Методы численного интегрирования

(нахождение определенных интегралов)

1. Аналитический метод

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Где F(x) – первообразная функции f(x)

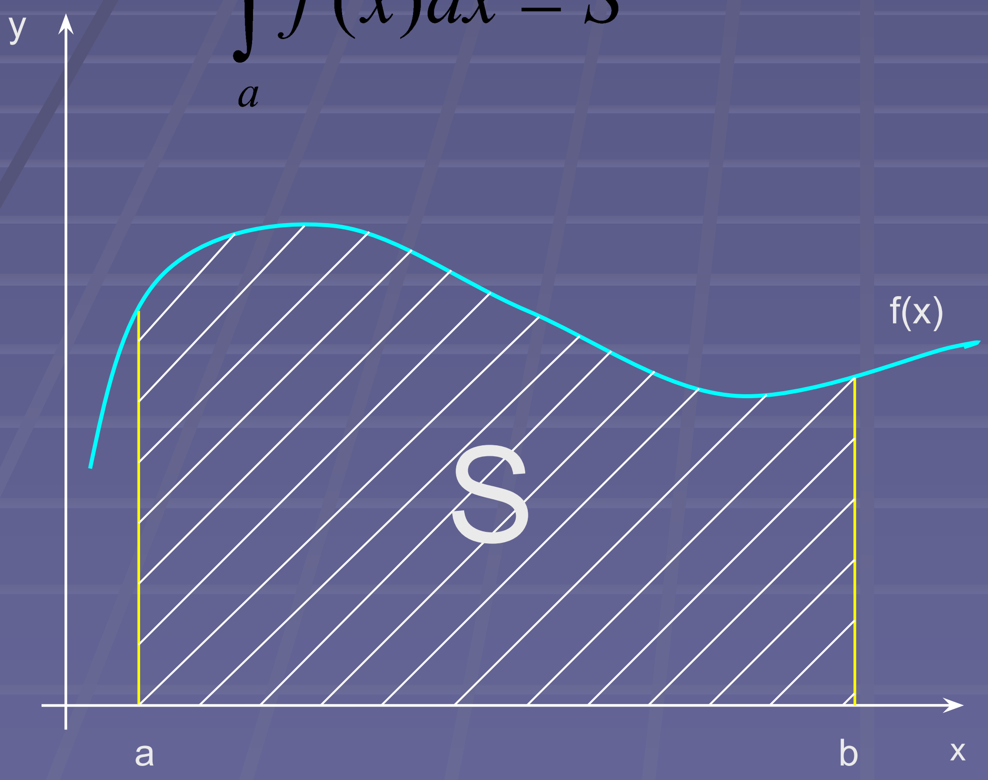
Аналитический метод интегрирования не всегда может быть применен на практике.

Пример «неберущегося» интеграла:

$$\int_a^b e^{x^2}\,dx$$

Графическая интерпретация определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = S$$



Линии ограничения:

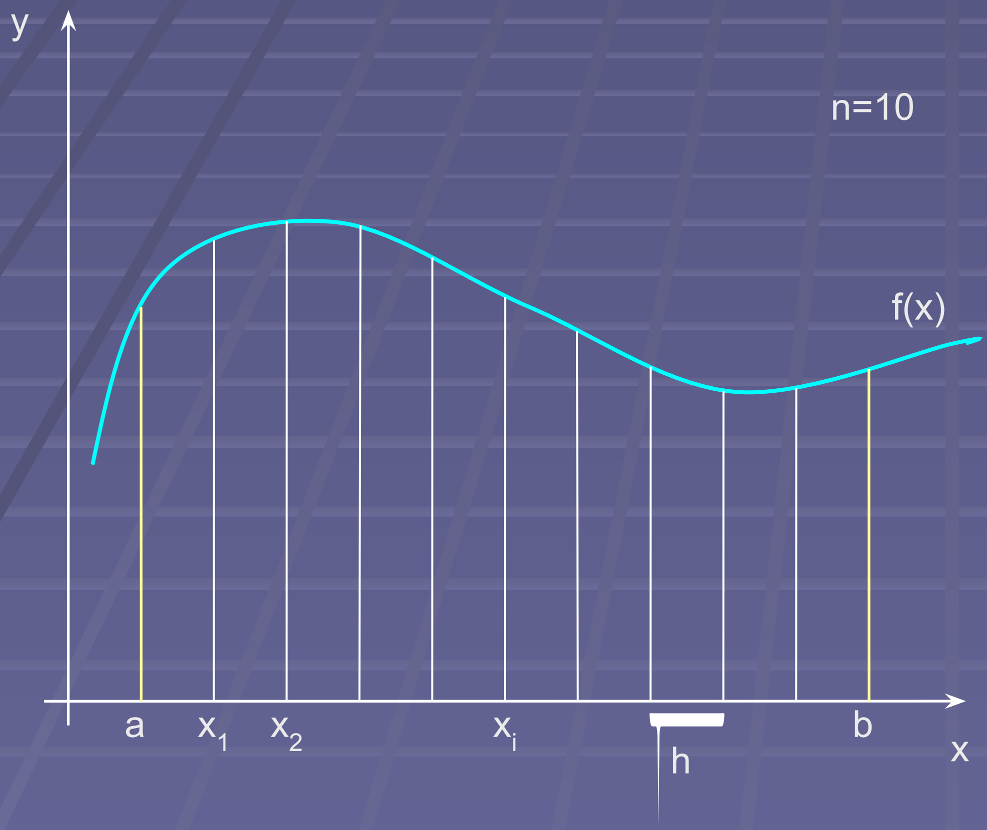
y=0;

y=f(x);

x=a;

x=b.

2. Численные методы



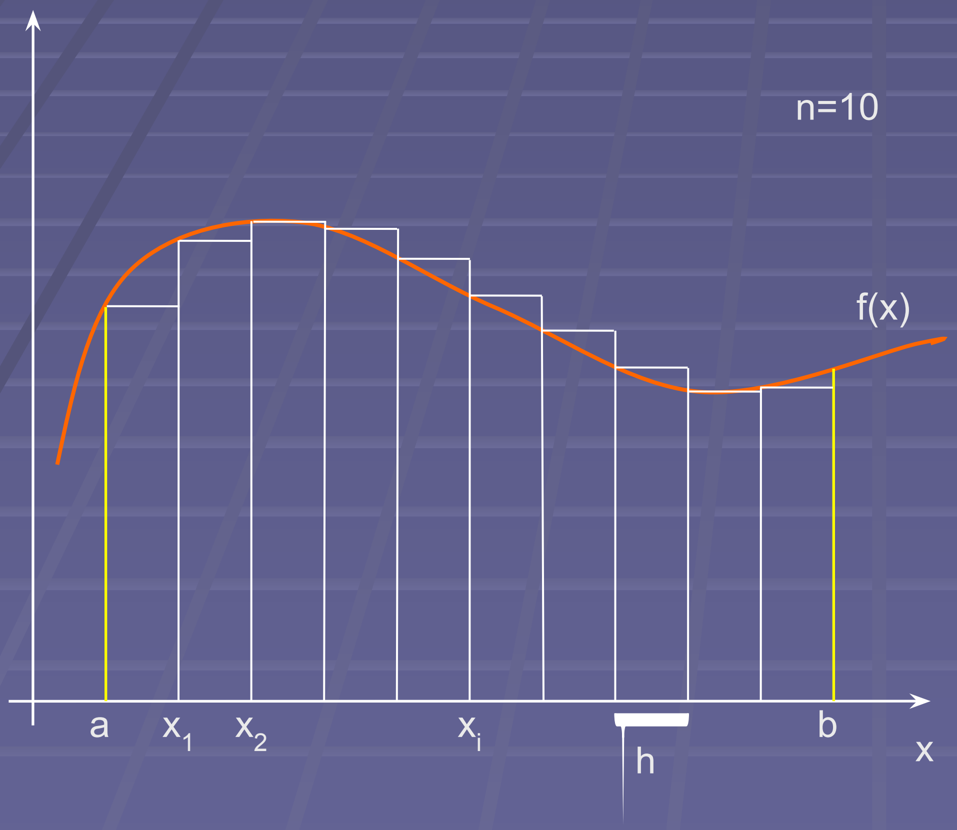
1. [a, b] разбивается на n равных отрезков длиной h.
2. Площадь S разбивается на n полос шириной h.
3. Полоса представляется в виде геометрической фигуры.
4. Рассчитывается площадь каждой полосы.
5. Искомый интеграл есть сумма площадей всех полос.

1. Метод прямоугольников

Отдельно взятая полоса представляется в виде прямоугольника шириной h.

ВОПРОС: Какая величина принимается за высоту прямоугольника?

A. Метод левых прямоугольников

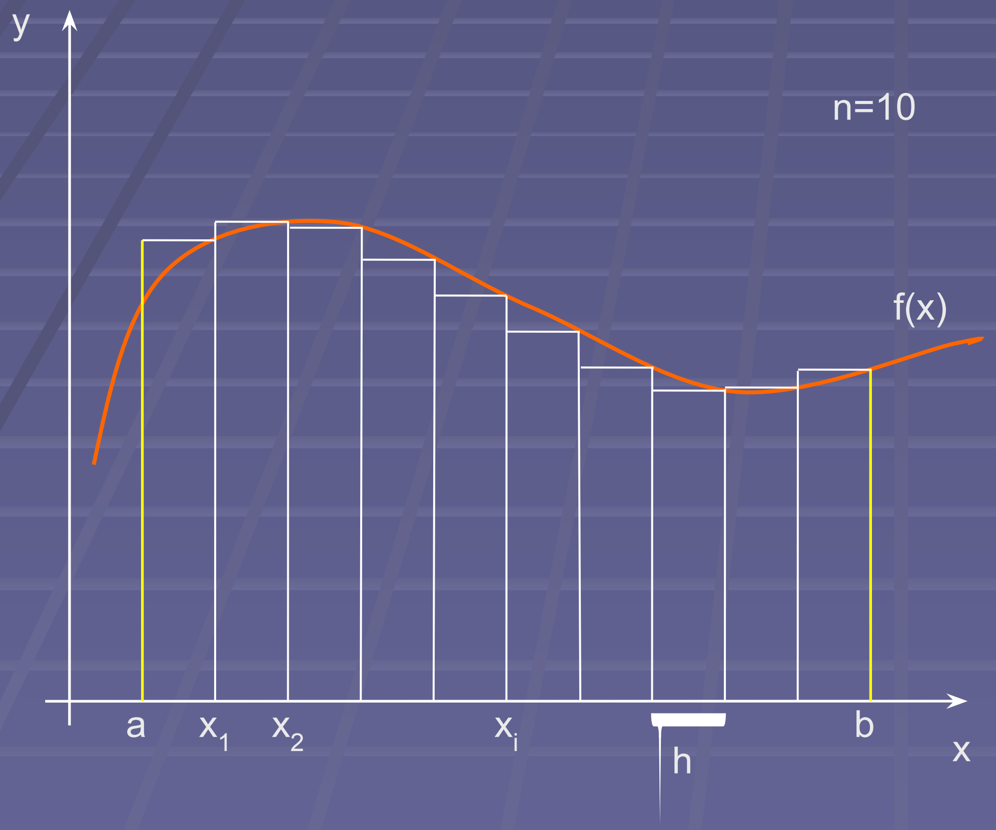


Высота - значение функции в левой точке основания каждой полосы.

Формула расчета интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot h)$$

B. Метод правых прямоугольников

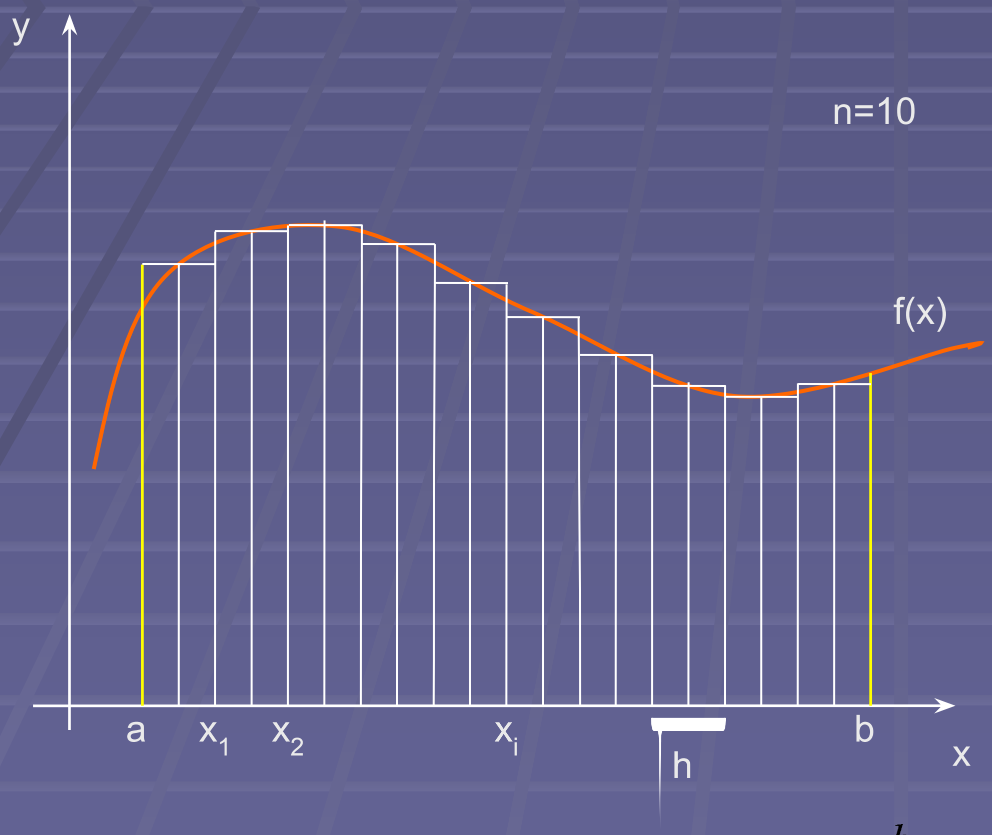


Высота - значение функции в правой точке основания каждой полосы.

Формула расчета интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(a + i \cdot h)$$

С. Метод средних прямоугольников

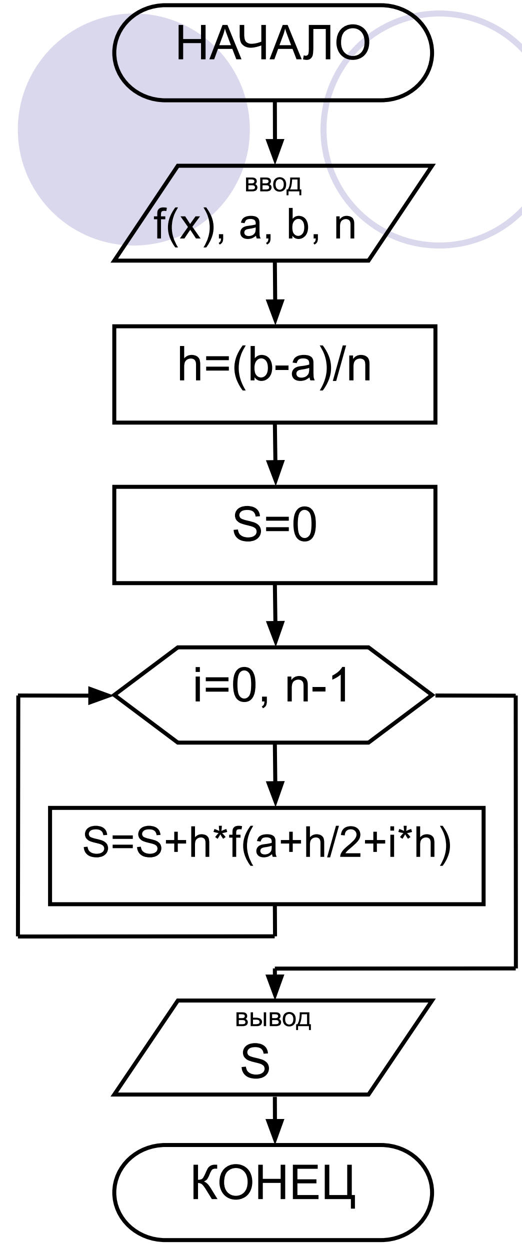


Высота - значение функции в середине основания каждой полосы.

Формула расчета интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{h}{2} + i \cdot h\right)$$

Блок-схема метода средних прямоугольников



2. Метод трапеций

Отдельно взятая полоса представляется в виде перевернутой трапеции высотой h.

Основания трапеции будут равны значениям функции в левой и правой точке высоты трапеции.

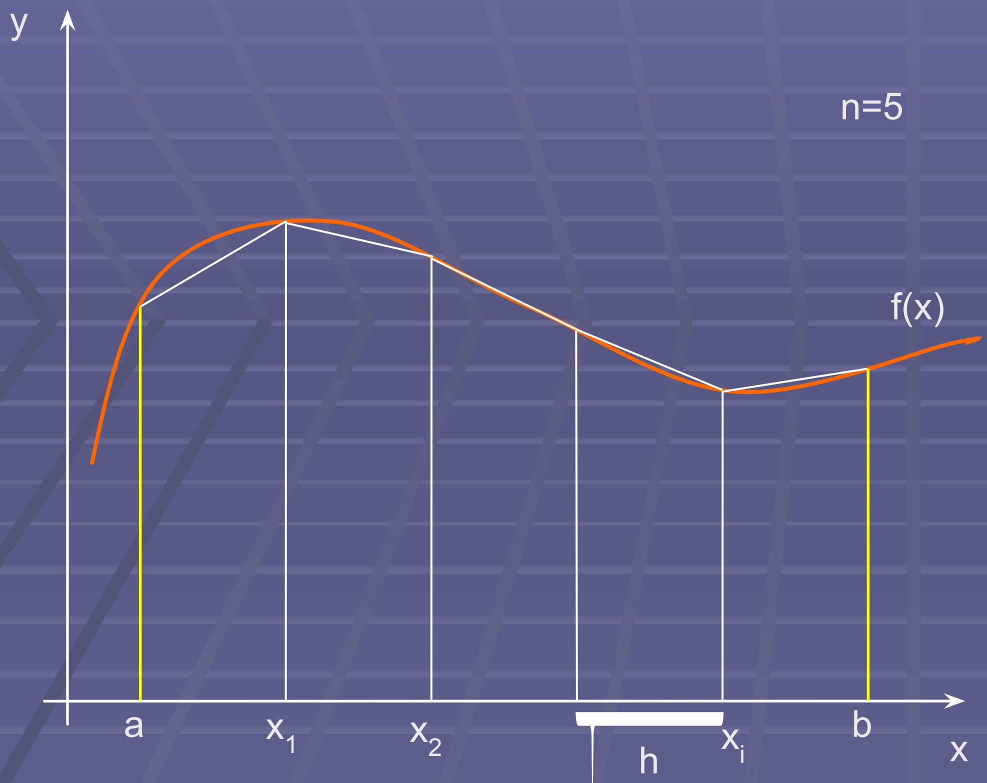
Площадь трапеции:

$$S = h \cdot \frac{c_1 + c_2}{2};$$

$где$

$h - высота;$

$c_1 и\ c_2 - основания$



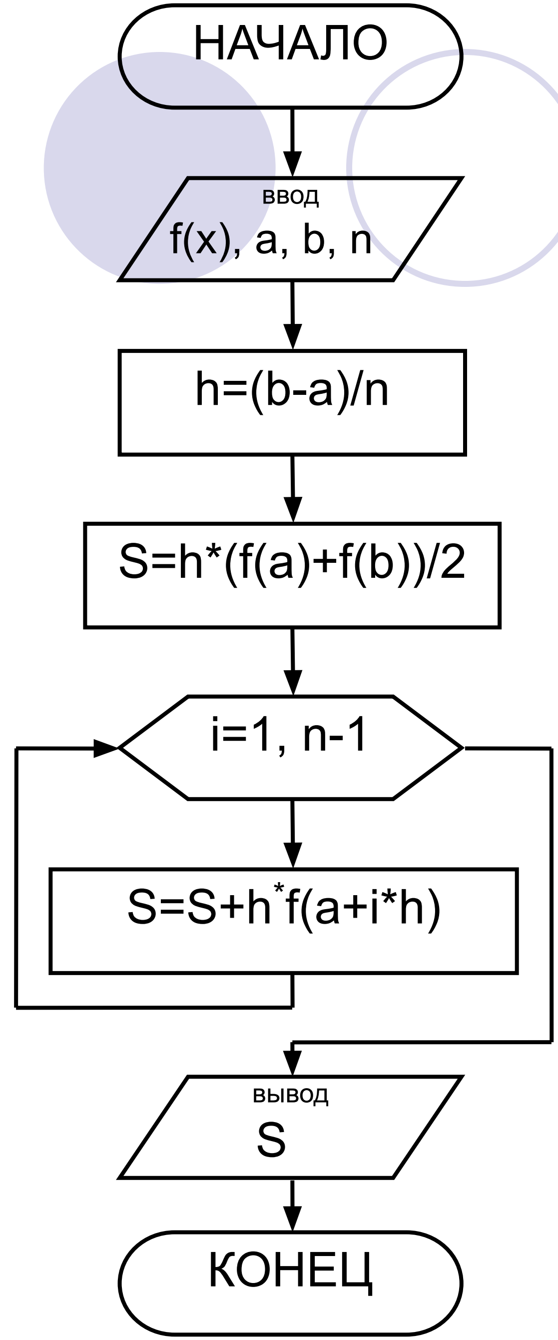
Гладкая кривая заменяется ломаной линией

Интеграл рассчитывается по следующей формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = h\cdot\frac{f(a)+f(x_1)}{2}+h\cdot\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+h\cdot\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}+\ldots+$$

$$+h\cdot\frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2}=h\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}+h\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f(a+i\cdot h)$$

Блок-схема метода трапеций

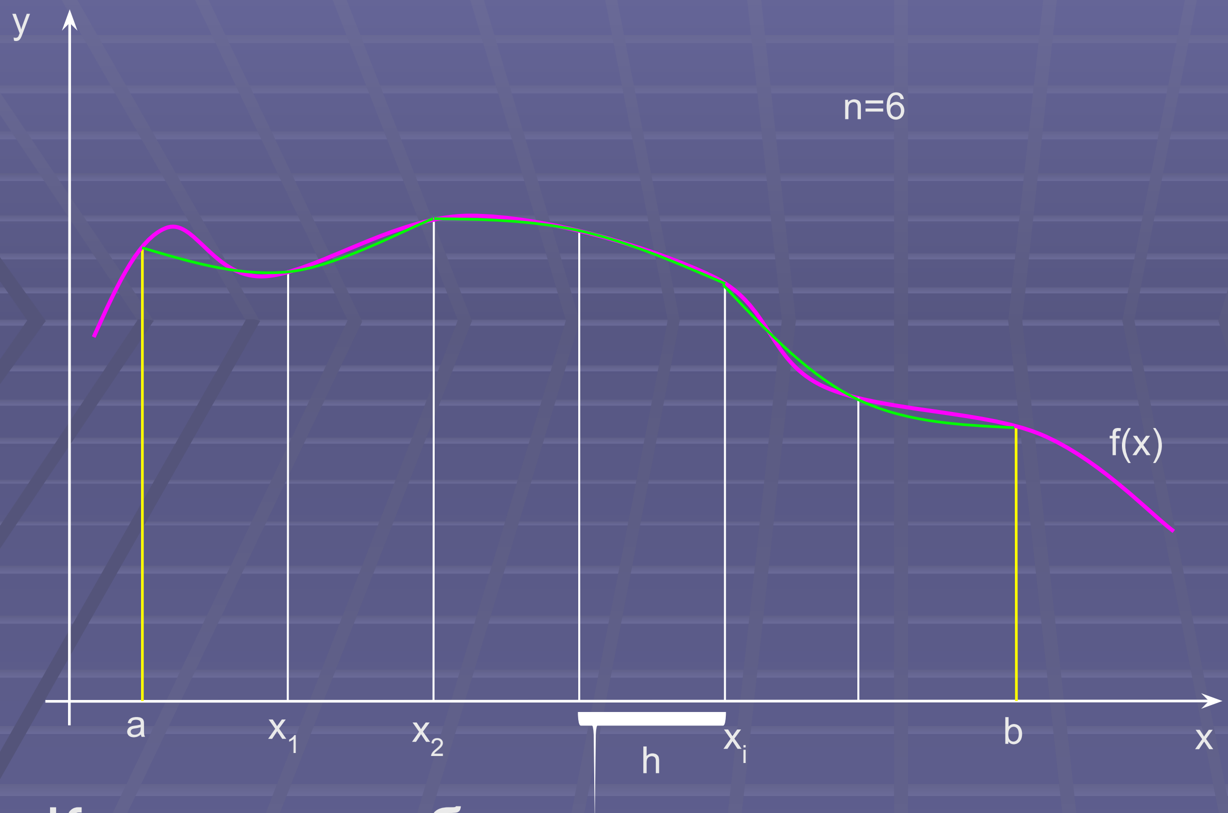


3. Метод Симпсона

Гладкая функция заменяется участками парабол.

Через любые 3 точки на плоскости можно провести одну и только одну параболу.

Парабола проводится через точки пересечения границ 2-х соседних полос с графиком подынтегральной функции.



Гладкая кривая заменяется участками парабол

Каждая парабола заменяет исходную подынтегральную функцию сразу над двумя полосами. Следовательно, **число разбиений должно быть четным !!!**

Рассмотрим ситуацию с одной параболой (2-мя полосами) и выведем формулу для расчета интеграла.

Любая парабола описывается уравнением:

$$y=ax^2+bx+c$$

Точки $(0, y_0)$, (h, y_1), $(2h, y_2)$ лежат на одной параболе, следовательно, должны удовлетворять одной и той же функции.

Число разбиений должно быть четным !!!

Подставляем координаты 3-х точек в уравнение для параболы, получаем систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = y_0 \\ a \cdot h^2 + b \cdot h + c = y_1 \\ a \cdot (2h)^2 + b \cdot 2h + c = y_2 \end{cases}$$

Здесь неизвестные - параметры параболы: a, b, c.

Из 1-го уравнения: y_0=c.

Произведя замену, получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot h^2 + b \cdot h = y_1 - y_0 \\ a \cdot (2h)^2 + b \cdot 2h = y_2 - y_0 \end{cases}$$

Решаем полученную СЛАУ методом Крамера:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & h \\ y_2 - y_0 & 2h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h^2 & h \\ (2h)^2 & 2h \end{vmatrix}}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} h^2 & y_1 - y_0 \\ (2h)^2 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h^2 & h \\ (2h)^2 & 2h \end{vmatrix}}$$

Выведем формулу для расчета коэффициентов a и b:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & h \\ y_2 - y_0 & 2h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h^2 & h \\ (2h)^2 & 2h \end{vmatrix}} = \frac{2h(y_1 - y_0) - h(y_2 - y_0)}{2h^3 - 4h^3} = \frac{y_2 + y_0 - 2y_1}{2h^2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} h^2 & y_1 - y_0 \\ (2h)^2 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h^2 & h \\ (2h)^2 & 2h \end{vmatrix}} = \frac{h^2(y_2 - y_0) - 4h^2(y_1 - y_0)}{2h^3 - 4h^3} = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h}$$

Площадь под фигуры можно вычислить, проинтегрировав полученную параболическую зависимость:

$y=ax^2+bx+c$

$$S=\int_0^{2h}(ax^2+bx+c)dx=\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right)\Bigg|_0^{2h}=\frac{8}{3}ah^3+2bh^2+2ch$$

Подставим в полученную формулу значения для коэффициентов параболы a, b и c:

Получим:

$$S = \frac{8}{3}\frac{y_2 + y_0 - 2y_1}{2h^2}h^3 + 2\frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h}h^2 + 2y_0h =$$

$$= \frac{4}{3}h(y_2 + y_0 - 2y_1) + h(4y_1 - y_2 - 3y_0) + 2y_0h =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Если число разбиений будет не 2, а 4, то формула для вычисления интеграла будет иметь следующий вид:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

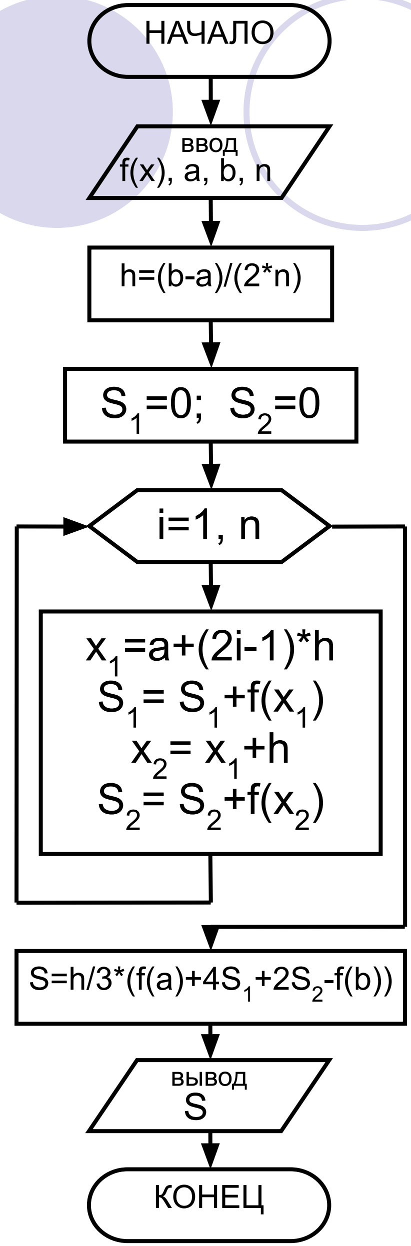
В общем виде:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4\sum y_{нечетн.} + 2\sum y_{четн.} - y_n)$$

Формула Симпсона

Блок-схема метода Симпсона



Замечания о погрешности численного интегрирования

Для оценки погрешности численного интегрирования сравним значения интеграла, рассчитанные различными численными методами с истинным значением интеграла, рассчитанным аналитически.

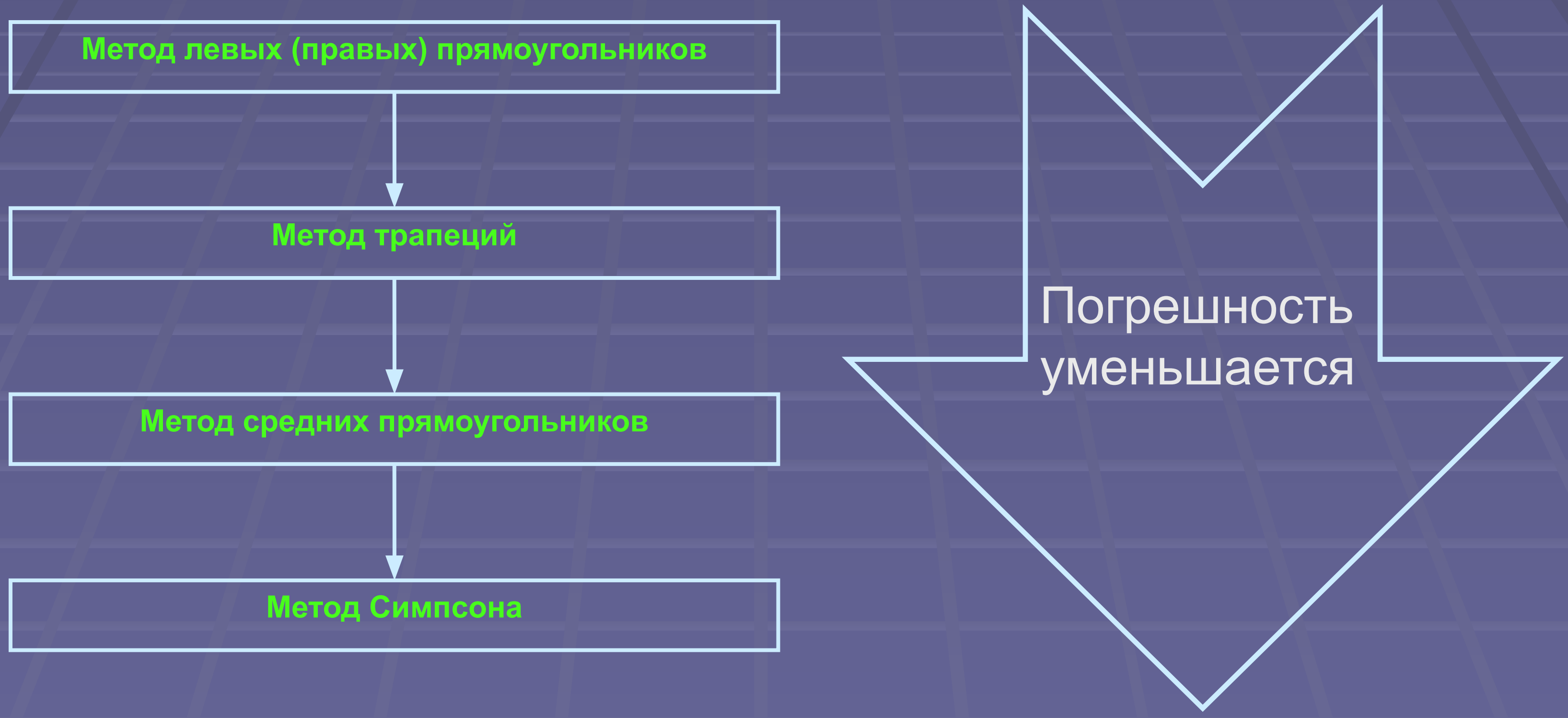
Пример:

$$\int_{0}^{\pi/4} 10\sin 2x\,dx$$

Истинное значение: S=5

Метод	n=4		n=10		n=50	
	Значение, S	Погреш-ность, %	Значение, S	Погреш-ность, %	Значение, S	Погреш-ность, %
Левых прямоу-гольников	3,953831	20,9234	4,597016	8,0597	4,921049	1,5790
Средних прямоу-гольников	5,032273	0,6454	5,005144	0,1029	5,000206	0,0041
Трапеций	4,935579	1,2884	4,989714	0,2057	4,999589	0,0082
Симпсона	5,000041	0,0008	5,000001	0,00002	5,000000	$\sim 10^{-7}$
Истинное значение					5	

Из таблицы видно, что погрешность зависит от метода интегрирования и от количества разбиений интервала интегрирования.



Зависимость погрешности численного интегрирования от числа разбиений интервала интегрирования