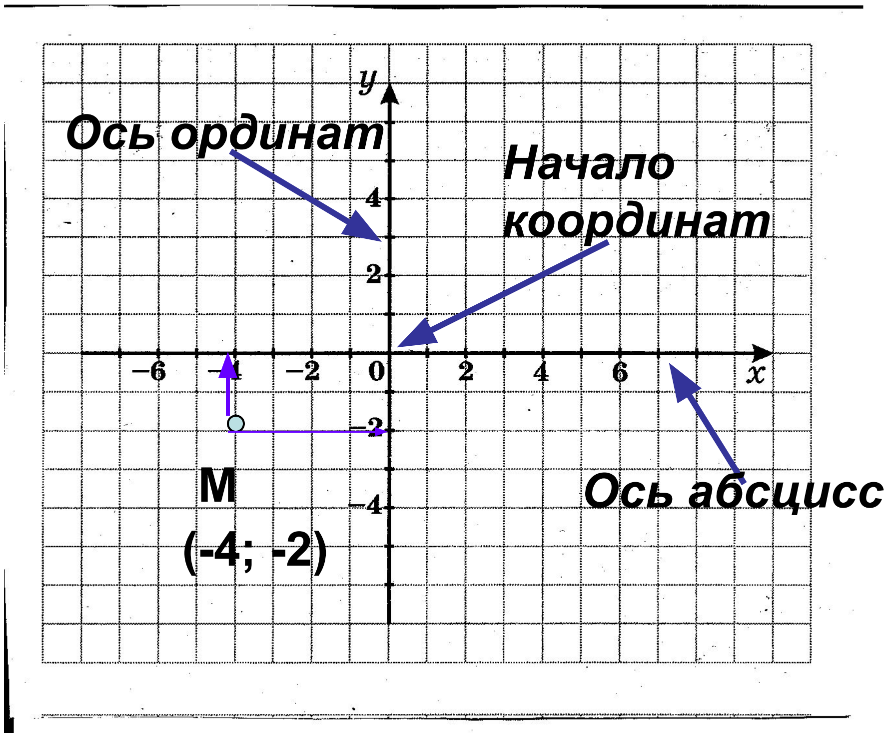
Метод координат

Презентация преподавателя ГБОУ СПО ПК № 4

Разумовой Людмилы Александровны

Вы помните основные принципы декартовой системы координат:



Горизонтальную ось называют осью абсцисс, а вертикальную ось называют осью ординат. Точку пересечения осей называют началом координат. Ось абсцисс и ось ординат образуют вместе прямоугольную систему координат.

Отметим на координатной плоскости точку М. Проведем из этой точки *перпендикуляры* к осям координат.

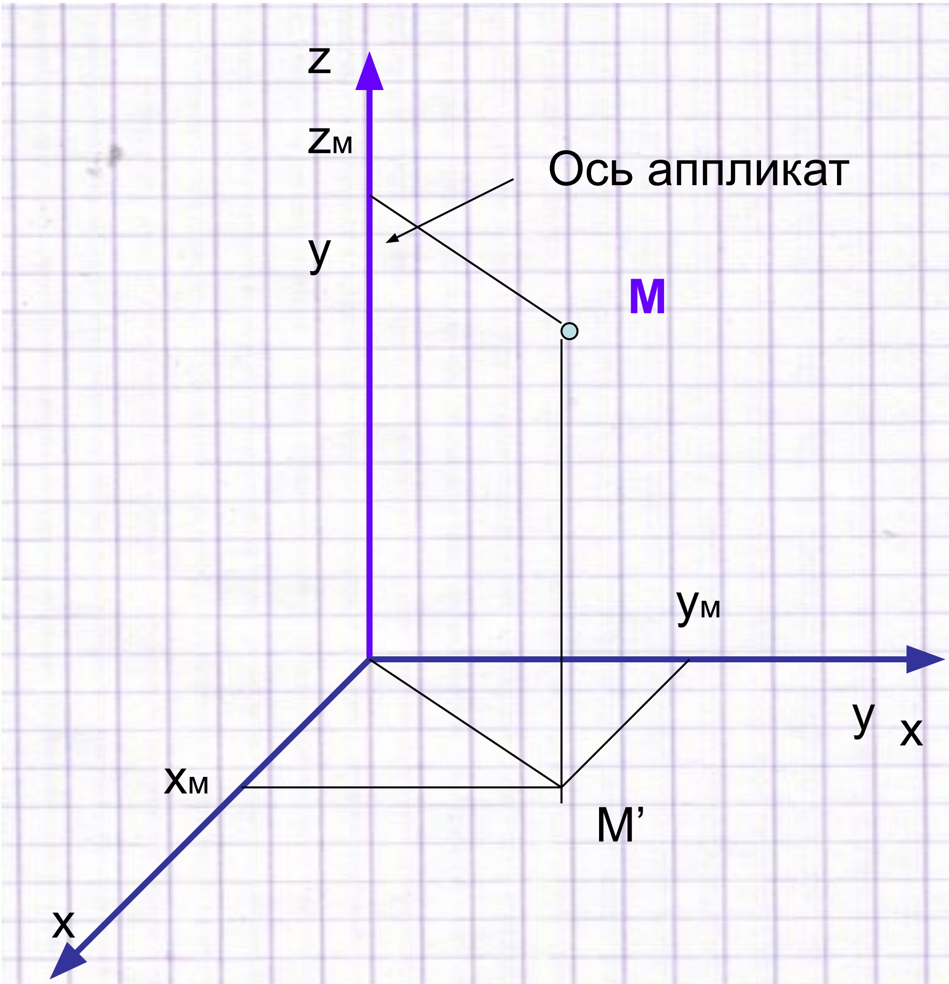
Координаты точки записываются в скобках.

Абсцисса всегда пишется на первом месте, а ордината на втором.

Обобщим координатную систему на случай трехмерного пространства. Для этого…

Переместим оси абсцисс и ординат в горизонтальную плоскость

Проведем ось *аппликат* из начала координат перпендикулярно плоскости Оху



Выберем некоторую точку М

Проведем из точки М перпендикуляры:

спроектируем точку М на плоскость Оху
и проведем перпендикуляры к осям (параллельно осям координат)

Всегда записываются на первом месте абсцисса, на втором – ордината , на третьем – аппликата

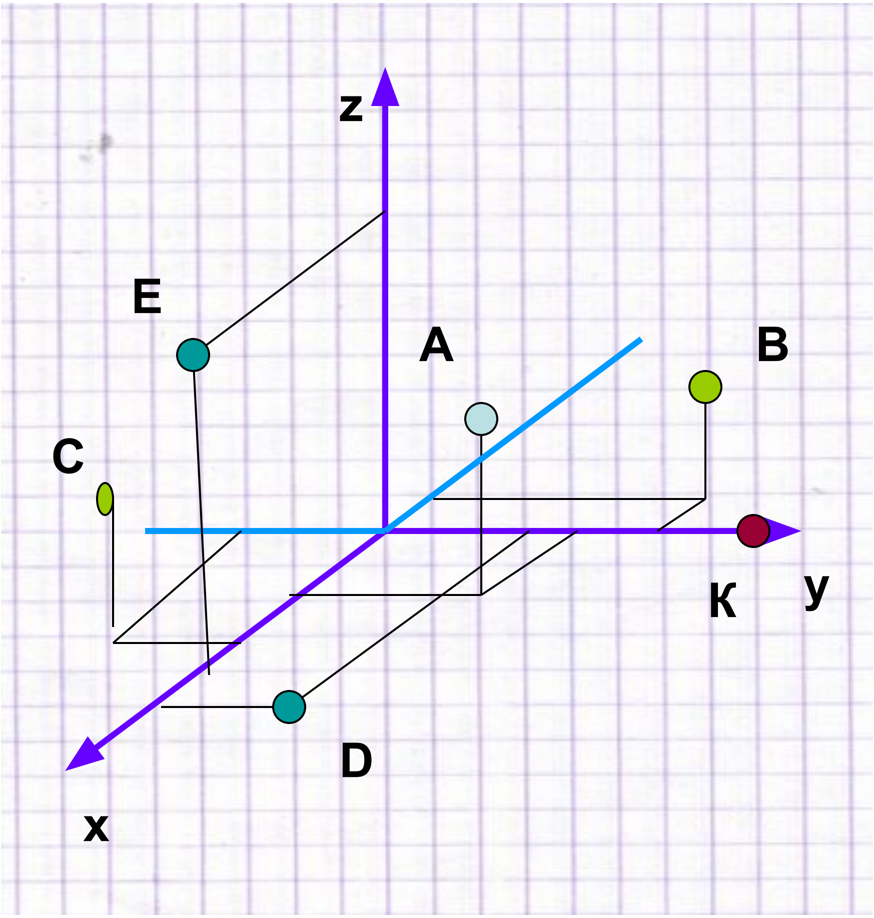
M(x, y, z)

Задание для практической работы

Попробуйте сами изобразить точки по заданным координатам: A(2; 4; 5), B(-1; 6; 3), C (3; -3; 4), D(5; 3; 0), E(4; 0; 9), К(0; 8; 0)

За единичный отрезок можно выбрать одну клетку

Если точка имеет ***отрицательную*** *координату, ось нужно продолжить* ***за начало координат в противоположную сторону***

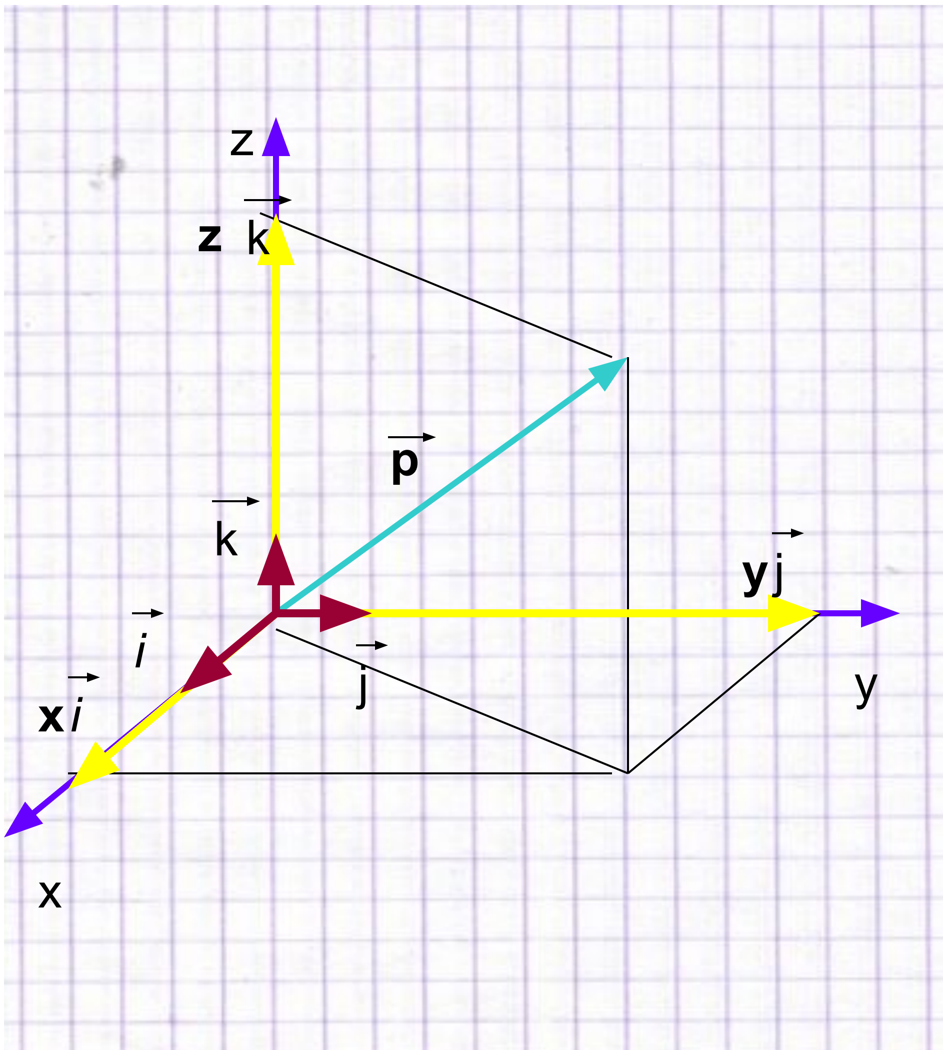


Замечание: если **одна** координата точки равна 0, то точка лежит в координатной **плоскости**.

Замечание: если **две** координаты точки равны 0, то точка лежит на координатной **прямой**

Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Oxyz



На каждой из осей (в направлении оси) отложим вектор единичной длины – ***единичный вектор***

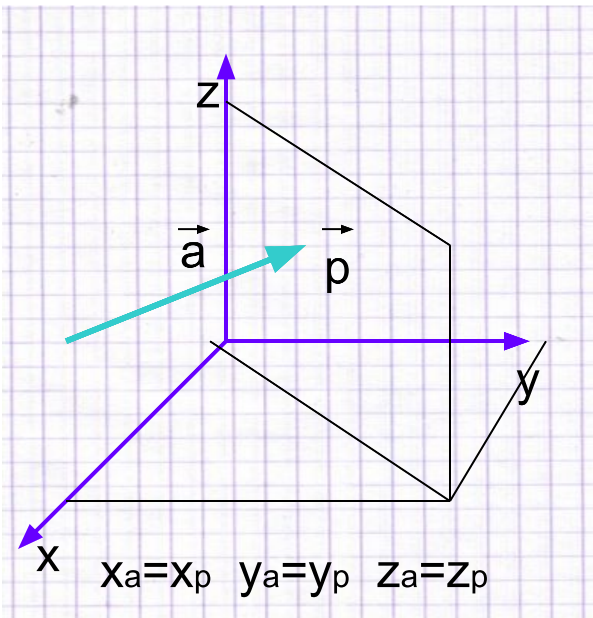
Разложим произвольный вектор $\vec{\mathbf{p}}$ по координатным векторам $\vec{\mathbf{I}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ получим

$$\vec{p} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

где **x, y, z** – коэффициенты разложения, они **определяются однозначно** и называются ***координатами вектора*** $\vec{p}$

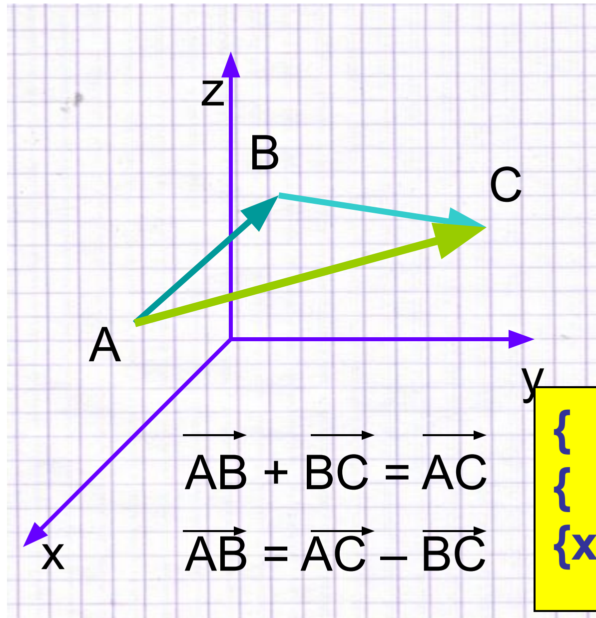
Действия над векторами, записанными в координатной форме

Координаты **равных** векторов **равны**



$$\{x_a,\ y_a,\ z_a\}=\{x_p,\ y_p,\ z_p\}$$

Координаты **суммы** векторов равны **суммам** координат слагаемых



$$x_{AB} + x_{BC} = x_{AC}$$
$$x_{AB} = x_{AC} - x_{BC}$$
$$y_{AB} + y_{BC} = y_{AC}$$
$$y_{AB} = y_{AC} - y_{BC}$$
$$z_{AB} + z_{BC} = z_{AC}$$
$$z_{AB} = z_{AC} - z_{BC}$$

$$\{x_{AB},\ y_{AB},\ z_{AB}\} + \{x_{BC},\ y_{BC},\ z_{BC}\} = \{x_{AB}+x_{BC}, y_{AB}+y_{BC}, z_{AB}+z_{BC}\}$$

Координаты **разности** векторов равны **разностям** координат векторов

Координаты произведения вектора на число равны произведениям координат заданного вектора на это число

$$k\{x,\ y,\ z\} = \{kx,\ ky,\ kz\}$$

Действия с векторами, записанными в координатной форме выполняются покоординатно

Действия над векторами, записанными в координатной форме

Скалярное произведение векторов

Пусть даны два вектора $\vec{a}\{x_a, y_a, z_a\}$ и $\vec{b}\{x_b, y_b, z_b\}$

Скалярное произведение двух векторов есть число, найденное по правилу $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Если векторы заданы в координатной форме, их можно записать каждый в виде $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$ и $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$

Воспользуемся свойствами выполнения скалярного произведения (аналогичными умножению многочлена на многочлен), получим сумму девяти скалярных произведений координатных орт-векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b ii + \underbrace{x_a y_b ij}_{=0} + \underbrace{x_a z_b ik}_{=0} + \underbrace{y_a x_b ij}_{=0} + y_a y_b jj + \underbrace{y_a z_b jk}_{=0} + \underbrace{z_a x_b ik}_{=0} + \underbrace{z_a y_b jk}_{=0} + z_a z_b kk$$

из них произведения ортогональных векторов равны нулю

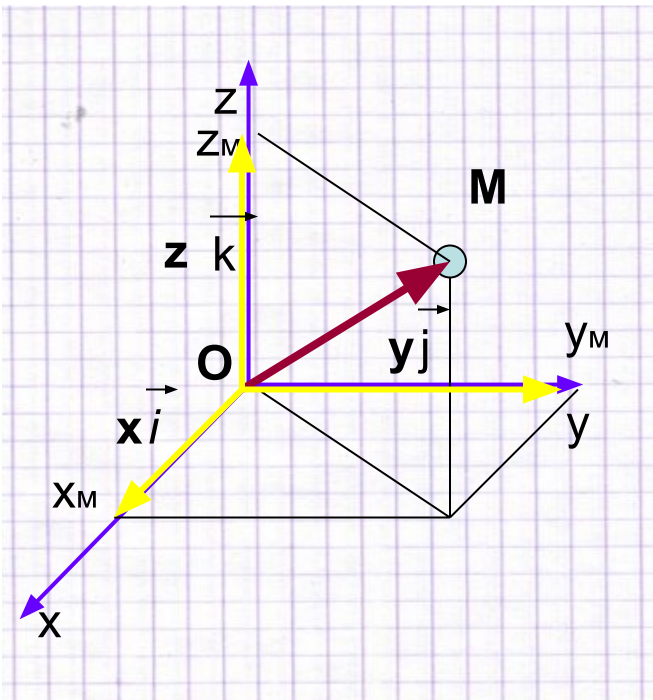
остаются скалярные квадраты единичных векторов $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

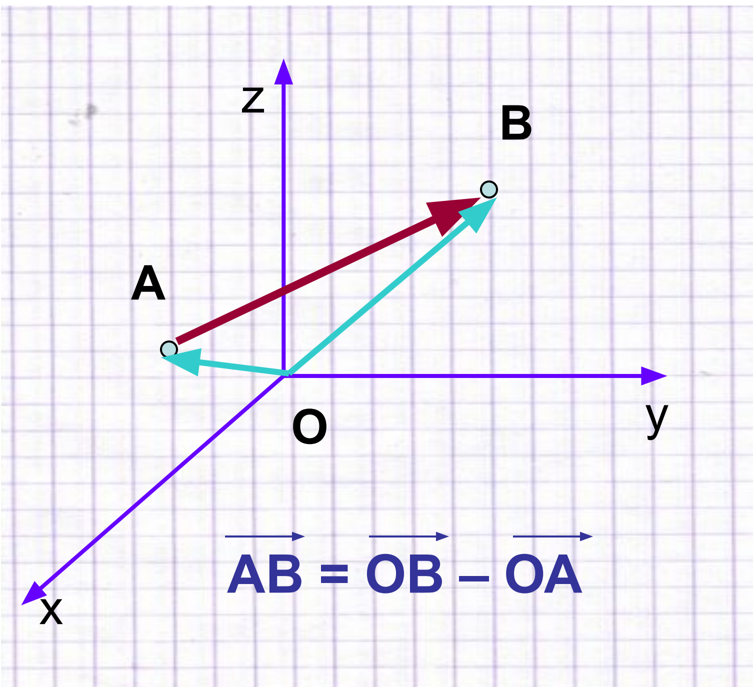
Получаем формулу скалярного произведения векторов, записанных своими координатами

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

Основные задачи, решаемые в координатах

1. Записать координаты вектора, заданного координатами его концов





Точка **M (x, y, z)**

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Вектор $\overrightarrow{OM}\ \{x_M, y_M, z_M\}$

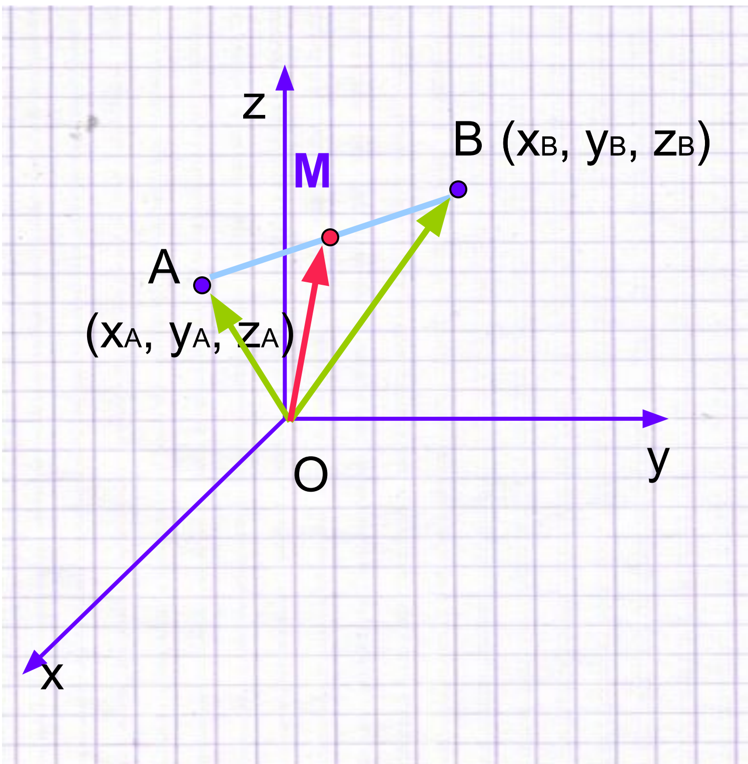
проведем радиус-векторы в точки A и B

Получили $\{x_{AB}, y_{AB}, z_{AB}\} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$

$$\overrightarrow{AB}\ \{x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A\}$$

Основные задачи, решаемые в координатах

2. Записать координат середины отрезка, заданного своими концами



Пусть в системе координат задан отрезок AB координатами своих концов

Выразим координаты середины M отрезка AB через заданные координаты точек A и B

Проведем радиус-векторы в точки A, B, M.

Получили $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

по правилу действий над векторами

$$\{x_M, y_M, z_M\} = \frac{1}{2}\left(\{x_A, y_A, z_A\} + \{x_B, y_B, z_B\}\right)$$

Следует запомнить: если точка M – середина отрезка AB, её координаты находятся по правилу:

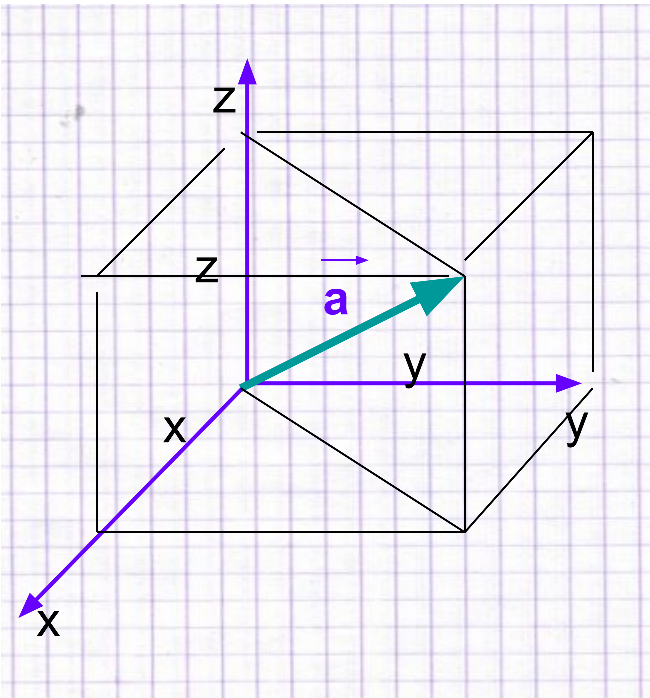
$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

$$y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

$$z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

Основные задачи, решаемые в координатах

3. Вычислить длину вектора, заданного его координатами



Через конец вектора проведем прямые, параллельные осям координат

Получился **прямоугольный параллелепипед**, **ребра** которого численно **равны координатам** заданного **вектора**

Вектор $\vec{a}$ является **диагональю** полученного прямоугольного **параллелепипеда**.

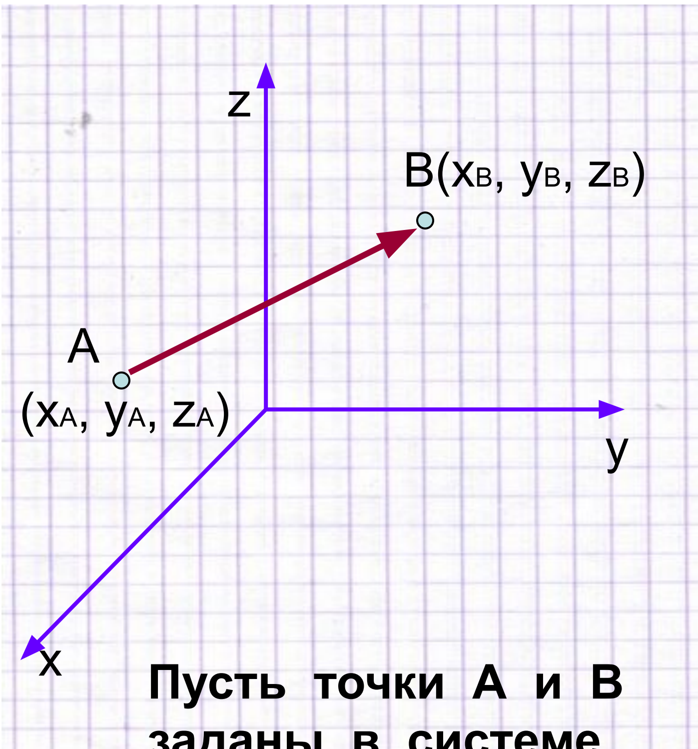
Пусть вектор $\vec{a}$ задан своими координатами {x, y, z}

По свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда получаем

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Основные задачи, решаемые в координатах

4. Вычислить расстояние между точками, заданными координатами



Пусть точки A и B заданы в системе координат

их координаты соответственно

A (x_A, y_A, z_A), B (x_B, y_B, z_B)

Проведем вектор $\overrightarrow{AB}$

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна расстоянию между его концами, между точками A и B

Запишем вектор $\overrightarrow{AB}$ в координатах

$$\overrightarrow{AB}\,\{x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A\}$$

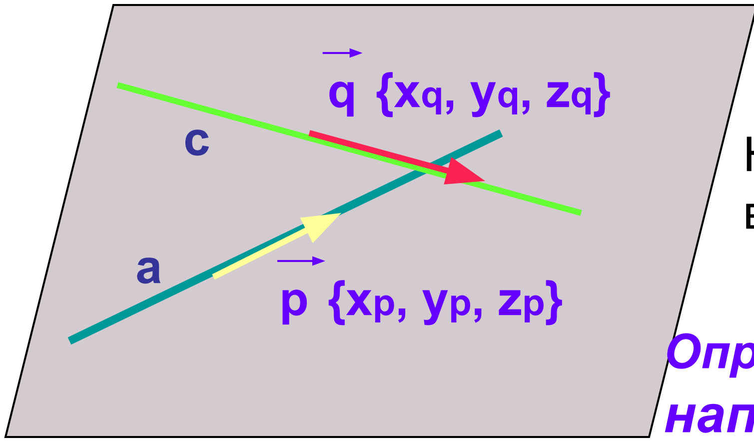
и воспользуемся формулой длины вектора

получим формулу для расстояния между точками, координаты которых известны

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Основные задачи, решаемые в координатах

5. Найти угол между двумя прямыми, заданными своими направляющими векторами



Пусть даны две прямые в пространстве

На каждой из прямых выберем какой-нибудь вектор и зададим его в координатной форме

Определение: **Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ называются *направляющими* векторами прямых a и c**

Угол между прямыми *a* и *c* либо равен углу между их направляющими векторами, либо дополняет его до 180^0. Найдем *cos* угла между векторами

Запишем скалярное произведение векторов и их длин в координатной форме:

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos(\vec{p},\vec{q})$$

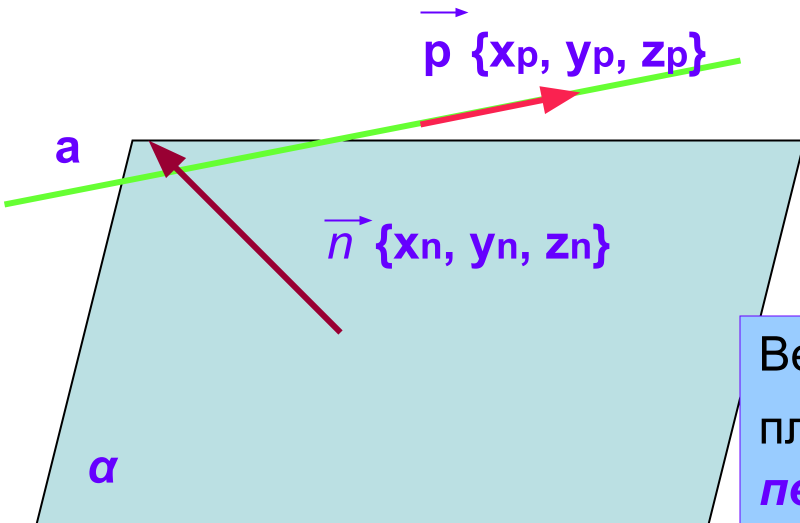
$$\vec{p}\vec{q}=x_px_q+y_py_q+z_pz_q \qquad |\vec{p}|=\sqrt{x_p^2+y_p^2+z_p^2} \qquad |\vec{q}|=\sqrt{x_q^2+y_q^2+z_q^2}$$

Получаем формулу **угла между прямыми**, заданными своими направляющими векторами

$$\boxed{\cos(a, c)=\frac{x_px_q+y_py_q+z_pz_q}{\sqrt{x_p^2+y_p^2+z_p^2}\,\sqrt{x_q^2+y_q^2+z_q^2}}}$$

Основные задачи, решаемые в координатах

6. Найти угол между прямой и плоскостью



Пусть задана плоскость α

и прямая **а**, заданная своим направляющим вектором $\vec{p}$

Вектором, описывающим положение плоскости, является ненулевой вектор $\vec{n}$, ***перпендикулярный*** плоскости **α,** его называют ***нормалью к плоскости***

Угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{n}$ легко найти по известному правилу,

$$\cos(\vec{p}, \vec{n}) = \frac{x_p x_n + y_p y_n + z_p z_n}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}\,\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}$$

а угол между прямой а и плоскостью α дополняет найденный угол до 90^0, следовательно, найден sin искомого угла

$$\sin(a, \alpha) = \cos(\vec{p}, \vec{n})$$

З а д а ч а   р е ш е н а