u = \arcsin Cx$$

$$\frac{y}{x} = \arcsin Cx$$

$$y = x \cdot \arcsin Cx$$

Пример 3. Решить задачу Коши:

$$y' = \frac{2x+y}{2x}$$, если $y(1)=0$

$$y' = \frac{2x+y}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{y}{2x} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}$$

Это однородное ДУ вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

$$u'x + u = 1 + \frac{1}{2} \cdot u$$

$$x \frac{du}{dx} + u = 1 + \frac{u}{2}$$

$$x \frac{du}{dx} = 1 + \frac{u}{2} - u$$

$$x \frac{du}{dx} = 1 - \frac{u}{2}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{2 - u}{2}$$

$$\frac{du}{2 - u} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{du}{2 - u} = \int \frac{dx}{2x}$$

$$-\ln|2-u| = \frac{1}{2}\ln|x| + C \qquad \Big|\cdot(-2)$$

$$2\ln|2-u| = -\ln|x| + C$$

$$\ln(2-u)^2 = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln(2-u)^2 = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$(2-u)^2 = \frac{C}{x}$$

$$2-u = \pm\sqrt{\frac{C}{x}}$$

$$2-u = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$u = 2-\frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y}{x} = 2-\frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$y = x\left(2 - \frac{C}{\sqrt{x}}\right)$$ - общее решение

Найдем С:

$$0 = 1 \cdot \left(2 - \frac{C}{1}\right)$$

$$0 = 2 - C$$

$$C = 2$$

$$y = x\left(2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

или $y = 2\left(x - \sqrt{x}\right)$ - частное решение

- Уравнение вида $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ называется однородным, если $M(x;y)$ и $N(x;y)$- однородные функции одной и той же степени.

Пример 4. Найти общее решение ДУ:

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$$

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx} \qquad \Big|\cdot dx$$

$$y^2 dx + x^2 dy = xy\,dy$$

$$\underbrace{y^2}_{M(x;y)} dx + \underbrace{\left(x^2 - xy\right)}_{N(x;y)} dy = 0$$

- уравнение однородное вида

$$M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0$$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = u'x + u\,x'$$

$$\frac{dy}{dx} = u'x + u\,x'$$

$$dy = u'x\,dx + u\,x'\,dx$$

$$dy = x\,du + u\,dx$$

$$y^2 dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0$$

$$u^2 x^2 dx + \left(x^2 - x \cdot ux\right)\left(x\,du + u\,dx\right) = 0$$

$$u^2 x^2 dx + x^3 du - x^3 u\,du + x^2 u\,dx - x^2 u^2 dx = 0$$

$$x^3\left(1 - u\right)du + ux^2 dx = 0$$

$$x^3\left(1 - u\right)du = -ux^2 dx$$

$$\frac{u - 1}{u}du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{u - 1}{u}du = \int \frac{dx}{x} \qquad (*)$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$u - \ln| u | = \ln| x | + C$$

$$u - \ln| u | = \ln| x | + \ln|C|$$

$$\ln e^{u} - \ln| u | = \ln| Cx |$$

$$\ln\left|\frac{e^{u}}{u}\right| = \ln|Cx|$$

$$\frac{e^{u}}{u} = \pm Cx$$

$$\frac{e^{u}}{u} = Cx$$

$$e^{u} = uCx$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}Cx$$

$$e^{\frac{y}{x}} = Cy$$ - общее решение

Это однородное ДУ можно привести к виду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$$

$$y^2 + \left(x^2 - xy\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(x^2 - xy\right)\cdot y' = -y^2$$

$$y' = -\frac{y^2}{x(x-y)} = \frac{y^2}{x(y-x)} = \frac{y^2}{x^2\left(\frac{y}{x} - 1\right)} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1} \qquad \Rightarrow \qquad u'x + u = \frac{u^2}{u - 1}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - u^2 + u}{u-1}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}$$

$$\frac{u-1}{u}du=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{dx}{x}$$ - получили (*)

Пример 5. Найти общее решение ДУ:

$$\left(x^2-2y^2\right)dx+2xy\,dy=0$$

$$\underbrace{\left(x^2-2y^2\right)}_{M(x;y)}dx+\underbrace{2xy}_{N(x;y)}\,dy=0$$

- уравнение однородное вида

$$M(x;y)\,dx+N(x;y)\,dy=0$$

$$\frac{y}{x}=u \quad\Rightarrow\quad y=u\cdot x$$

$$\frac{dy}{dx}=u'x+u\,x'$$

$$y'=u'x+u\,x'$$

$$dy=u'x\,dx+u\,x'\,dx$$

$$dy=x\,du+u\,dx$$

$$\left(x^2 - 2u^2x^2\right)dx + 2x \cdot ux\left(x\,du + u\,dx\right) = 0$$

$$\left(x^2 - 2x^2u^2\right)dx + 2x^3u\,du + 2x^2u^2dx = 0$$

$$x^2dx + 2x^3u\,du = 0$$

$$2u\,du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int 2u\,du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$u^2 = -\ln\left| x \right| + C$$

$$u^2 = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y^2 = x^2 \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y^2 = -x^2 \ln\left|Cx\right|$$

$$y^2 + x^2 \ln\left|Cx\right| = 0$$

Пример 6. Найти общее решение ДУ:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Это однородное ДУ можно привести к виду $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \Big| : x$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{y}{x} = u \qquad \Rightarrow \qquad y = u \cdot x$$

$$y' = u'x + u\,x'$$

$$y' = x\frac{du}{dx} + u$$

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\sqrt{1+u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln|x|+C$$

$$u+\sqrt{1+u^2}=Cx$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx$$

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=Cx$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$$

общее решение

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$$ - общее решение

или

$$\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2-y \qquad \Big|\,(\ )^2$$

$$x^2+y^2=\left(Cx^2-y\right)^2$$

$$x^2+y^2=Cx^4-2yCx^2+y^2$$

$$x^2=x^2\left(Cx^2-2yC\right)$$

$$1=C(x^2-2y)$$

$$\frac{1}{x^2-2y}=C$$ - общее решение