

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Задача заключается в определении оптимального маршрута объезда  $n$  городов по критерию времени, стоимости или длине маршрута. Эта задача связана с определением гамильтонова цикла минимальной длины.

Основным методом решения таких задач является **метод ветвей и границ**. Сущность метода заключается в том, что все множество допустимых решений задачи делится на последовательно уменьшающиеся подмножества с помощью процедуры ветвления. В результате находится последовательность объезда пунктов (маршрут), протяженность которого меньше любого другого возможного варианта, т.е. строится оптимальный кольцевой маршрут.

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Построить оптимальный кольцевой маршрут для неографа  $G(X, Y)$  (рис. 10.36) с вершинами  $i = \overline{1, 6}$ . Пропускные способности ребер указаны на графе.

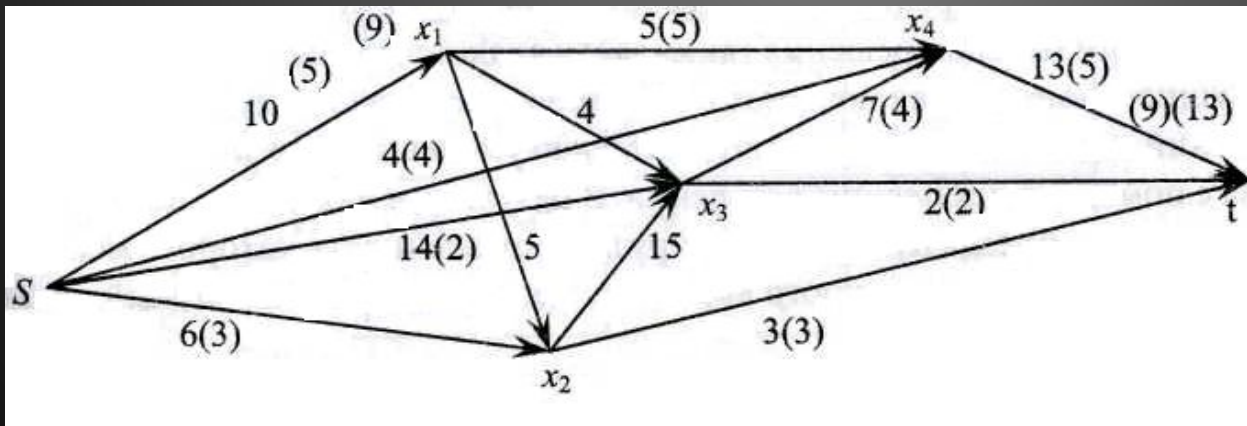
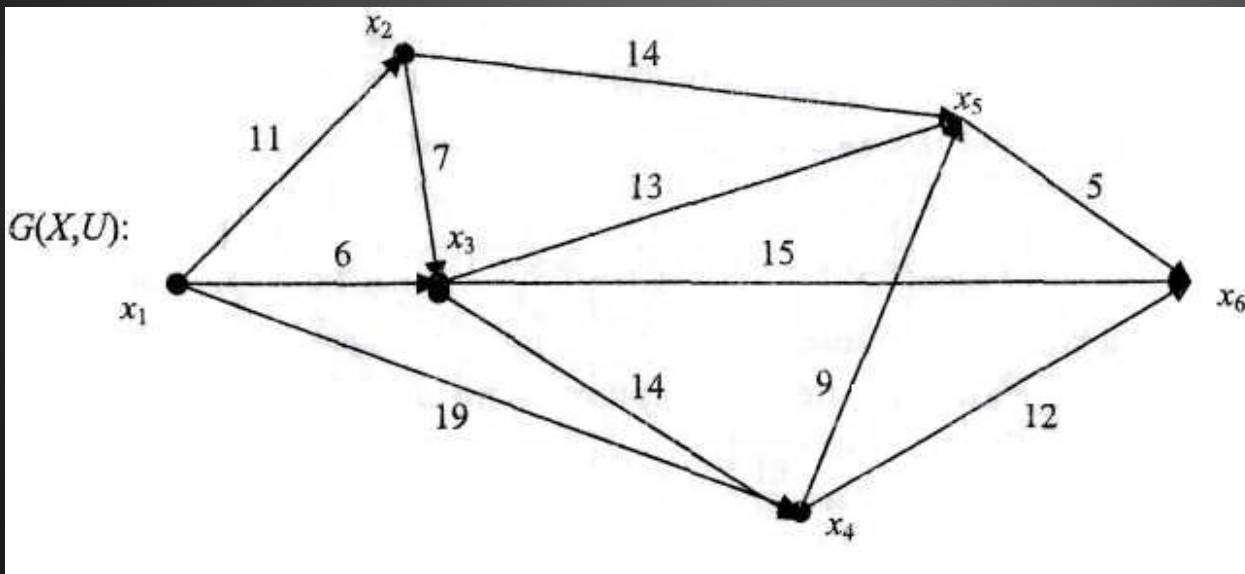


Рис. 10.36

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

1. Составим матрицу пропускных способностей ребер  $C(G)$  графа  $G(X,U)$  рис.10.37.



• Рис. 10.37

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Пропускную способность между однородными вершинами условно принимаем равной  $c_{ii} = \infty, i = \overline{1,6}$  ности, т.е. (клетки главной диагонали матрицы  $C$ )

$C_6$ :

	$s$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$t$
$s$		9	3	2	4	
$x_1$			0	4	5	
$x_2$			0			3
$x_3$						2
$x_4$						13
$t$						

• (10.14)

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Для определения нижней границы множества выполним приведение матрицы (табл. 10.14), т.е. в каждом столбце и строке матрица должна содержать не менее одного нуля. С этой целью выберем в каждой строке минимальный элемент и запишем их в правой колонке табл. 10.14.

$C(G)$ :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\min_k a_{ik}$
$x_1$	$\infty$	11	6	18	19	21	6
$x_2$	11	$\infty$	7	21	14	19	7
$x_3$	6	7	$\infty$	14	13	15	6
$x_4$	19	21	14	$\infty$	9	12	9
$x_5$	19	14	13	9	$\infty$	5	5
$x_6$	21	19	15	12	5	$\infty$	5

(10.14)

- Табл. 10.14.

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Вычитая из элементов каждой строки соответствующие значения  $\min a_{ik}$ , получаем табл. 10.15.

$C_1(G)$ :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	$\infty$	5	0	13	13	15
$x_2$	4	$\infty$	0	14	7	12
$x_3$	0	1	$\infty$	8	7	9
$x_4$	10	12	5	$\infty$	0	3
$x_5$	14	9	8	4	$\infty$	0
$x_6$	16	14	10	7	0	$\infty$
$\min_i a_{ik}$	0	1	0	4	0	0

- Табл. 10.15

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Для завершения приведения матрицы табл. 10.15 вычитаем минимальные значения в каждом столбце  $\min a_{ik}$  и получим приведенную матрицу (табл. 10.16). Сумма констант приведения по строкам и столбцам матрицы составит:

$$H = 6 + 7 + 6 + 9 + 5 + 5 + 1 + 4 = 43.$$

Сумма констант приведения  $H = 43$  является границей всех циклов, т.е. любой вариант кольцевого маршрута не может быть меньше этой нижней границы.



# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

С помощью ветвления рассматриваются циклы (последовательности обхода вершин графа), которые могут привести к построению оптимального (минимального) кольцевого маршрута.

На первом этапе построения древовидного графа множество всех циклов делится на два подмножества: первое из них включает все циклы (замкнутые маршруты) с перемещением от вершины  $x_j$  к вершине  $x_k$ , а второе множество содержит циклы без этого перемещения.

На графе ветвления от исходной вершины  $H = 43$  отходят две дуги (ветви): к вершине  $(i, k)$ , изображающей первое из этих подмножеств и к вершине, указывающее второе (рис. 10.38).

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

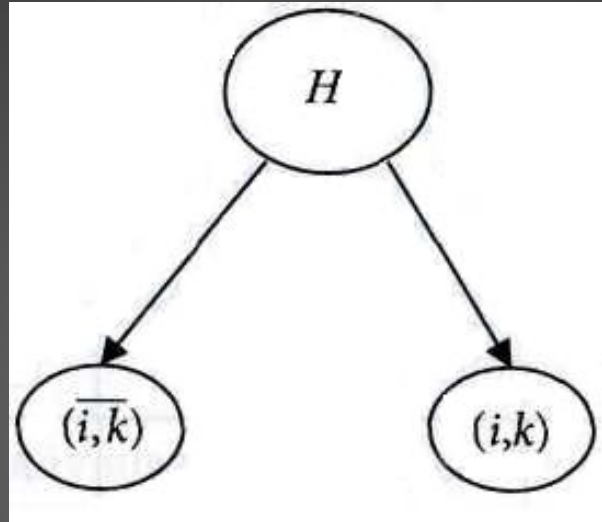


Рис. 10.38

Рассмотрим, как выбирается пара вершин  $(i, k)$   $(i, \bar{k})$ . Пара вершин  $(x_i, x_k)$  на основании  $a(i, k)$ , которые рассчитываются для всех клеток приведенной матрицы (10.15), содержащих нули. Для определения  $a(i, k)$  в строке  $x_i$  выбирается минимальный элемент  $(c_{ik} = 0)$  и минимальный в столбце  $x_k$ . Эти минимальные элементы складываются, а их сумма равна значению  $a(i, k)$ .

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- В рассматриваемом примере эти значения элементов в строках укажем справа, а в столбцах — внизу (табл. 10.16), сумму минимальных элементов запишем в клетках, содержащих нули и отметим их кружком (табл. 10.16). Вычислим  $a(i,k)$  для каждой клетки с нулевыми элементами:

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_1$	$\infty$	4	0	9	13	15	4
$x_2$	4	$\infty$	0	10	7	12	4
$x_3$	0	0	$\infty$	4	7	9	0
$x_4$	10	11	5	$\infty$	0	3	3
$x_5$	4	8	8	0	$\infty$	0	0
$x_6$	16	13	10	3	0	$\infty$	3
	4	4	0	3	0	3	

• (10.16)

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

$$\begin{aligned}\alpha(1,3) &= 4 + 0, & \alpha(2,3) &= 4 + 0, & \alpha(3,1) &= 0 + 4, \\ \alpha(3,2) &= 0 + 4, & \alpha(4,5) &= 3 + 0, & \alpha(5,4) &= 0 + 3, \\ \alpha(5,6) &= 0 + 3, & \alpha(6,5) &= 3 + 0.\end{aligned}$$

Запишем значения  $\alpha(i,k)$  в соответствующих клетках с нулями, отмечая их кружками в табл. 10.16, выбираем наибольшее значение  $\alpha(i,k)$

Таких значений в табл. 10.16 четыре. Выбираем одно из них, например,  $\alpha(3,1) = 0 + 4 = 4$  (для строки  $x_3$  и столбца  $x_1$ ).

Вычеркивая их, получаем табл. 10.17, в которой нуль, расположенный в строке  $x_1$  и столбце  $x_3$ , заменяем на  $\infty$ , так как вершина  $x_3$  не должна иметь цикла (3,1), т.е.  $c_{13} = \infty$

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	4	$\infty$	9	13	15
$x_2$	$\infty$	0	10	7	12
$x_4$	11	5	$\infty$	0	3
$x_5$	8	8	0	$\infty$	0
$x_6$	13	10	3	0	$\infty$

(10.17)

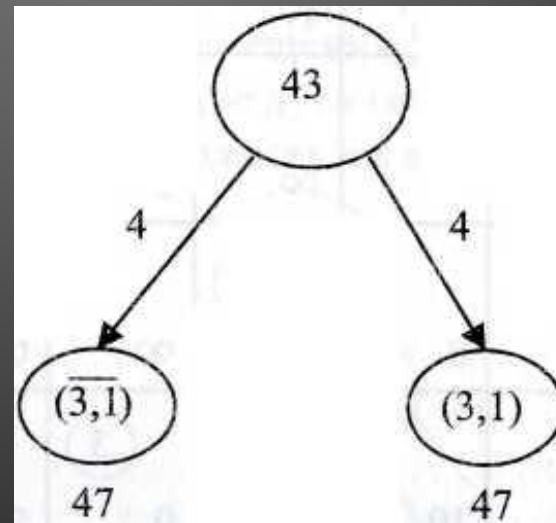


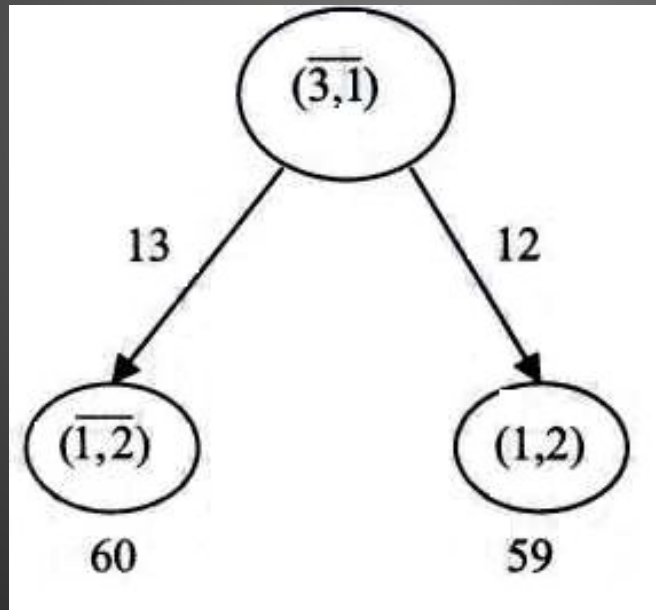
Рис. 10.39

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Определяем ребро ветвления, деля множества маршрутов на два:  $(\overline{3,1})$  и  $(3,1)$ , рис. 10.39. Нижняя граница вершины  $(\overline{3,1})$  представляет сумму значений нижней границы предыдущей вершины,  $\alpha(\overline{3,1}) = 4$ , и  $H(\overline{3,1}) = 43 + 4 = 47$ .
- Для определения нижней границы вершины вторым слагаемым берется сумма констант приведения матрицы 10.17. Для приведения этой матрицы из строки  $x_1$  следует вычесть минимальный элемент 4 и получим матрицу 10.18.

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Сумма констант приведения равна  $h = 4$ .  
Нижняя граница вершины  $(\bar{3},1)$  составит  $H(3,1) = 43 + 4 = 47$  (рис. 10.40).



• Рис. 10.40



# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Для получения следующей пары вершин от вершины  $(3,1)$  определим  $\alpha$  и выберем новую пару вершин, входящих в конечной маршрут.

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

В табл. 10.18 укажем минимальные элементы в строках и столбцах, записанных справа и внизу этой таблицы соответственно. Вычислим сумму констант приведения  $\alpha(i,k)$  и включим их в табл. 10.18:

	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_1$	(13) 0	$\infty$	5	9	12	5
$x_2$	$\infty$	(12) 0	10	7	12	7
$x_4$	11	5	$\infty$	(3) 0	3	3
$x_5$	8	8	(3) 0	$\infty$	(3) 0	0
$x_6$	13	10	3	(3) 0	$\infty$	3
	8	5	3	0	3	

- Табл. 10.18

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

$$\begin{aligned} \alpha(1,2) &= 5 + 8 = 13 & \alpha(2,3) &= 7 + 5 = 12, \\ \alpha(4,5) &= 3 + 0 & \alpha(5,4) &= 0 + 3, \\ \alpha(5,6) &= 0 + 3 & \alpha(6,5) &= 3 + 0. \end{aligned}$$

Принимаем вершины  $x_1$  и  $x_2$  с величиной приведения  $\alpha(1,2) = 13$  в качестве звена в кольцевом маршруте.

В табл. 10.18 вычеркиваем столбец  $x_2$  и получаем та

	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_2$	$\infty$	10	7	12
$x_4$	5	$\infty$	0	3
$x_5$	8	0	$\infty$	3
$x_6$	10	3	0	$\infty$

Табл.10.19

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Определяем вершины ветвления для ребер  $(1, \overline{1,2})$ .

Нижняя граница вершины  $\overline{1,2}$  определяется из условия  $H(\overline{1,2}) = H(3,1) + \alpha(1,2)$ ,  $H(\overline{1,2}) = 47 + 13 = 60$ .

Для определения нижней границы вершины  $(1,2)$  вторым слагаемым берем сумму констант приведения табл. 10.19, вычитая из строки  $x_2$   $a_{25} = 7$  и в столбце  $x_3$  величину  $\alpha_{43} = 5$ , чтобы матрица имела нули в каждой строке и каждом столбце.

Величина приведения

$$h = 7 + 5. H(1,2) = 47 + 7 + 5 = 59.$$

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Приведенная матрица табл. 10.20 имеет вид:

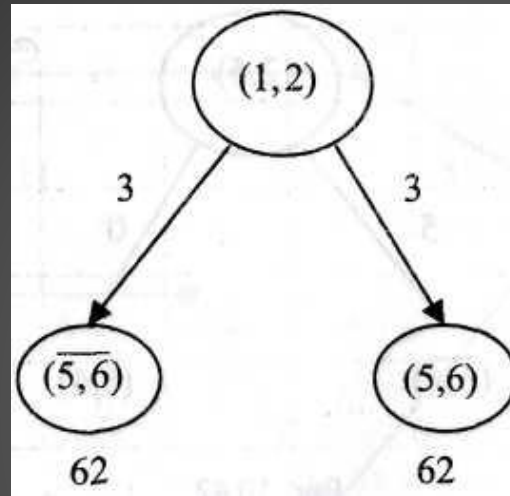
	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_2$	$\infty$	3	0	5	3
$x_4$	0	$\infty$	0	3	0
$x_5$	8	0	$\infty$	0	0
$x_6$	5	3	0	$\infty$	3
	3	3	0	3	

- Табл. 10.20

- Определяем значения  $\alpha(i,k)$  для клеток с нулевыми элементами:

$$\begin{aligned} \alpha(2,5) &= 3 + 0, & \alpha(4,3) &= 0 + 3 = 5, \\ \alpha(4,5) &= 0 + 0, & \alpha(5,4) &= 0 + 3, \\ \alpha(5,6) &= 0 + 3, & \alpha(6,5) &= 3 + 0. \end{aligned}$$

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



• Рис. 10.41

Исключаем из табл. 10.20  $x_5$  строку и столбец  $x_6$ .

Получаем табл. 10.21

	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_2$	$\infty$	3	0
$x_4$	0	$\infty$	0
$x_6$	5	3	$\infty$

• (10.21)

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

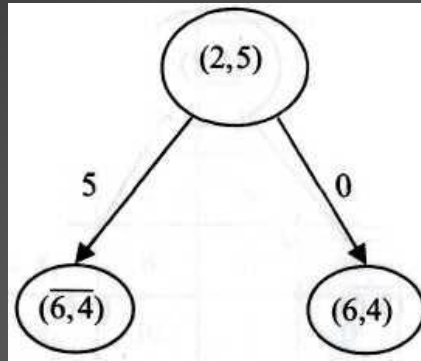
- Приведем табл. 10.21, вычитая из каждого элемента строки  $x_6$  минимальный элемент  $a_{64} = 3$ , Получаем табл. 10.22 в виде:

	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	$\infty$	3	$\textcircled{3}$ 0	3
$x_4$	0	$\infty$	0	0
$x_6$	2	$\textcircled{5}$ 0	$\infty$	2

• (10.22)

- Строим подграф (рис. 10.42), исключаем в табл. 10.22 строку  $x_6$  и столбец  $x_4$ , так как  $\alpha(6,4) = 5$ . Получаем табл. 10.23, в которой  $\alpha_{44} = 0$ . Заменяем  $\infty$  чтобы исключить цикл.

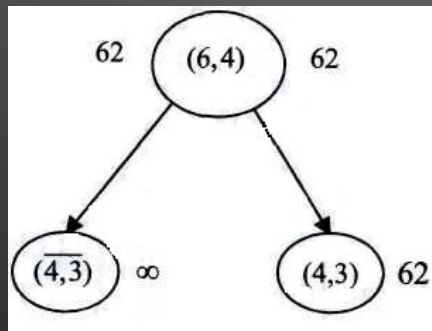
# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



• Рис. 10.42

	$x_3$	$x_5$
$x_2$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	$\infty$	$\infty$
	0	0

• (10.23)

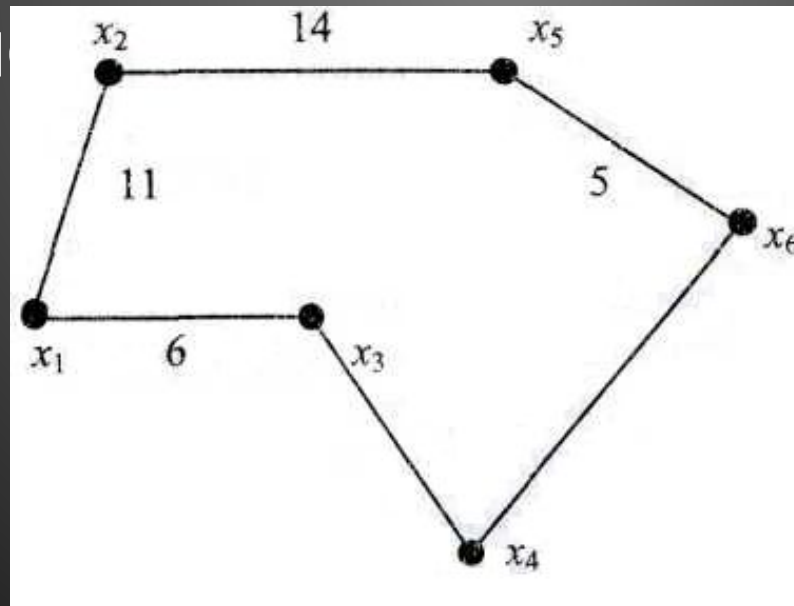


• Рис. 10.43



# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Строим древовидный граф ветвлений (рис. 10.45), соединяя отдельные элементы графа (рис. 10.39-10.43) и гамильтонов цикл обхода вершин ИСХОДН

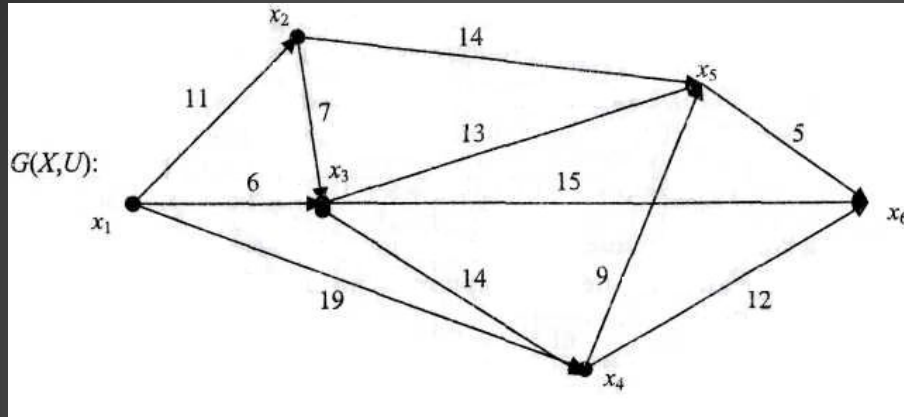


- Рис. 10.44

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Гамильтонов цикл образуют ребра  $(x_3, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_5)$ ,  $(x_5, x_6)$ ,  $(x_6, x_4)$ ,  $(x_4, x_3)$ .
- Длина маршрута обхода вершин  $x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3$  графа  $G(X, Y)$  (рис. 10.37) составляет  $M = 6 + 11 + 14 + 5 + 12 + 14 = 62$  и совпадает с нижней границей графа (рис. 10.45).

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



• Рис.10.37

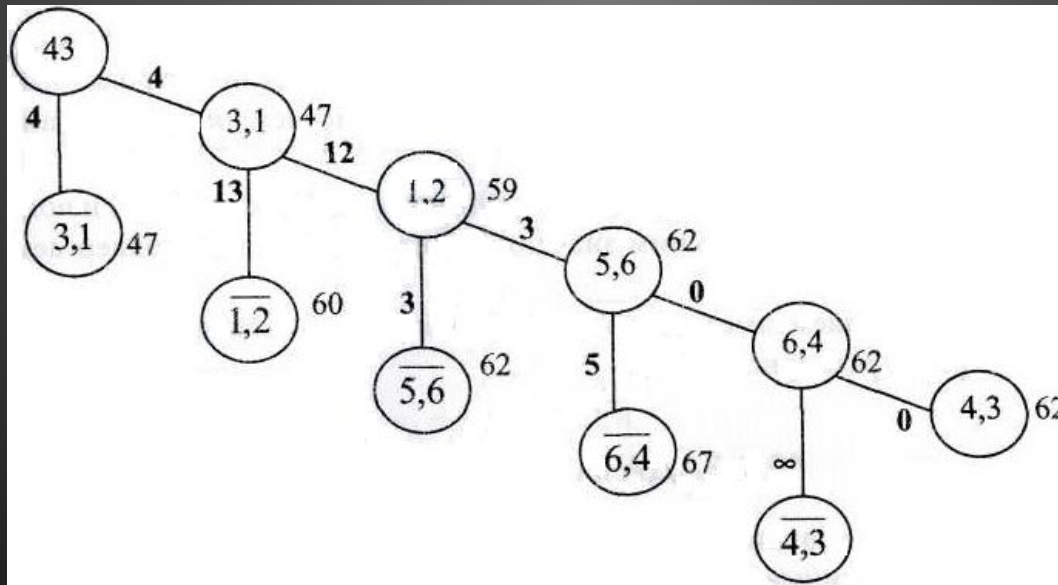


Рис. 10.45

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Последовательность решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ состоит в следующем:

1. На основании графа посещения городов составляется матрица расстояний от соответствующих вершин.
2. Проводится приведение матрицы, вычитая минимальные элементы по строкам и столбцам.
3. Определяем нижнюю границу всего множества маршрутов, складывая значения вычитаемых минимальных элементов.

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

4. В каждой клетке приведенной матрицы, в которых  $a_{ik} = 0$ , заменяем поочередно нули на  $\infty$  и вычисляем суммы новых констант приведения  $H(x_i, x_k)$ , которые записываем в клетке с нулем, отмеченной кружком.
5. Выбираем ребро ветвления  $(i, k)$  по максимальной величине суммы констант приведения  $H_{max}$ . Затем исключаем его из множества путем замены элемента матрицы  $a_{ik} = \infty$ . В результате будет определено подмножество маршрутов  $\{(i, k)\}$ .
6. В полученной матрице расстояний по строкам получаем нули, вычитая минимальное значение элементов в соответствующих строках и определяем нижнюю границу подмножества маршрутов  $H(i, k)$ .

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

7. Включаем ребро  $(i,k)$  в маршрут, вычеркивая строку  $i$  и столбец  $k$  в приведенной матрице расстояний и заменяя симметричный элемент  $a_{ik} = \infty$  для исключения образования негаметтонова цикла.
8. Приводим сокращенную матрицу (получаем нули в строках вычитанием минимального элемента) и определяем нижнюю границу подмножества  $H(i,k)$ .
9. Сравниваем нижние границы подмножеств  $H(i,k)$  и  $H(\underline{i},k)$  и подмножество с меньшим значением нижней границы подвергается ветвлению.
10. Определяем гаметтонов цикл при получении окончательной матрицы размерности  $2 \times 2$ .