

Использование программы **GeoGebra** на
уроках математики как средство
подготовки учащихся к ЕГЭ

GeoGebra

www.geogebra.org

Что такое GeoGebra?

это бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете. Она завоевала несколько образовательных наград в Европе и США.

GeoGebra

Бесплатная математическая программа для обучения и самообучения.

[Скачать](#)

- Интерактивные графические модели, работа с алгеброй и таблицами
- Работа начиная со школьного уровня и заканчивая уровнем института
- Бесплатные материалы для обучения

Первые шаги

- Начните с наших [Ознакомительных материалов](#)
- Задавайте вопросы на нашем [Форуме](#)
- Используйте наши уже готовые [Материалы для обучения](#)

Подписка E-Mail

Напишите ваш e-mail и нажмите Enter, чтобы всегда быть в курсе новостей GeoGebra.

Последние новости

[May Newsletter](#)
[GeoGebra News May 2012](#)

[GeoGebra Conference 2012](#)
[21-23 September in Warsaw, Poland](#)

Мероприятия
Присоединитесь к одному из наших [GeoGebra Мероприятий](#)

[f](#) [You](#) [t](#)

Google™ Custom Search

Официальный сайт программы
www.geogebra.org

Установка программы

GeoGebra

Russian

О программе [Скачать](#) [Справка](#) [Материалы](#) [Сообщество](#)

[Скачать](#) [Инсталляторы](#) [Портативная версия](#)

WebStart

Установите и запустите GeoGebra на вашем компьютере. У вас появится иконка на рабочем столе, чтобы использовать программу, не только в режиме offline.

» Webstart

» GeoGebraPrim

Запуск Апплета

Запуск полнофункциональной версии GeoGebra в вашем браузере.

→ Applet Start

Подписка E-Mail

Напишите ваш e-mail и нажмите Enter, чтобы всегда быть в курсе новостей GeoGebra.

Offline Инсталляторы

Вы также можете скачать оффлайн инсталлятор, чтобы пользователи, которые не имеют доступа в интернет дома, могли использовать GeoGebra.

Лицензия GeoGebra

Вы имеете право копировать, распространять и передавать третьим лицам GeoGebra в некоммерческих целях. Детали смотрите на странице "[Лицензия GeoGebra](#)".

Выбор операционной системы

GeoGebra

Russian ▼

О программе [Скачать](#) [Справка](#) [Материалы](#) [Сообщество](#)

[Скачать](#) [Инсталляторы](#) [Портативная версия](#)

GeoGebra инсталляторы

Скачайте и установите GeoGebra на ваш компьютер, используя один из наших установочных пакетов. Вы можете копировать, распространять и передавать GeoGebra третьим лицам в некоммерческих целях. Пожалуйста посмотрите [GeoGebra лицензию для деталей](#).



[Windows](#)



[Mac OS X](#)

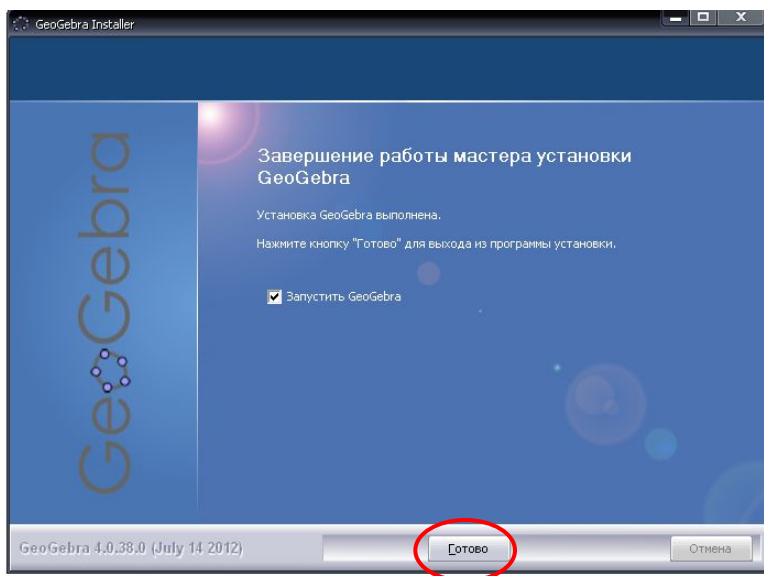
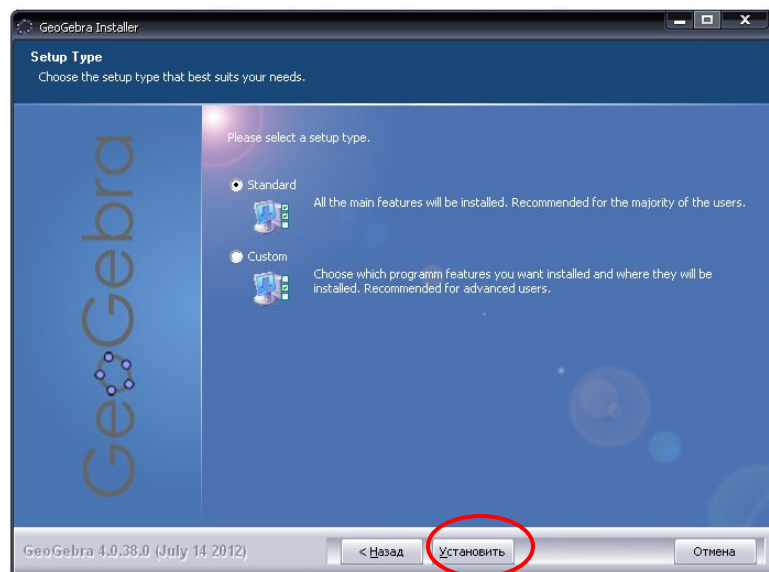
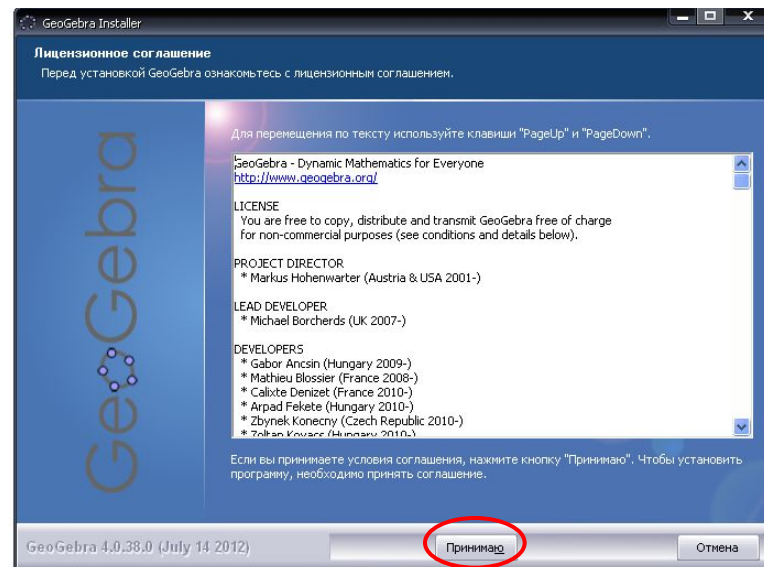


[Linux](#) (CentOS, Debian, Fedora, Mandriva, openSUSE, RedHat, Ubuntu)
[Unix](#)

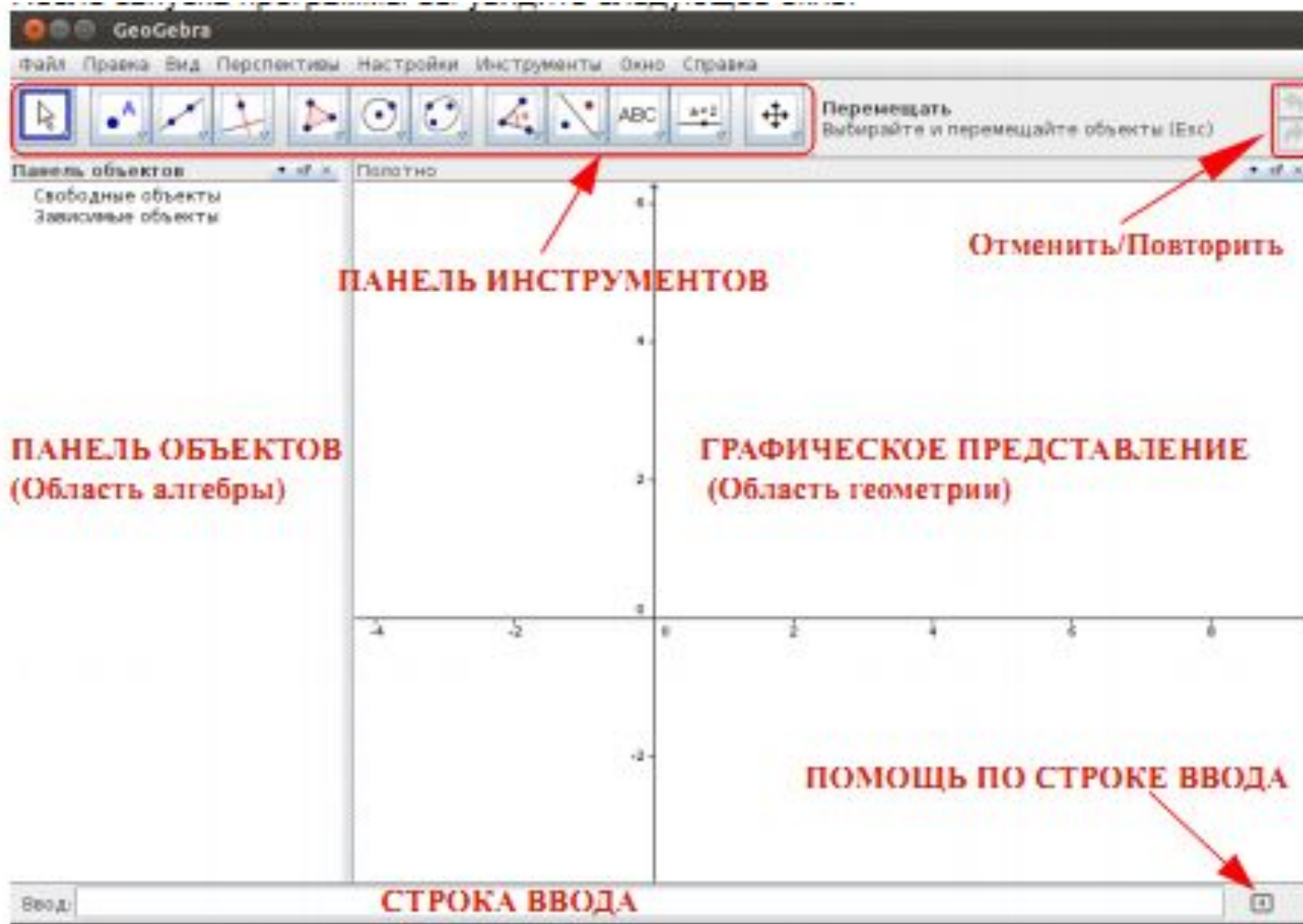


[XO - one laptop per child](#)

Установка программы



Программа GeoGebra



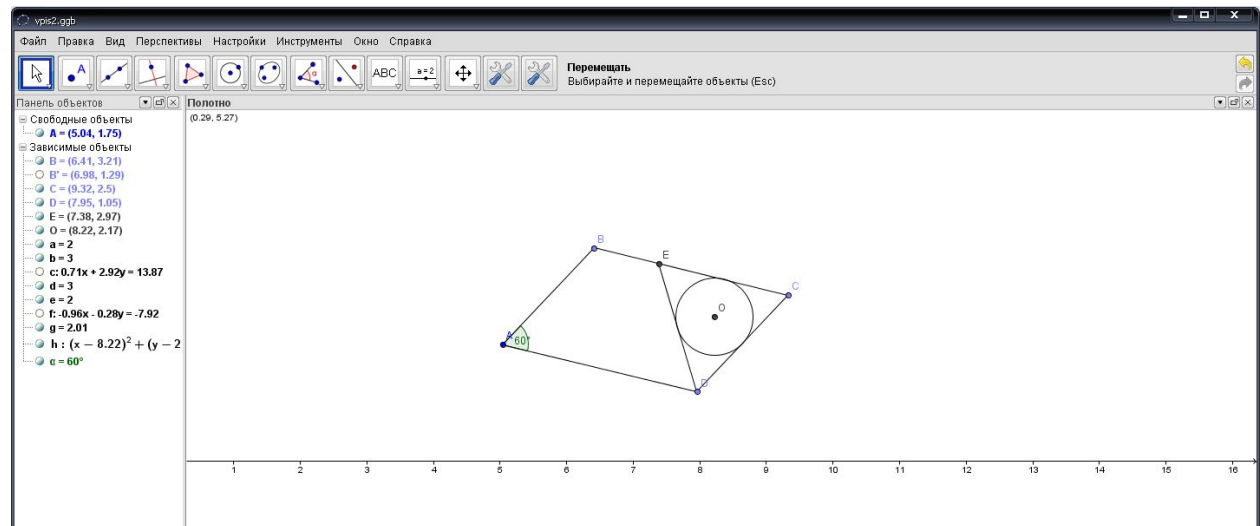
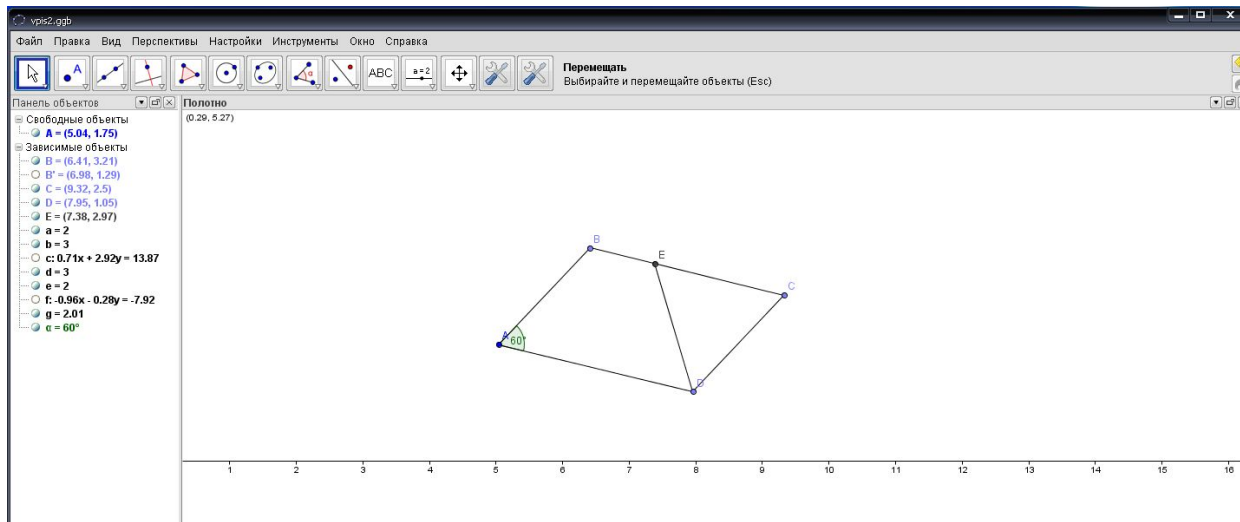
Пример 1. Решение задачи С4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB=2$, $BC=3$,
угол A равен 60 градусам .

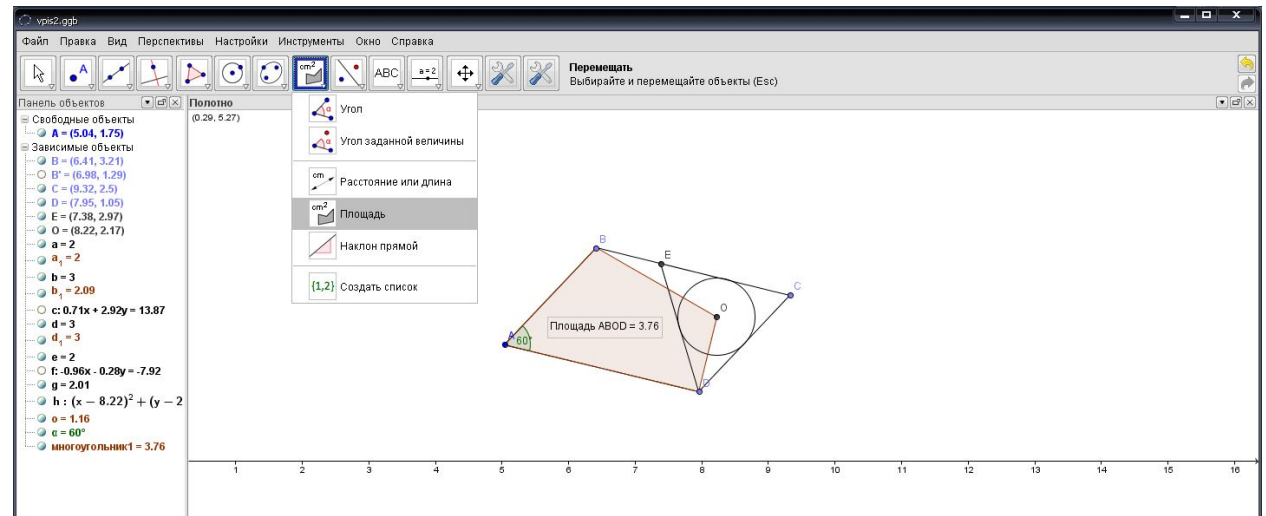
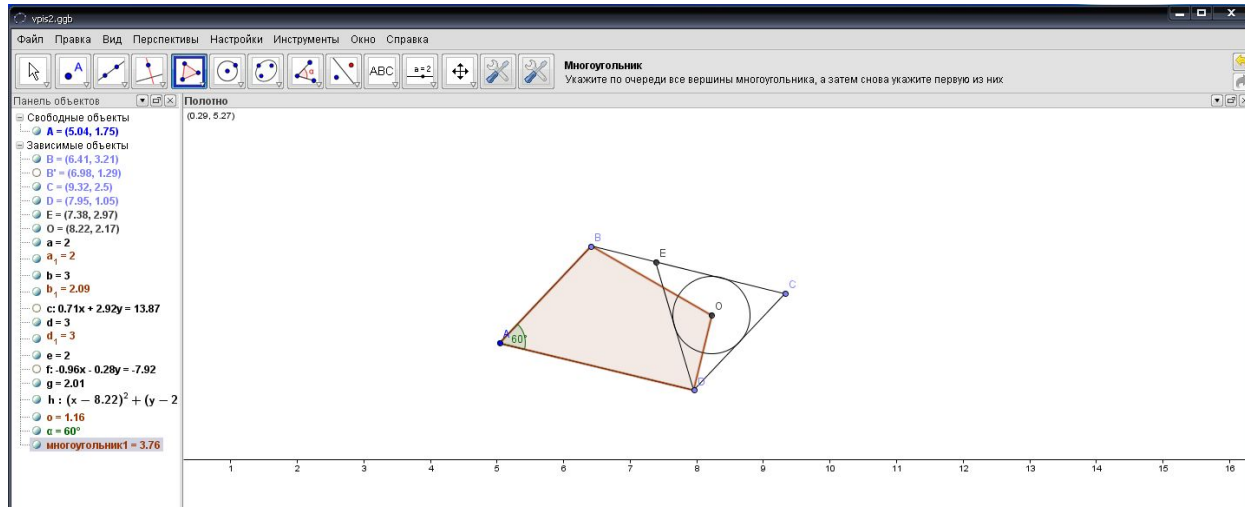
Окружность с центром O касается биссектрисы
угла D и двух сторон
параллелограмма, исходящих из вершины
одного его острого угла.

Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Построение параллелограмма, биссектрисы и окружности

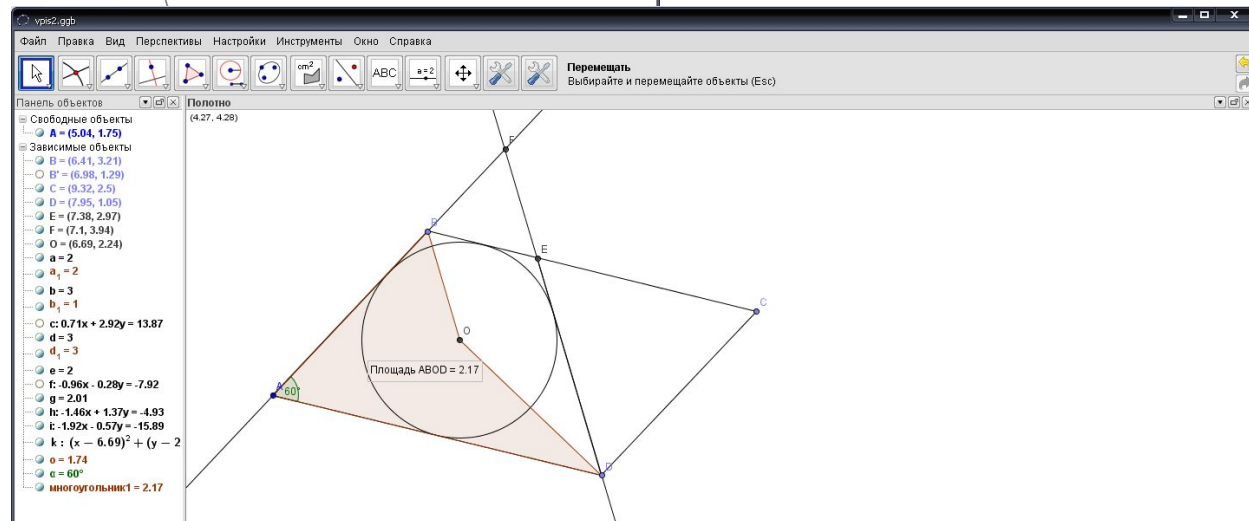
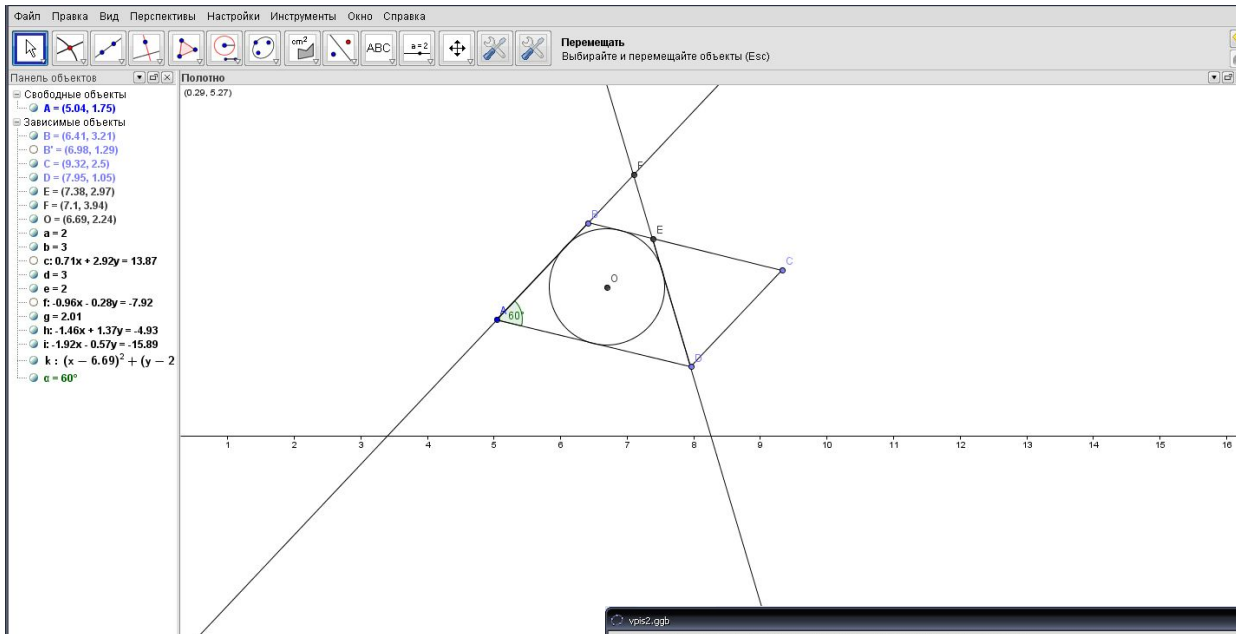


Построение многоугольника и нахождение площади



Площадь ABOD = 3,76

2 случай построения окружности

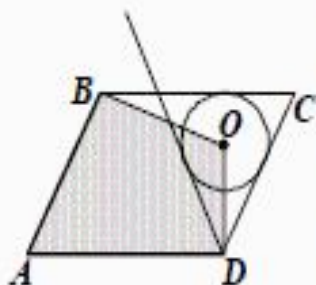
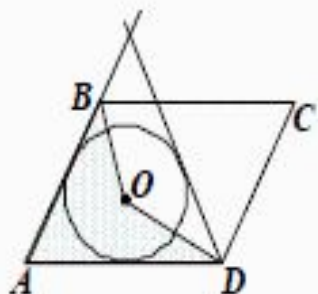


Площадь $ABOD = 2,17$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2,17$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2,17$$

Решение задачи и сравнение результатов



Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2,17$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6} \approx 3,75$$

Результаты в
Geogebra

Площадь $ABOD = 2,17$

Площадь $ABOD = 3,76$

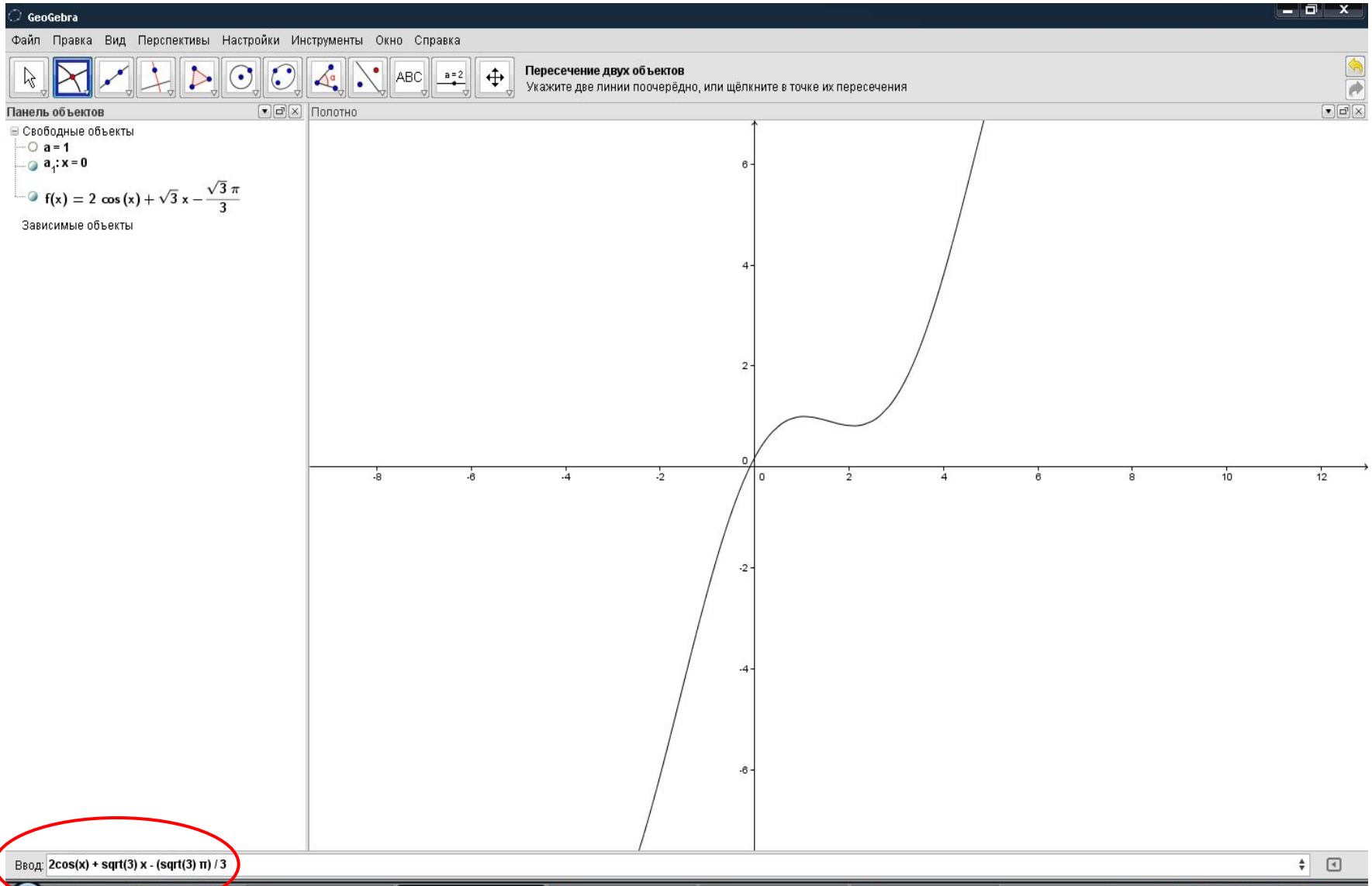
Решение задачи В14

В14

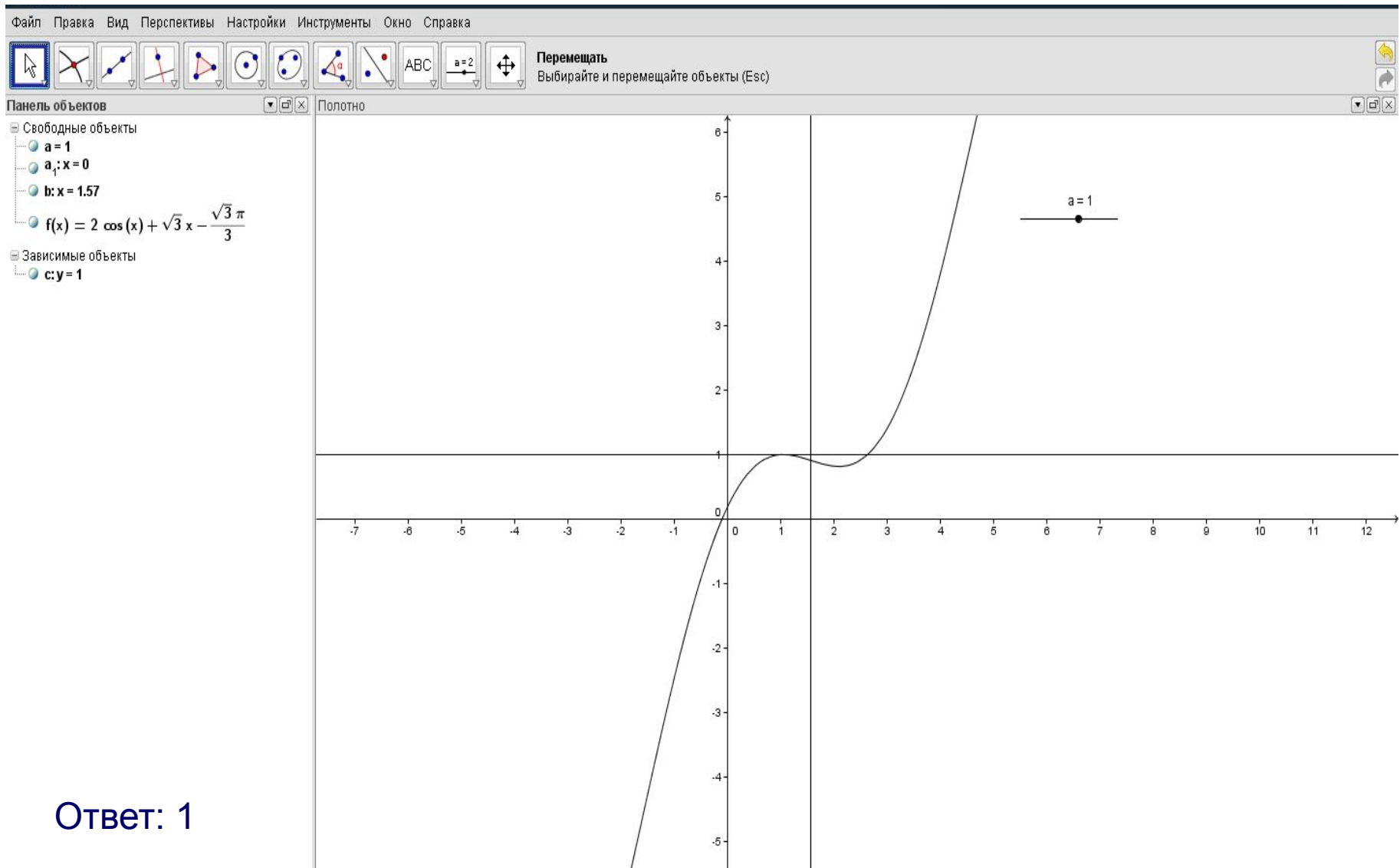
Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

График функции



Исследование функции (вводится интервал $[0; \pi/2]$ и $y=a$)



Ответ: 1

Решение

Найти наибольшее значение функции на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y = 2\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Решение:

Найдем производную заданной функции:

$$y' = -2\sin x + \sqrt{3}$$

Приравняем ее к нулю.

$$-2\sin x = -\sqrt{3};$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$

$$y'(0) = \sqrt{3}; \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 0; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + \sqrt{3};$$

В точке $\frac{\pi}{3}$ функция меняет знак с «+» на «-», следовательно, в этой точке – локальный максимум на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} = 1.$$

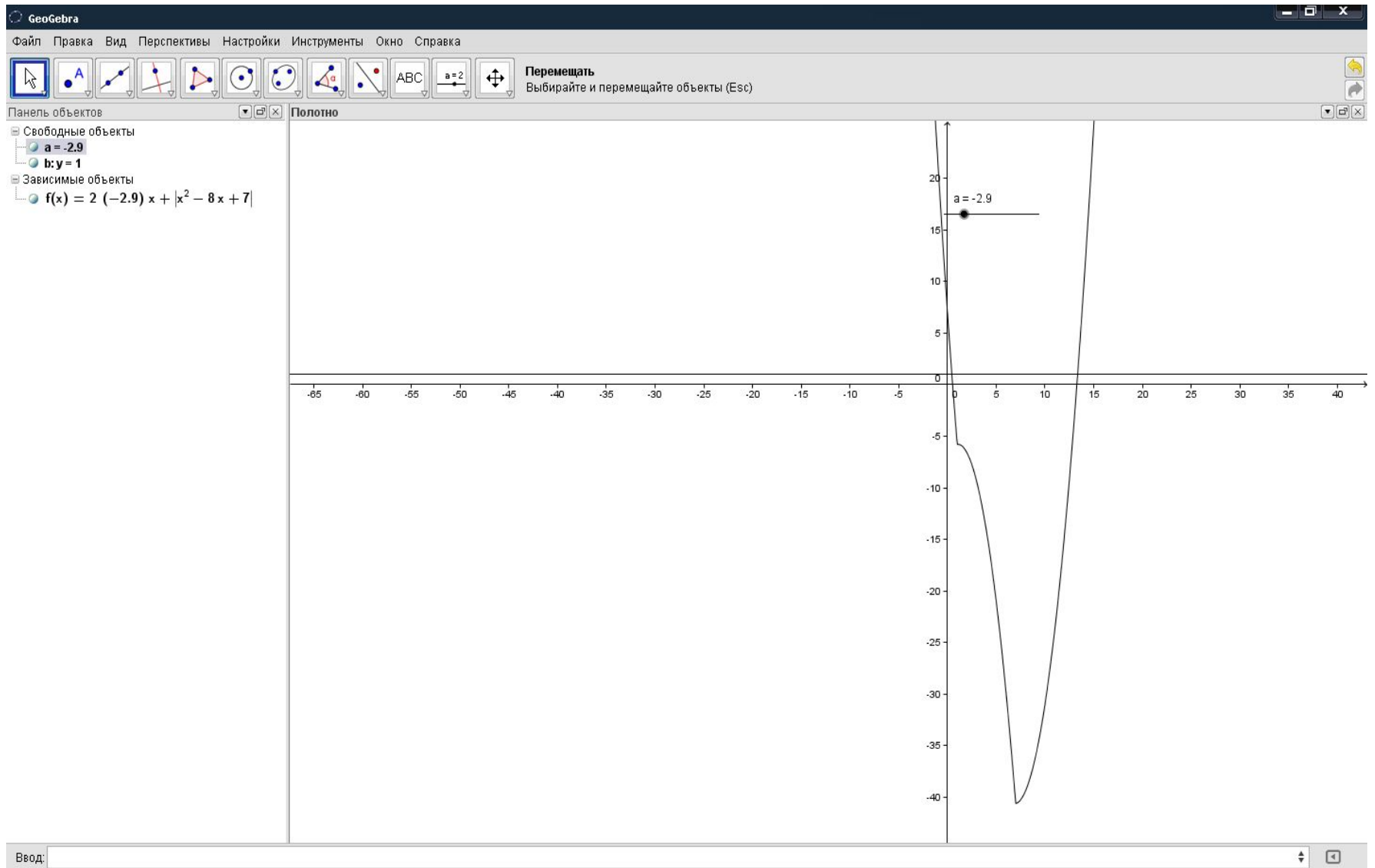
Ответ: 1.

Решение задания С 5

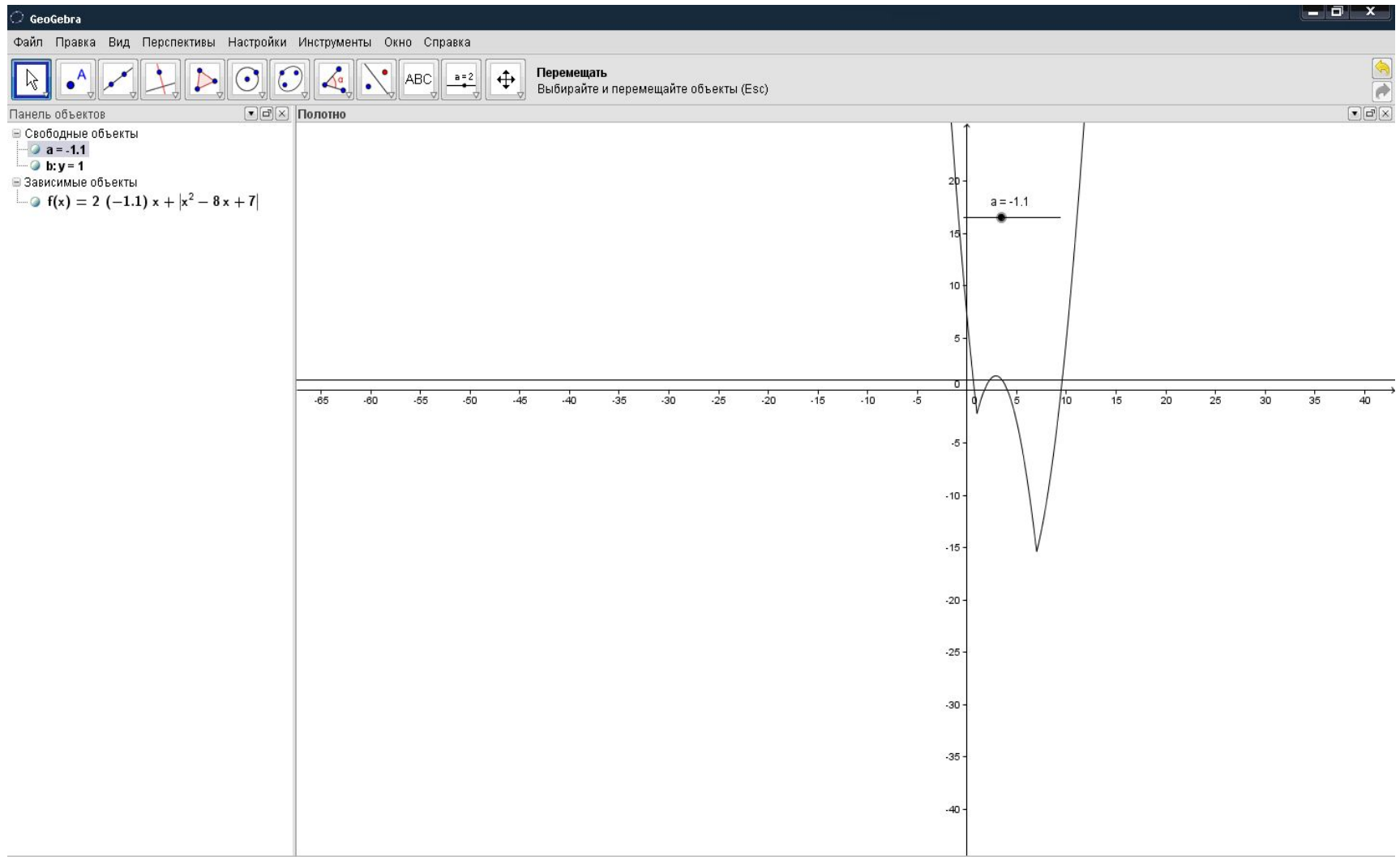
C5

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

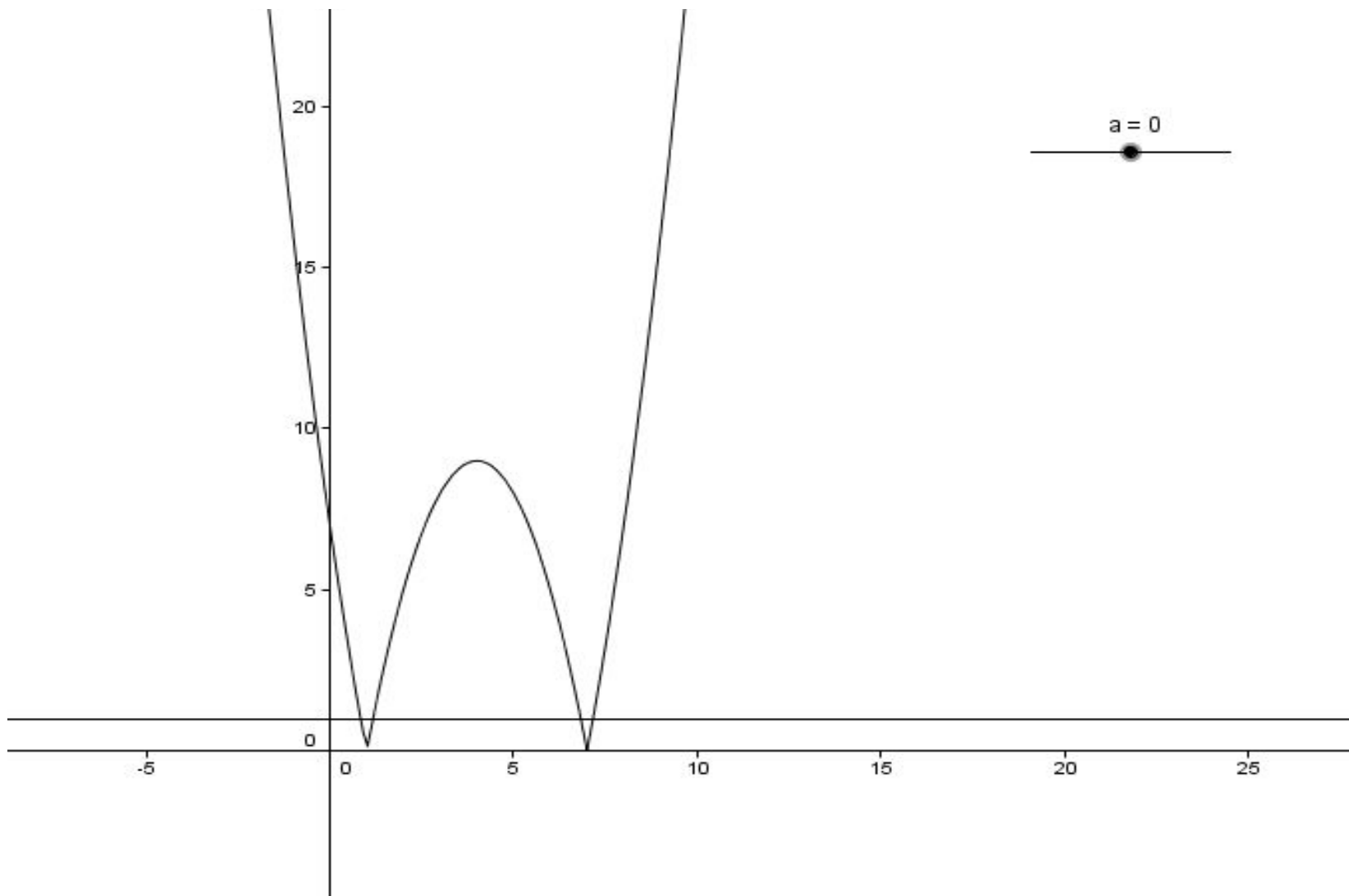
Построение графика в зависимости от параметра a



Построение графика в зависимости от параметра a (увеличиваем его значение)

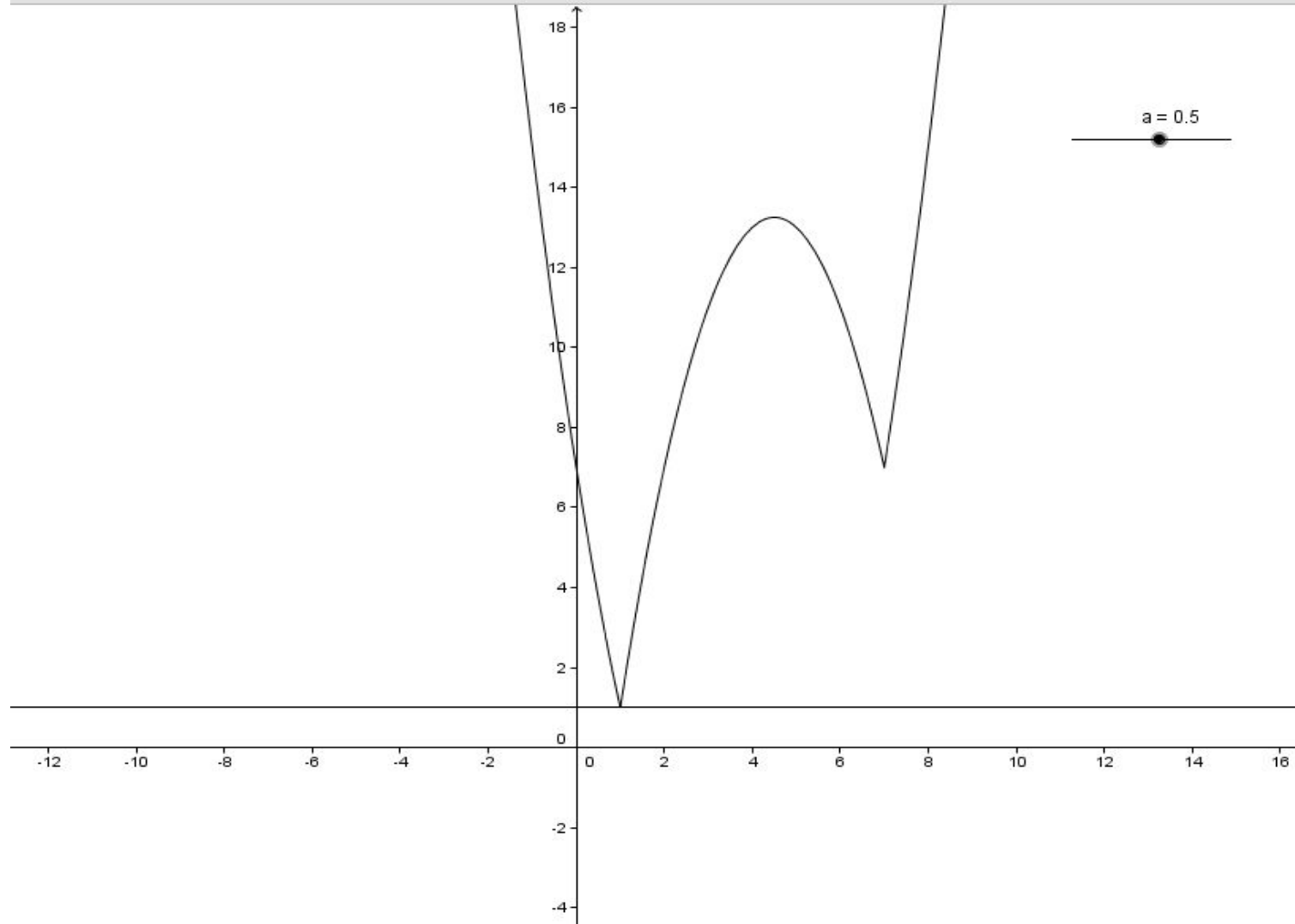


Построение графика в зависимости от параметра a (увеличиваем его значение)

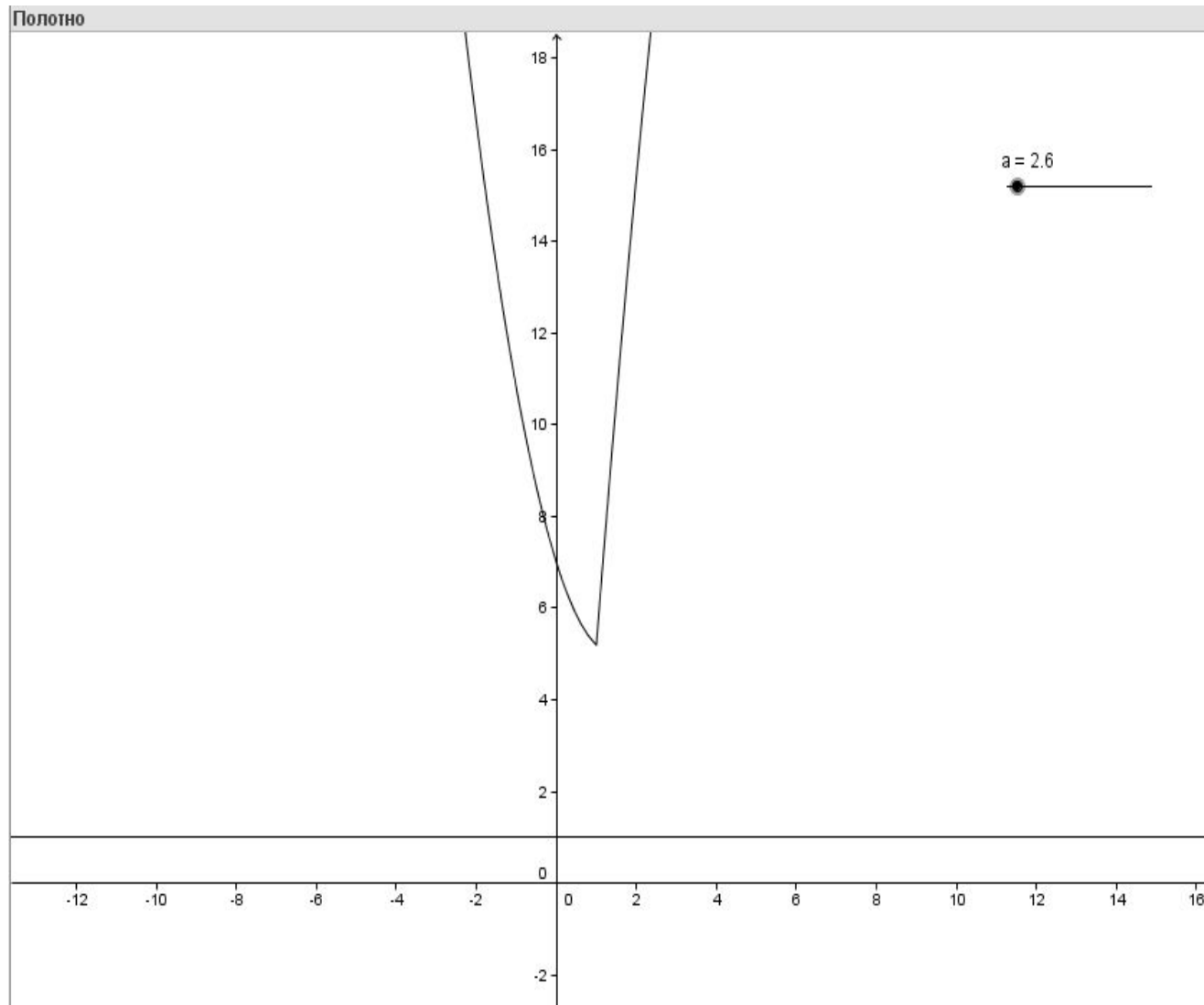


Построение графика в зависимости от параметра a (увеличиваем его значение)

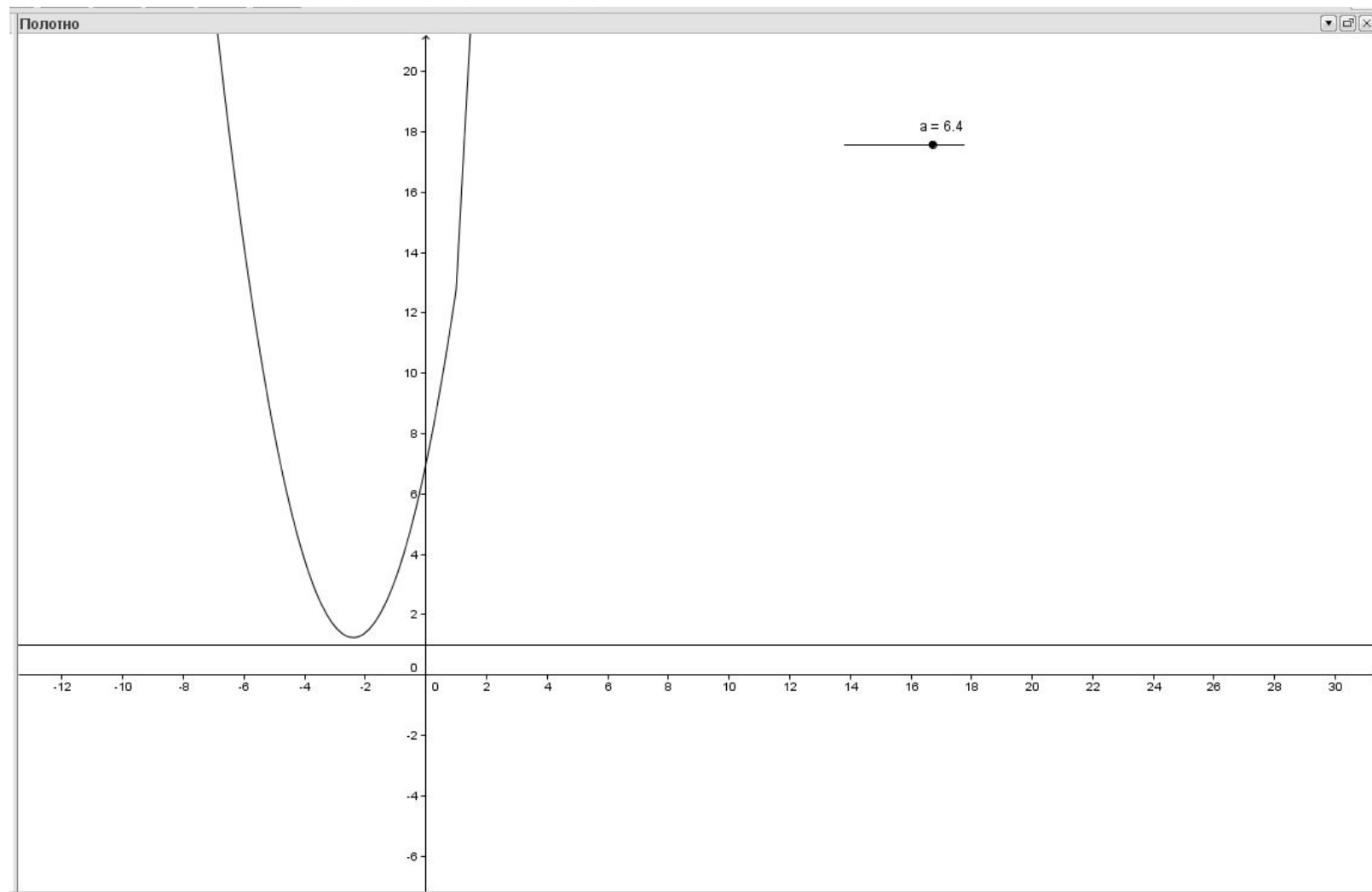
ЮТНО



Построение графика в зависимости от параметра a (увеличиваем его значение)



Из построений следует, что параметр a принимает значения от 0,5 до 6,5



Решение

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2 - 8x + 7 \geq 0$: $f(x) = x^2 + 2(a - 4)x + 7$, а её график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4 - a$;

б) при $x^2 - 8x + 7 < 0$: $f(x) = -x^2 + (2a + 8)x - 7$, а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

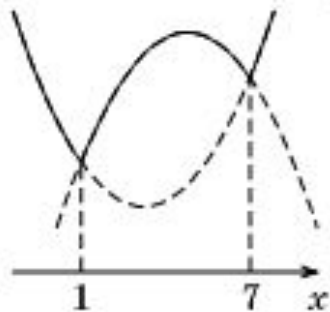


Рис. 1

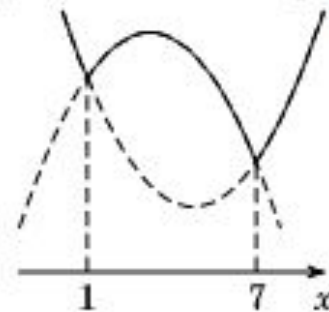


Рис. 2

Решение

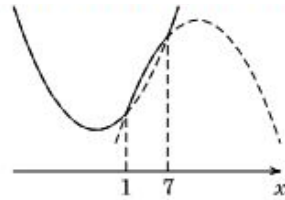


Рис. 3

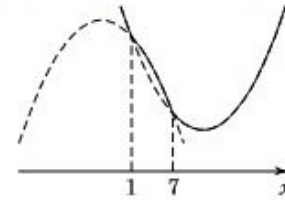


Рис. 4

2. Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x = 1$ или $x = 7$, а если $4 - a \in [1; 7]$ – то в точке $x = 4 - a$.

3. Наименьшее значение функции f больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + |a^2 - 9| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a > \frac{1}{14}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - |a^2 - 9| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3, \\ a^2 - 8a + 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3, \\ 4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3, \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3, \\ \frac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \frac{4 + \sqrt{40}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

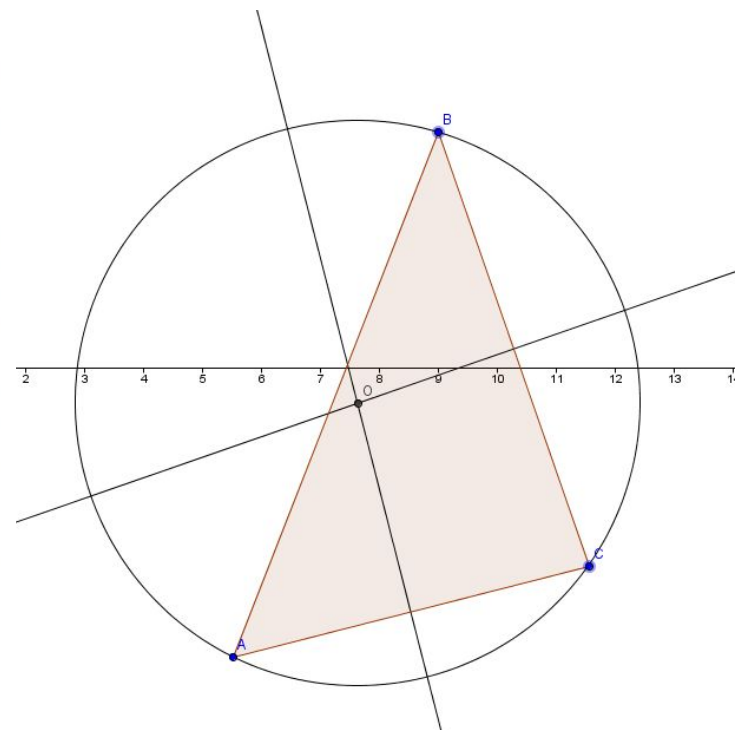
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq a < 4 + \sqrt{6} \\ \frac{1}{2} < a < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$. **или (0,5; 6,45)**





Примеры построения. Описанная окружность

Построения с использованием мыши:

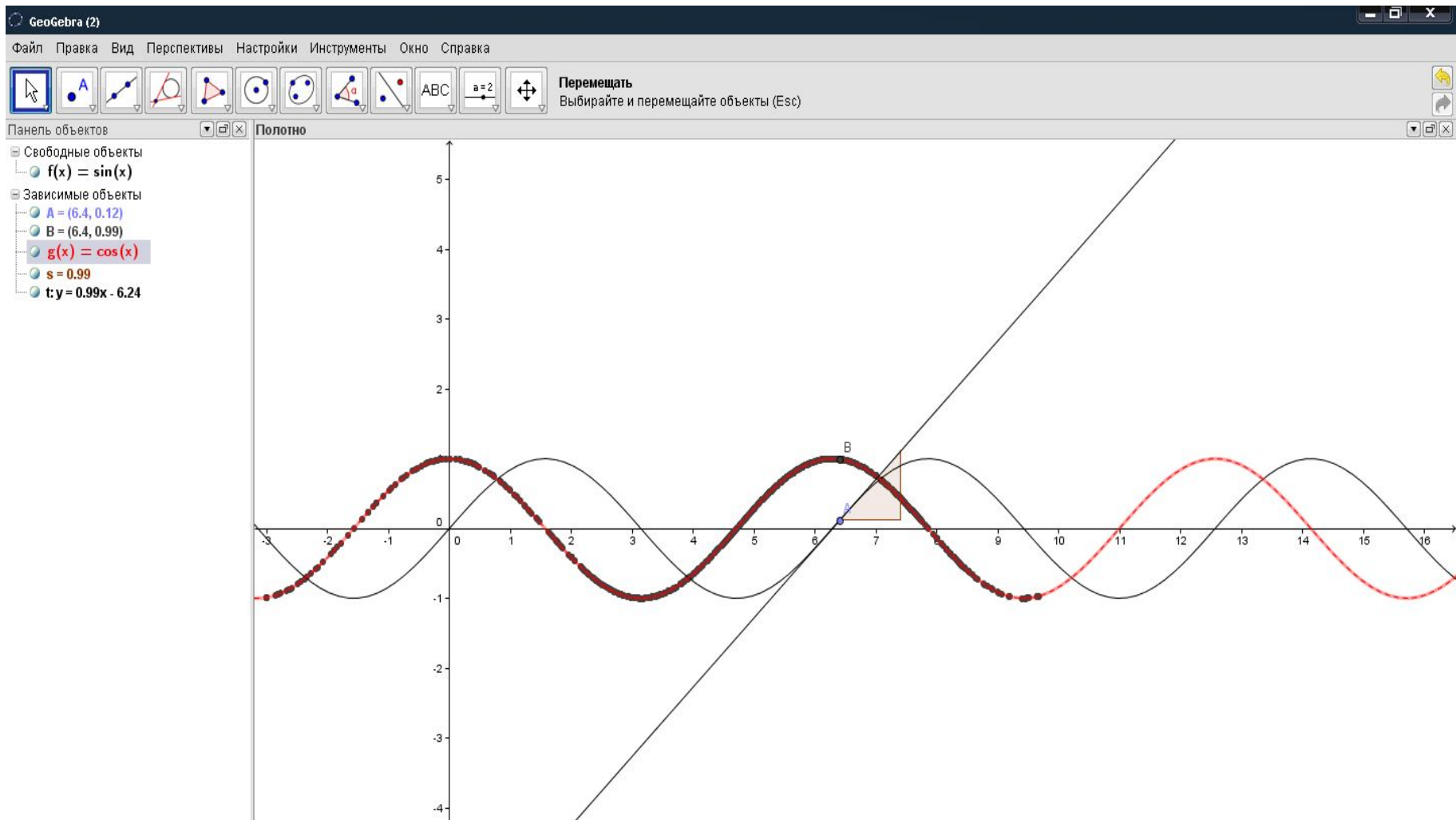
1		На панели инструментов выберите « Многоугольник ». Щёлкните левой кнопкой мыши три раза в разные места на графическое представление, у вас отметятся три точки А, В, С. Щёлкните левой кнопкой мыши в точку А и вы получите треугольник.
2		Выберите на панели инструментов « Серединный перпендикуляр » (нажмите левой кнопкой мыши на небольшой треугольник в четвёртой иконке слева) и постройте два серединных перпендикуляра нажав на две стороны треугольника.
3		Выберите на панели инструментов « Пересечение двух объектов » (вторая иконка слева). Нажмите на пересечение двух серединных перпендикуляров или на каждый из перпендикуляров по очереди. Мы получим центр окружности.
4		Выберите « Окружность по центру и точке ». Нажмите на точку пересечения двух серединных перпендикуляров и вершину треугольника.
5		Выберите « Перемещать » на панели инструментов и используя мышь вы можете изменить треугольник, а вместе с ним будет изменяться и весь чертёж.



Примеры построения. Производная и касательная функции

1	$f(x)=\sin(x)$	Наберите в строке ввода функцию $f(x)=\sin(x)$
2		Выберите на панели инструментов «Точка» и щёлкните на график функции f . Это действие создаст точку A привязанную
3		Теперь выберите инструмент «Касательная» и щёлкните на точку A и функцию f . Измените название касательной на t .
4	$s=\text{Наклон}[t]$	Наберите команду $s=\text{Наклон}[t]$
5		Выбрав инструмент «Перемещение» вы можете посмотреть, как изменяется касательная к функции.
6	$B = (x(A), s)$	Наберите $B = (x(A), s)$
		Нажмите правой кнопкой мыши на току B и включите «Оставлять след»
7		Используя инструмент «Перемещение» подвигайте точку B .
8	Производная[$f(x)$]	Наберите команду Производная[$f(x)$]


Примеры построения. Производная и касательная функции



Анализ данных

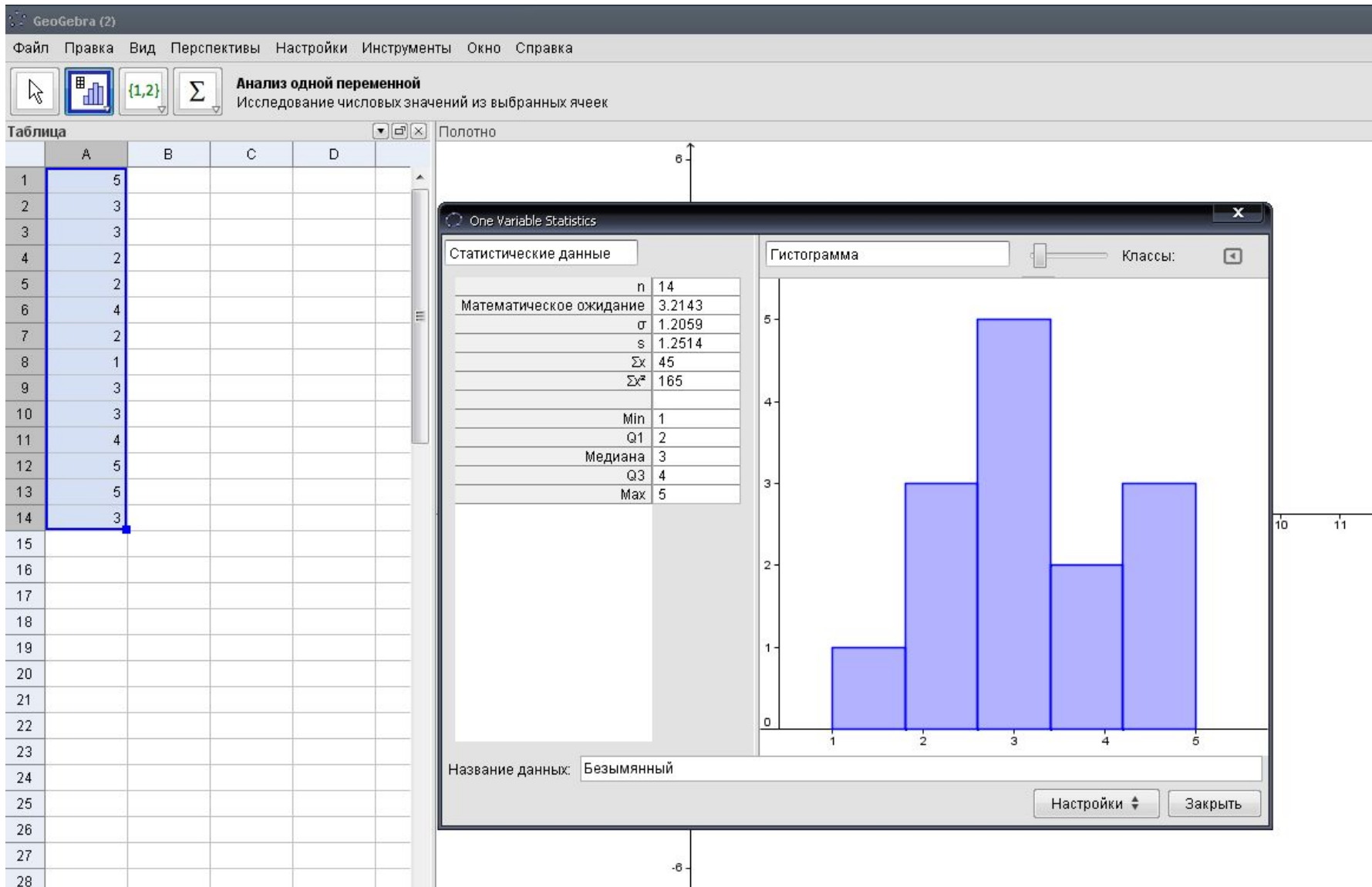
Построение гистограммы и вычисления математического ожидания, медианы, минимума, максимума и других значений для ряда чисел.

Построение:

1		Введите произвольные значения в ячейки колонки А, например заполните ячейки с А1 по А14 числами: 5, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 3
2		Выделите заполненные ячейки (выделить можно зажав левую кнопку мыши на ячейке А1 и провести курсор мыши до ячейки А14).
3		Выберите необходимый «Класс» вверху появившегося окна. Подсказка: в нашем случае класс будет равен 5, т. к. мы ввели 5 различных значений.
4		В левой части появившегося окна вы найдёте все необходимые значения.
5		Нажмите на стрелочку в верхнем правом углу. У вас откроется меню настроек. Поэкспериментируйте с ним самостоятельно.

Анализ данных

Построение гистограммы и вычисления математического ожидания, медианы, минимума, максимума и других значений для ряда чисел.





http://

@

www

internet

www.geogebra.org