Обработка результатов косвенных измерений.

Вопросы:

1. Обработка результатов косвенных измерений при линейной зависимости. Представление результатов измерений.

2. Обработка результатов косвенных измерений при нелинейной зависимости: метод линеаризации, метод приведения.

При косвенных измерениях значение искомой физической величины Y находится на основании результатов измерений аргументов (отдельные результаты наблюдений в ряду измерений) x_1, x_2, …, x_m , связанных с искомой величиной известной функциональной зависимостью:

$$Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Результаты измерений аргументов и оценки их погрешностей могут быть получены из прямых, косвенных, совокупных, совместных измерений или из литературных источников.

Функция F должна быть известна из теоретических предпосылок или установлена экспериментально с погрешностью, которой можно пренебречь.

При оценивании доверительных границ погрешностей результата косвенного измерения обычно принимают вероятность, равную 0,95 или 0,99. Использование других вероятностей должно быть обосновано.

Рассматривается определение результатов косвенных измерений и оценивание их погрешности при условии, что в процессе выполнения измерений параметры объекта не изменяются во времени.

Разработаны методики определения результатов косвенных измерений и оценки их погрешности:

1) при линейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями изменений аргументов;

2) при нелинейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов;

3) для коррелированных погрешностей измерений аргументов при наличии рядов отдельных значений измеряемых аргументов.

1. Обработка результатов косвенных измерений при линейной зависимости.

- Для решения задачи косвенных измерений необходимо, чтобы были известны: вид функций, результаты измерений аргументов x_1, x_2, ..., x_m, и оценки их погрешностей.

Условием справедливости нулевой статической гипотезы об отсутствии корреляционной связи между погрешностями результатов измерения i-го и (i + 1)-го аргументов является выполнение неравенства для критерия Стьюдента.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-n^2}},$$

где n – число измерений.

Значение t, сопоставляют с табличным значением t_q, которое берут для принятого уровня значимости q и числа степеней свободы $f = n - 2$. При $t>t_q$ подтверждается значимость выборочного коэффициента корреляции.

• При условии, что распределение случайных погрешностей результатов измерений аргументов не противоречит нормальному распределению, критерием отсутствия корреляционной связи между погрешностями результатов измерений аргументов является выполнение неравенства.

$$\left|\frac{\bar{r}\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\bar{r}^2}}\right| < t_q,$$

где t_q – коэффициент Стьюдента, соответствующий уровню значимости q и числу степеней свободы $f = n - 2$;

$\bar{r}$ – оценка коэффициента корреляции между погрешностями аргументов x_h и x_j, найденная по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{hi}-\bar{X}_h)\cdot(x_{ji}-\bar{X}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{hi}-\bar{X}_h)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji}-\bar{X}_j\right)^2}},$$

где x_{hi} ; x_{ji} – результаты i-го измерения h-го и j-го аргуменов;

$n_j = n_i = n$ – число измерений каждого из аргументов.

Если измеряемая величина зависит от m аргументов, необходимо проверить отсутствие корреляционных связей между погрешностями всех парных сочетаний аргументов.

Если существует линейная зависимость и отсутствует корреляция между погрешностями измерений аргументов, то обработку результатов выполняют в следующей последовательности.

Искомое значение Y связано с m измеряемыми аргументами x_1, x_2, …, x_m, уравнением:

$$Y = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_m \cdot x_m ,$$

где b_1, b_2,…, b_m – постоянные коэффициенты при аргументах x_1, x_2, …, x_m, соответственно.

При экспериментальном определении коэффициентов b_1, b_2,…, b_m результат измерения величины получается после выполнения 2-х этапов.

На первом этапе оцениваются каждое слагаемое $b_i\ x_i$ как косвенно измеряемую величину, полученную в результате произведения двух измеряемых величин. На втором этапе находят оценку измеряемой величины Y .

- Результат косвенного измерения для известных значений результатов аргументов (т. е. точечные оценки рядов измерений аргументов) x_1, x_2, …, x_m равен:

$$\overline{Y} = F(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \dots, \overline{X}_m).$$

Или результат Y вычисляется по формуле:

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \overline{X}_i,$$

где $\overline{X}_i$ – результат измерения i-го аргумента (параметра X_i);

m – число аргументов.

Причем, следует напомнить, что каждый аргумент (в случае многократных измерений) может быть повторен n раз.

Оценка среднего квадратичного отклонения результата косвенного измерения вычисляется по формуле:

$$S_{\overline{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right) \cdot S_{\overline{X}_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \cdot S_{\overline{X}_i}^2},$$

где $S_{\overline{X}_i}$ – оценка среднего квадратического отклонения измерения аргумента x_i .

1.1. Представление результатов измерений.

Ввиду того, что каждый аргумент может иметь соответствующие доверительные границы неисключенной систематической и случайной погрешностей, то задача определения погрешности косвенного измерения в этих случаях делится на три этапа:

а) суммирование частных неисключенных систематических погрешностей аргументов;

б) суммирование частных случайных погрешностей аргументов;

в) сложение систематической и случайной составляющих погрешности.

Доверительная граница неисключенной систематической погрешности косвенного измерения при условии одинаковой доверительной вероятности частных погрешностей и их равномерного распределения внутри заданных границ определяется по формуле (без учета знака):

$$\theta_{\bar{y}} = k \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial x_j}{\partial F}\right)^2 \cdot \Delta_{\overline{X}_j}^2},$$

где $\theta_{\bar{y}}$ – доверительная граница неисключенной систематической погрешности среднего значения $\overline{X}_j$ -го аргумента.

• При отсутствии корреляционной связи между аргументами оценка СКО случайной погрешности косвенного измерения вычисляется по формуле:

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2 \cdot S_{x_j}^2}\ ,$$

где S_{x_j} – оценка СКО случайной погрешности результата измерения $\overline{X}_j$-го аргумента.

При нормальном распределении погрешностей косвенного измерения доверительная граница случайной составляющей погрешности вычисляется по формуле:

$$\Delta = \pm\, t_p \cdot S_y\ ,$$

где t_p – квантиль Стьюдента при доверительной вероятности P с эффективным числом степеней свободы $k_{эф}$, определяемом при малых объемах выборки по формуле:

$$k_{\text{эф}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2 \cdot S_{\overline{X}_j}^2\right)^2}{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j+1}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^4 \cdot S_{\overline{X}_j}^4} - 2\ .$$

- При больших объемах число степеней свободы находится по формуле:

$$k = \frac{m}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j - 1}}.$$

Доверительная граница суммарной погрешности результата косвенного измерения определяется по правилам, изложенным выше.

2. Обработка результатов косвенных измерений при нелинейной зависимости.

- Существуют два метода определения точечной оценки результата косвенного измерения и её погрешности: линеаризации и приведения.

2.1. Метод линеаризации.

Для косвенных измерений при нелинейных зависимостях и некоррелированных погрешностях измерений аргументов используется метод линеаризации.

Метод линеаризации основан на том, что погрешность измерения значительно меньше измеряемой величины, и поэтому вблизи средних значений $\overline{X}_i$ аргументов нелинейная функциональная зависимость линеаризуется и раскладывается в ряд Тейлора (члены высокого порядка не учитываются).

Линеаризуя функцию нескольких случайных аргументов (какими и являются результаты измерений и их погрешности), можно получить, как правило, достаточно простое выражение для вычисления оценок среднего значения и среднего квадратического отклонения функции.

- Разложение нелинейной функции в ряд Тейлора имеет вид:

$$Y = F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots, \bar{X}_m) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{X_i} \Delta X_i + R.$$

Метод линеаризации допустим, если можно пренебречь остаточным членом R .

Остаточным членом $R = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_I^2}\right)_{\bar{X}_i} \cdot (\Delta X_i)^2$ пренебрегают, если

$R < 0{,}8 \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial X_I}\right)_{\bar{X}_i}^2 \cdot S_{\bar{X}_i}^2}$, где $S_{\bar{X}}$ – среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей результата измерения x_i -го аргумента.

Первое слагаемое правой части уравнения есть точечная оценка истинного значения косвенной величины, которая получается подстановкой в функциональную зависимость средних арифметических $\bar{X}_i$, значений аргументов:

$$Y = F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_m).$$

- Второе слагаемое $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{\overline{X}_i}\cdot\Delta X_i$, есть сумма составляющих погрешности косвенного измерения, называемых частными погрешностями, а частные производные $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ - коэффициентами влияния.

Отклонения ΔX_i должны быть взяты из полученных значений погрешностей и такими, чтобы они максимизировали выражение для остаточного члена R .

Если частные погрешности косвенного измерения не зависят друг от друга, т. е. являются некоррелированными, и известны доверительные границы погрешности аргументов при одинаковой вероятности, то предельная погрешность (без учета знака) косвенного измерения вычисляется по формуле:

$$\Delta_{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|\cdot\Delta\bar{x}_j\,,$$

где $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ – значения частных производных функциональной зависимости определяются при средних значениях аргументов $\frac{\partial F}{\partial x_j}=\frac{\partial F}{\partial \bar{x}_j}$. Этот метод, называемый максимум-минимум, дает значительно завышенное значение погрешности косвенного измерения.

- Относительно правильная оценка погрешности косвенного измерения, получается, по методу квадратического суммирования:

$$\Delta_{\bar{y}} = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial X_I}\right)^2 \cdot \Delta_{x_j}^2}.$$

В ряде случаев расчет погрешности косвенного измерения значительно упрощается при переходе к относительным погрешностям. Для этого используется прием логарифмирования и последующего дифференцирования функциональной зависимости. Когда предельная погрешность косвенного измерения, полученная по методу максимума-минимума:

$$\delta_{\bar{y}} = \pm\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial \ln Y}{\partial x_j}\right| \cdot \Delta\bar{x}_j,$$

а по методу квадратического суммирования:

$$\delta_{\bar{y}} = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial \ln Y}{\partial x_j}\right|^2 \cdot \Delta_{x_j}^2}.$$

- **2.2. Метод приведения.**

Этот метод оценивания погрешностей косвенных измерений применяют, когда не известны законы распределения погрешностей измерений аргументов, а между аргументами существует корреляция.

Метод основан на приведении ряда отдельных значений косвенно измеряемой величины к ряду прямых измерений. Получаемые сочетания отдельных результатов измерений аргументов подставляют в формулу $Y = F(x_1, x_2,\ldots,x_m)$ и вычисляют отдельные значения измеряемой величины Y : X_1, X_2, …, X_m по которым затем вычисляют результат косвенного измерения:

$$Y = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} X_i,$$

где m – число отдельных значений измеряемой величины;

x_i – i-е отдельное значение измеряемой величины, полученное в результате подстановки i-го сочетания согласованных результатов измерений аргументов в формулу.

- Оценку среднего квадратического отклонения случайных погрешностей результата косвенного измерения вычисляют по формуле:

$$S_{\overline{Y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{(X_i - \overline{Y})^2}{m \cdot (m-1)}}.$$

Доверительные границы случайной погрешности для результата измерения вычисляют по формуле:

$$\Delta = T \cdot S(\overline{Y}) \text{ ,}$$

где T – коэффициент, зависящий от вида распределения отдельных значений измеряемой величины, выбранной доверительной вероятности.

При нормальном распределении отдельных значений измеряемой величины доверительные границы случайных погрешностей вычисляют в соответствии с ГОСТ 8.207-76 .