

**Производная по направлению. Градиент.
Экстремумы функций нескольких переменных.
Необходимое условие экстремума. Достаточное
условие экстремума. Условный экстремум.
Метод множителей Лагранжа. Нахождение
наибольших и наименьших значений.**

Семинар 24

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в некоторой области D и имеет в этой области непрерывные частные производные. Выберем в рассматриваемой области точку $M(x, y, z)$ и проведем из нее вектор \mathbf{S} , направляющие косинусы которого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. На векторе \mathbf{S} на расстоянии Δs от его начала найдем точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, где

$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Представим полное приращение функции f в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \delta \Delta x + \varepsilon \Delta y + \lambda \Delta z, \quad \text{где } \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \delta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \lambda = 0.$$

После деления на Δs получаем:
$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s} + \delta \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon \frac{\Delta y}{\Delta s} + \lambda \frac{\Delta z}{\Delta s} .$$

Поскольку $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$, предыдущее равенство можно переписать

$$\text{в виде: } \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma + \delta \cos\alpha + \varepsilon \cos\beta + \lambda \cos\gamma \quad (1)$$

Определение Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \rightarrow 0$ называется производной от функции $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора \mathbf{S} и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$.

При этом из (1) получаем:
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma. \quad (2)$$

Определение Вектор, координатами которого в каждой точке некоторой области являются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ в этой точке, называется градиентом функции $u = f(x, y, z)$.

Обозначение:
$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} .$$

Экстремумы функции

Определение 1. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой максимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0 .

Определение 2. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой минимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0 .

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то в этой точке частные производные первого порядка данной функции равны нулю или не существуют.

Определение 3. Точки, принадлежащие области определения функции нескольких переменных, в которых частные производные функции равны нулю или не существуют, называются стационарными точками этой функции.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, являющейся стационарной точкой функции $z = f(x, y)$, эта функция имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно. Обозначим $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C$. Тогда:

- 1) $f(x, y)$ имеет в точке M_0 максимум, если $AC - B^2 > 0, A < 0$;
- 2) $f(x, y)$ имеет в точке M_0 минимум, если $AC - B^2 > 0, A > 0$;
- 3) экстремум в критической точке отсутствует, если $AC - B^2 < 0$;
- 4) если $AC - B^2 = 0$, необходимо дополнительное исследование.

Условный экстремум.

Определение Если аргументы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ связаны дополнительными условиями в виде m уравнений ($m < n$): $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, (1), где функции φ_i имеют непрерывные частные производные, то уравнения (1) называются **уравнениями связи**.

Определение Экстремум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при выполнении условий (1) называется **условным экстремумом**.

Определение Функция $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, (2), где λ_i – некоторые постоянные, называется **функцией Лагранжа**, а числа λ_i – **неопределенными множителями Лагранжа**.

Теорема (необходимые условия условного экстремума). Условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ может достигаться только в стационарных точках функции Лагранжа $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$.

Примеры с решениями

1. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении вектора L , составляющего угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox .

Решение. Найдем значения частных производных в точке M :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \frac{\partial z}{\partial y} = -2y; \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -2. \text{ Так как } \cos \alpha = \cos 60^\circ = 1/2; \sin \alpha = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

то
$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \approx -0,7$$

2. Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M(3;2;1)$ в направлении вектора \overline{MN} , где $N(5;4;2)$.

Решение. Найдем вектор \overline{MN} и его направляющие косинусы:

$$\overline{MN} = (5-3)i + (4-2)j + (2-1)k = 2i + 2j + k; \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}; \cos \beta = \frac{2}{3}; \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

Вычислим значения частных производных в точке M :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3; \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3; \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 4; \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 12; \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 36, \text{ следовательно } \frac{\partial u}{\partial s} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 22 \frac{2}{3}$$

3. Найти величину и направление градиента функции $u = \operatorname{tg} x - x + 3 \sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Решение. Найдем частные производные и вычислим их значения в точке M .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sec^2 x - 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 3 \cos y - 3 \sin^2 y \cos y; \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \operatorname{cosec}^2 z; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 1; \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = \frac{3}{8}; \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 0$$

Следовательно,

$$(\operatorname{grad} u)_M = i + \frac{3}{8}j; |\operatorname{grad} u|_M = \sqrt{1^2 + (3/8)^2} = \frac{\sqrt{73}}{8} \quad \cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}; \cos \beta = \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}$$

3. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3; \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6;$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0; y = 3; M(0;3). \quad \text{Находим значения частных производных второго}$$

порядка в точке М: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$ и составляем дискриминант

$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; A > 0;$ Следовательно, в точке М(0;3) заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = -9$

4. Найти экстремум функции $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{3}; \quad \text{Находим из } \begin{cases} 8x + y - 188 = 0 \\ x + 6y - 141 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 21; y = 20; M(21;20).$$

Находим значения частных производных второго порядка в точке М:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12} \quad \text{и составляем дискриминант} \quad \Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; A > 0;$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0; A < 0;$$

Следовательно, в точке М(0;3) заданная функция имеет максимум. Значение функции в этой точке

$$z_{\max} = 282$$

5. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение. Пусть x и y – катеты треугольника, z – гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $z^2 = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $xy/2=S$, т. е. $xy-2S=0$. Рассмотрим функцию $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$ и найдем ее частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \lambda y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \lambda x$. Так как $x > 0, y > 0$, то из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \\ xy/2 = S \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2; x = y = \sqrt{2S}$$

Гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении вектора $\mathbf{s} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$.

2. Найти производную функции $u = \arcsin(z / \sqrt{x^2 + y^2})$ в точке $M(1;1;1)$ в направлении вектора \overline{MN} , где $N(3;2;3)$.

3. Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M(1;2;1)$ в направлении вектора $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

4. Найти величину и направление градиента функции $u = xyz$ в точке $M(2;1;1)$.

5. Найти экстремумы функций: 1) $z = xy^2(1 - x - y)$; ... 2) $z = x^3 + y^3 - 15xy$

3) $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$; ... 4) $z = (x^2 + y^2)(e^{-(x^2 + y^2)} - 1)$

6. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны уравнением $x/3 + y/4 = 1$

7. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$