Министерство образования и науки Республики Казахстан
Южно-Казахстанский государственный университет
им. М. Ауэзова

ПРЕЗЕНТАЦИЯ

На тему: Функциональные уравнения в школьном курсе математики

Выполнил: Мырзабеков Т. М.
Группа ЕП-14-1р
Научный руководитель: Аширбаев Н. К.-
д.ф-м.н., профессор

Шымкент 2017

Цель работы - выяснить, что является функциональным уравнением и их системами, найти способы решения и составить образцовое пособие по изучению функциональных уравнений, также сборник задач для использования математическими классами.

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ:

1. **ИЗУЧЕНИЕ И АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ;**
2. **ПОИСК СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ;**
3. **РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**
4. **СОСТАВЛЕНИЕ СБОРНИКА**

ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ: ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ И СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Определение: *Функциональным уравнением* называют уравнение, в котором неизвестным является функция, связанная при помощи образования сложной функции с известными функциями (т.е. неизвестная функция связана с известными с помощью операции композиции).

Определение: *Решением функционального уравнения* называется всякая функция, при подстановке которой в функциональное уравнение вместо неизвестной функций получаем истинное равенство двух функций.

Некоторые функциональные уравнения знакомы нам еще из школьного курса это

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x) = -f(x)$$

$$f(x+T) = f(x)$$

Они задают такие свойства функций, как чётность, нечётность, периодичность…

Определение. Если в числовом множестве X вместе с любым его элементом x содержится и элемент $-x$, то данное числовое множество называется *симметричными относительно начала координат*.

Например, $(-a;a)$, $[-2;+2]$, $(-\infty;+\infty)$- симметричные множества,

а $(-a;a]$, $(-3;2)\cup(2;4)$, $[-1;5]$- несимметричные множества.

Четность и нечетность функции

Определение. Если область определения функции *$y=f(x)$* является симметричным множеством и для любого аргумента *x* выполняется равенство *$f(-x)=f(x)$*, то функция называется *четной функцией*.

Определение. Если область определения функции *$y=f(x)$* является симметричным множеством и для любого аргумента *x* выполняется равенство *$f(-x)=-f(x)$*, то функция называется *нечетной функцией*.

Пример

Определим четность или нечетность функций:

$$f(x) = x^2 + 4$$

$$f(x) = -x^3 + x$$

$$f(x) = \frac{3}{x} + x^2$$

$$f(x) = x^4$$

$$f(x) = x$$

Решение

$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$ - четная

$f(-x) = -(-x)^3 + (-x) = x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$

- нечетная

$f(-x) = \frac{3}{-x} + (-x)^2 = -\frac{3}{x} + x^2$ -ни четная ни нечетная

$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$ - четная

$f(-x) = (-x) = -f(x)$ - четная

Определение. Если найдется такое чисто $T \neq 0$, что для любых x из области определения функции $y=f(x)$ выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$, то функция называется *периодической функцией*. Здесь число $T \neq 0$ называется *периодом функции*.

Из курса алгебры для 9 класса известно, что для функций $y=\sin x$, $y=\cos x$ соответственно выполняется равенства $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, а для функций $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$ соответственно выполняется равенства $\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}(x+\pi)=\mathrm{ctg}\,x$. Следовательно, для функций $y=\sin x$, $y=\cos x$ число $T=2\pi$, а для функций $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$ число $T=\pi$.

Пример

Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на R.

Решите уравнение: $f(3x + 2) = f(4x^2 + x);$

Есть такая теорема: если функция возрастает на промежутке X, то каждое своё значение она принимает, в единственной точке.

Поэтому,

$$3x+2 = 4x^2 + x;$$

$$4x^2 -2x-2=0;$$

$$2x^2 - x-1=0;$$

$$x_1=1 \text{ и } x_2= -0,5$$

Ответ: $x_1=1$ и $x_2= -0,5$.

Примеры решения функциональных уравнений методом подстановки.

Пример. Найти f(x)

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

Решение

1) Пусть $\frac{x-2}{x+1}=z,$ тогда $x=\frac{z+2}{1-z}\,(z\neq 0, z\neq 1)$

2) Подставим в исходное уравнение, получим $f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{z+2}{1-z}.$

3)Заменим z на $\frac{1}{z}$ получим в правой части уравнения: $f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{\frac{1}{z}+2}{1-\frac{1}{z}}$ или после преобразований

$$f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{1+2z}{z-1}$$

4)Итак, получили два уравнения:

$$f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{z+1}{1-z}$$

$$f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1+2z}{z-1}$$

5)Умножим обе части 1-го уравнения на (-2) и сложим со 2-ым уравнением, получим:

$$-2f\left(\frac{1}{z}\right)-4f(z)=\frac{-2z-4}{1-z}$$

$$2f\left(\frac{1}{z}\right)+f(z)=\frac{1+2z}{z-1}$$

$$-3f(z)=\frac{2z+4+1+2z}{z-1}$$

$$-3f(z)=\frac{4z+5}{z-1}$$

$$f(z)=\frac{4z+5}{3-3z}$$

Тогда $$f(x)=\frac{4x+5}{3-3x}$$

Пример:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

1) Пусть, $\dfrac{x-2}{x+1}=z, тогда\ x=\dfrac{z+2}{1-z}\ (z\neq 0, z\neq 1)$

2) Подставим в исходное уравнение, получим

$$f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{z+2}{1-z}$$

3) Заменим z на $\dfrac{1}{z}$ получим

$$f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{z}+2}{1-\frac{1}{z}}$$

или после преобразований в правой части уравнения:

$$f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1+2z}{z-1}$$

4)Итак, получили два уравнения:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) + 2f(z) = \frac{z+2}{1-z}$$

$$f(z) + 2f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1+2z}{z-1}$$

5)Умножим обе части 1-го уравнения на (-2) и сложим со 2-ым уравнением, получим:

$$-2f\left(\frac{1}{z}\right) - 4f(z) = \frac{-2z-4}{1-z}$$

$$2f\left(\frac{1}{z}\right) + f(z) = \frac{1+2z}{z-1}$$

$$-3f(z) = \frac{2z+4+1+2z}{z-1}$$

$$-3f(z) = \frac{4z+5}{z-1}$$

$$f(z) = \frac{4z+5}{3-3z}$$

Тогда ответ:

$$f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}$$

Пример: $2f(x)+f(1-x)=x^2$

1) Заменим в уравнении *x* на *1-x*, получим

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$$

2) Умножим обе части исходного уравнения

$$2f(x)+f(1-x)=x^2$$

на *(-2)* и сложим с уравнением $2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$

получим:

$$-3f(x)=-2x^2+1-2x+x^2$$

$$-3f(x)=-x^2-2x+1$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}$$

Пример $f(x)+xf(1-x)=1+x$

- Заменим x на $1-x$, получим $f(1-x)+(1-x)f(x)=1+1-x$

- Умножим обе части уравнения $f(1-x)+(1-x)f(x)=2-x$ на x и вычтем из уравнения $f(x)+xf(1-x)=1+x$, получим

$$xf(1-x)+x(1-x)f(x)=2x-x^2$$

$$f(x)+xf(1-x)-xf(1-x)-x(1-x)f(x)=1+x-2x+x^2$$

$$f(x)-x(1-x)f(x)=x^2-x+1$$

$$f(x)(x^2-x+1)=x^2-x+1$$

$$f(x)=1$$

Пример $2f(3-x)+3f(x-1)=2x-1$

1)Пусть $x=3-t$, тогда уравнение принимает вид:

$2\cdot f(3-3+t)+3f(3-t-1)=2(3-t)-1$

$2\cdot f(t)+3f(2-t)=5-2t$

2)Пусть $x=t+1$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$2f(3-t-1)+3f(t+1-1)=2t+2-1$

$2f(2-t)+3f(t)=2t+1$

3)Умножим обе части уравнения из п.1 на 2, а обе части уравнения из п.2 на (-3) и почленно сложим получившиеся уравнения:

$-5f(t)=10-4t-6t-3$

$-5f(t)=7-10t$

$f(t)=2t-1,4$

Ответ: $f(x)=2x-1,4$

Пример $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3-x^2}{x}$

1) Заменим x на $\frac{1}{x}$ получим $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}$

или $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^2-1}{x}$

2)Умножим обе части уравнения из п.1 на (-2) и сложим с исходным уравнением:

$$-2f\left(\frac{1}{x}\right)-4f(x)=\frac{-6x^2+2}{x}$$

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3-x^2}{x}$$

получаем $$-3f(x)=\frac{-6x^2+2+3-x^2}{x}$$

...

$$f(x) = \frac{-7x^2 + 5}{-3x}$$

$$f(x) = \frac{7x^2 - 5}{3x}$$

Классические функциональные уравнения

В математике есть несколько типов относительно простых функциональных уравнений, решения которых хорошо известны каждому математику. Самым простым из них является следующее уравнение для функций вида

$$y = kx$$

(оно рассматривалось еще Коши):

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (15)$$

для всех действительных x.

Пример

Найти x, если

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$$

Решение

Рассмотрим уравнение: $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$

Получим: $f(2x+1)+f(3x)=0$

$$f(2x+1)=-f(3x)$$

Если функция нечетная то -f(3x)=f(-3x)

Проверим: $f(-t)=-t(2+\sqrt{(-t)^2+3})=-t(2+\sqrt{t^2+3})$ -нечетная

Значит f(2x+1)=f(-3x)

2x+1=-3x

x=-1/5

Пример

Решить неравенство: $4f(x)+g(x)\le 0$

если функция f(x) и g(x) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} f(2x+1)+g(x-1)=x \\ f(2x+1)-2x^2-2g(x-1)=0 \end{cases}$$

Решение

Умножим второе уравнение на -1 и сложим с первым

$$\begin{cases} 2x^2+3g(x-1)=x \\ f(2x+1)+g(x-1)=x \end{cases}$$

1)Выразим из первого уравнения g(x-1): $g(x-1)=\dfrac{x-2x^2}{3}$

Найдем g(x). Введем замену x-1=t => x=t+1

$$g(t)=\frac{(t+1)-2(t+1)^2}{3}=\frac{t+1-2t^2-4t-2}{3}=\frac{-2t^2-3t-1}{3}$$

Получим $g(x)=\dfrac{-2x^2-3x-3}{3}$

2)Вернемся к системе:

Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым:

$$\begin{cases} 3f(2x+1)-2x^2=2x \\ f(2x+1)-2x^2-2g(x-1)=0 \end{cases}$$

Получим:

$$f(2x+1)=\frac{2x+2x^2}{3}$$

Введем замену $2x+1=a => x=\frac{a-1}{2}$

$$f(a)=\frac{a-1+\frac{(a-1)^2}{2}}{3}=\frac{2a-2+a^2-2a+1}{6}=\frac{a^2-1}{6}$$

Получим: $f(x)=\frac{x^2-1}{6}$

Решим неравенство:

$$\frac{4(x^2-1)}{6}-\frac{2x^2+3x+1}{3}\le 0$$

$$\frac{2x^2-2-2x^2-3x-1}{3}\le 0$$

$$\frac{-3x-3}{3}\le 0$$

$$-x-1\le 0$$

$$x\ge -1$$

Ответ: $x\in\left[-1;+\infty\right)$

Список использованной литературы

- Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н.., Савин А.Н., Саушкин И.Н. Функциональные уравнения. – Самара: В мире науки, 1999
- Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. – К.: Вища школа. Головное издательство, 1983. – 96 с
- Ильин В.А. Методы решения функциональных уравнений // Соросовский образовательный журнал, 2001, № 2, с. 116 – 120
- Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения.– СПб.: Лань, 1997. – 160 с
- Кострикина Н.П. “Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов” - М: “Просвещение”, 1991г.
- Смышляев В.К.. Практикум по решению задач школьной математики. – М: “Просвещение”, 1978г.