Тема 7. Системы эконометрических уравнений

1. Системы независимых уравнений и системы взаимозависимых уравнений.

2. Структурная и приведенная формы модели.

3. Идентификация модели.

4. Двухшаговый и трехшаговый МНК.

1 вопрос

Необходимость систем уравнений

Изменение одного фактора, как правило, не может происходить при неизменности других.

↓

Отдельное уравнение регрессии не может характеризовать истинные влияния факторов на y.

↓

Структура связей между факторами описывается системой одновременных (структурных) уравнений

Составляющие систем уравнений

- переменные
  - эндогенные
  - экзогенные
- уравнения
  - поведенческие уравнения
  - уравнения-тождества

Типы переменных

Эндогенные переменные обычно обозначаются как y. Это зависимые переменные, значения которых определяются внутри модели. Их число равно числу уравнений в системе.

Экзогенные переменные обычно обозначаются как x. Это внешние по отношению к модели переменные. Они влияют на эндогенные переменные, но не зависят от них.

Лаговые переменные – это значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (y_{t-1}). В модели участвуют в качестве экзогенных переменных.

Типы уравнений

В поведенческих уравнениях описываются взаимодействия между переменными.

В уравнениях-тождествах описываются соотношения, которые должны выполняться во всех случаях. Тождества не содержат подлежащие оценке параметры ***a*** и ***b***, а также случайное отклонение **ε**.

Кейнсианская модель формирования доходов

$$\begin{cases} c_t = b_0 + b_1 y_t + \varepsilon_t, \\ y_t = c_t + i_t. \end{cases}$$

y-выпуск

c-объем потребления

i-инвестиции в закрытой экономике без государственных расходов

Системы эконометрических уравнений

- Система независимых уравнений
- Система рекурсивных уравнений
- Система взаимозависимых (одновременных) уравнений

Система независимых уравнений

Каждая зависимая переменная *y* рассматривается как функция одного и того же набора факторов *x*.

Система независимых уравнений

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases}$$

Набор факторов x_i в каждом уравнении может изменяться

- Экономическая нецелесообразность включения фактора в модель
- Незначимое значение t-статистики и частного F-критерия

Система независимых уравнений с различным набором факторов

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ y_2 = f(x_1, x_3, x_4, x_5), \\ y_3 = f(x_2, x_3, x_5), \\ y_4 = f(x_3, x_4, x_5). \end{cases}$$

Система рекурсивных уравнений

Каждое последующее уравнение включает в качестве факторов все зависимые переменные y предшествующих уравнений наряду с набором собственно факторов x.

Система рекурсивных уравнений

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}\boxed{y_1} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ y_3 = b_{31}\boxed{y_1} + b_{32}\boxed{y_2} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m + \varepsilon_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = b_{n1}\boxed{y_1} + b_{n2}\boxed{y_2} + b_{n3}\boxed{y_3} + \ldots + b_{nn-1}\boxed{y_{n-1}} + \\ + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases}$$

Модель производительности труда и фондоотдачи

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

y1-производительность труда,

y2 - фондоотдача,

x1- фондовооруженность труда,

x2 - энерговооруженность труда,

x3- квалификация рабочих

Система взаимозависимых уравнений

Одни и те же зависимые переменные *y* в одних уравнениях входят в левую часть, а в других уравнениях – в правую часть системы.

Система взаимозависимых уравнений

$$
\begin{cases}
y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \ldots + b_{1n}y_n + \\
+ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\
y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2n}y_n + \\
+ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn-1}y_{n-1} + \\
+ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n.
\end{cases}
$$

Модель динамики цены и заработной платы

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_{21} \end{cases}$$

y1-темп изменения месячной заработной платы,

y2- темп изменения цен,

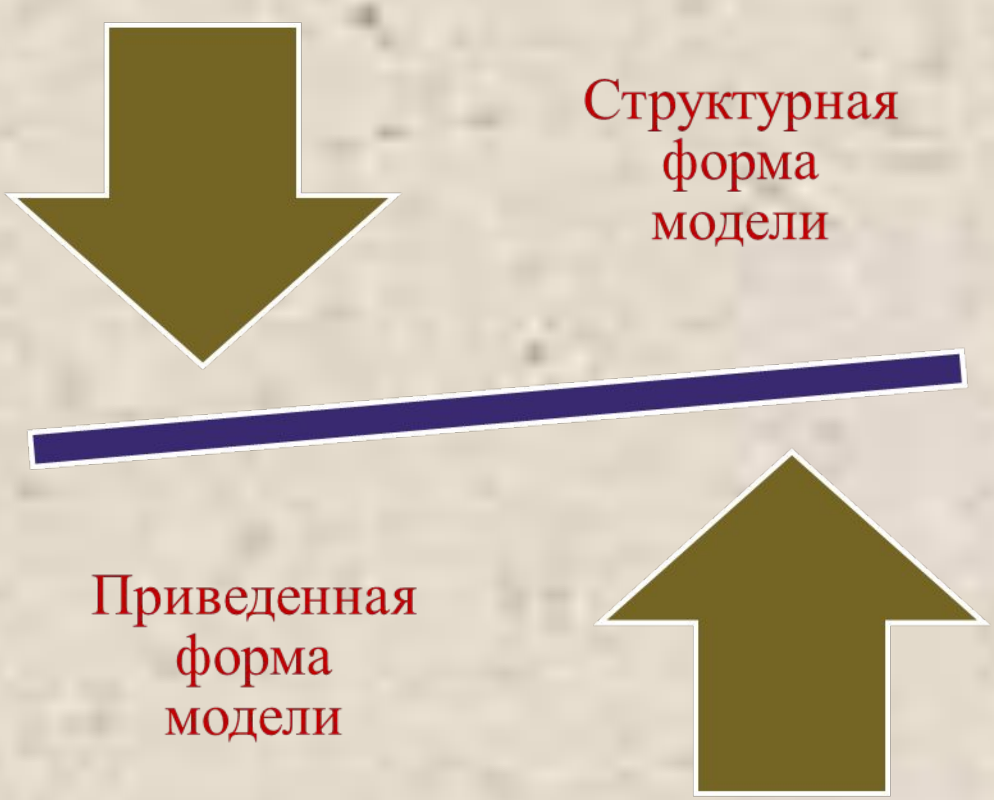
x1- процент безработных,

x2 - темп изменения постоянного капитала,

x3 - темп изменения цен на импорт сырья

Система взаимозависимых (одновременных) уравнений

2 вопрос



Структурная форма модели

Система взаимозависимых (одновременных) уравнений, описывающая структуру связей между переменными, называется структурной формой модели.

Коэффициенты b_i и a_j называются структурными коэффициентами модели.

Все переменные в модели выражены в отклонениях от среднего уровня ($x-x_{cp}$; $y-y_{cp}$), поэтому свободный член в каждом уравнении отсутствует.

Структурная форма модели

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21} y_1 + a_{22}\, x_2 + \varepsilon_{2.} \end{cases}$$

Приведенная форма модели

Приведенная форма модели представляет собой систему линейных функций эндогенных переменных от экзогенных. В каждое приведенное уравнение включаются все экзогенные переменные структурной модели.

Приведенные коэффициенты представляют собой нелинейные функции коэффициентов структурной модели.

Приведенная форма модели

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1m}x_m, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2m}x_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots + \delta_{nm}x_m, \end{cases}$$

Почему нужна
приведенная форма модели?

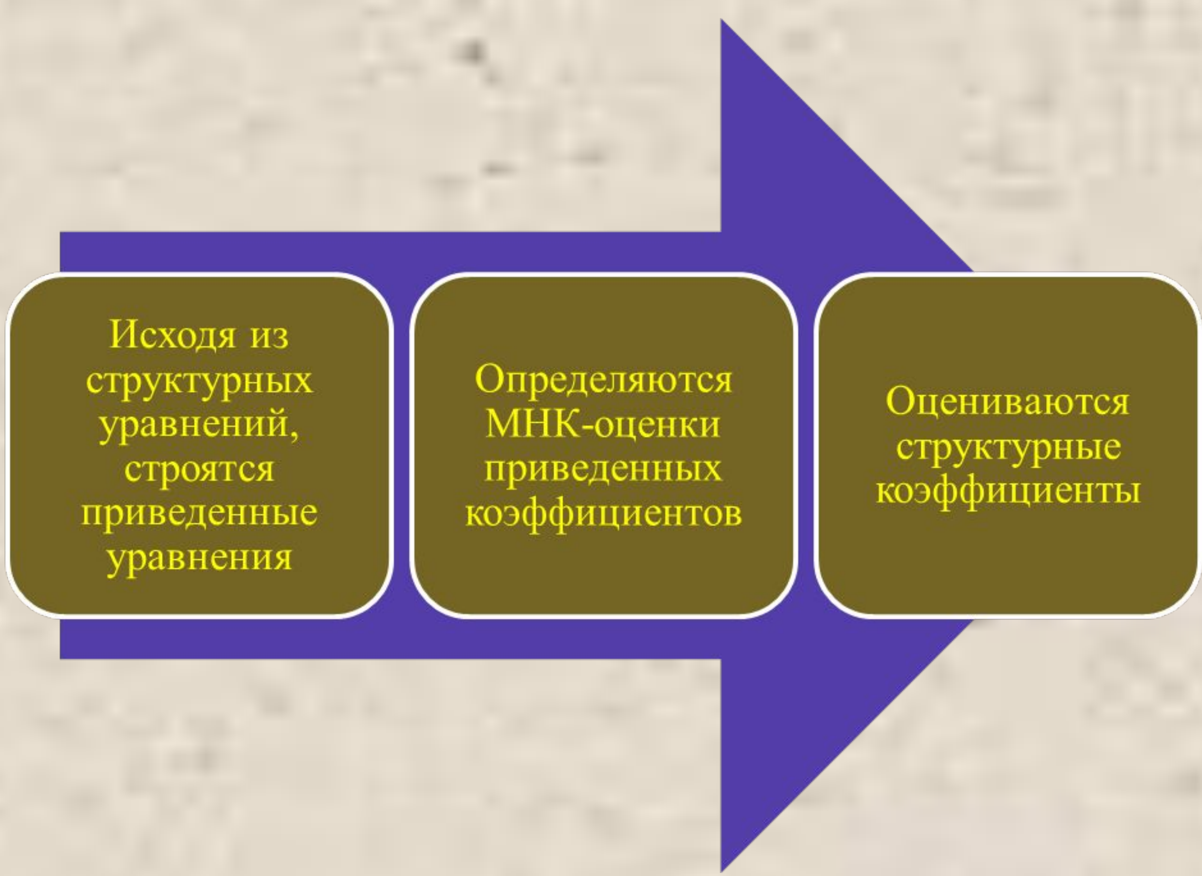
МНК-оценки структурных коэффициентов

Обычный МНК дает смещенные и несостоятельные оценки структурных коэффициентов и поэтому не применим

Для нахождения структурных коэффициентов структурная модель преобразуется в приведенную

Приведенные коэффициенты можно оценить обычным МНК и затем определить структурные коэффициенты

Косвенный МНК



Всегда ли можно
применить косвенный МНК?

3 вопрос

Идентификация модели

Идентификация модели – это:

- единственность соответствия между структурной и приведенной формами модели
- возможность оценки структурных коэффициентов по приведенным

Виды структурных моделей

- идентифицируемые
- неидентифицируемые
- сверхидентифицируемые

Модель идентифицируема

- Число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной модели
- Применяется косвенный МНК

Модель неидентифицируема (недоопределена)

- Число параметров структурной модели больше числа параметров приведенной модели
- Нельзя оценить структурные коэффициенты

Модель сверхидентифицируема (переопределена)

- Число параметров структурной модели меньше числа параметров приведенной модели
- Применяется двухшаговый МНК

Необходимое условие идентификации

D+1=H - уравнение идентифицируемо

D+1<H - уравнение неидентифицируемо

D+1>H - уравнение сверхидентифицируемо

D - число экзогенных переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение

H - число эндогенных переменных в уравнении

Достаточное условие идентификации

Определитель матрицы, составленной из коэффициентов при переменных, отсутствующих в исследуемом уравнении, не равен нулю, и ранг этой матрицы не менее числа эндогенных переменных системы без единицы

Следует помнить, что на идентификацию проверяется каждое уравнение модели

Модель идентифицируема

- Если каждое уравнение модели идентифицируемо

Модель неидентифицируема

- Если хотя бы одно уравнение модели неидентифицируемо

Модель сверхидентифицируема

- Если хотя бы одно уравнение сверхидентифицируемо

Оценка структурной модели на идентификацию

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{cases}$$

Необходимое условие идентификации

1: H=3(y_1,y_2,y_3), D=2(x_3,x_4) , 2+1=3 - выполнено

2: H=2(y_1,y_2), D=1(x_1) , 1+1=2 - выполнено

3: H=3(y_1,y_2,y_3), D=2(x_3,x_4) , 2+1=3 - выполнено

Оценка структурной модели на идентификацию (продолжение)

Достаточное условие идентификации

уравнение	переменные	
	X_3	X_4
2	a_{23}	a_{24}
3	0	0

detA=0 - нарушено

уравнение	переменные	
	y_3	x_1
1	b_{13}	a_{11}
3	-1	a_{31}

detA≠0, R=2, H=3, 3-1=2

(продолжение)

уравнение	переменные	
	X_3	X_4
1	0	0
2	a_{23}	a_{24}

detA=0 - нарушено

Вывод: модель, идентифицируемая по необходимому условию, не идентифицируема исходя из достаточного условия.

4
вопрос

Если система сверхидентифицируема, то КМНК не дает однозначных оценок для параметров

В этом случае наиболее простым является двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК)

Основная идея ДМНК

На основе приведенной формы модели получить для сверхидентифицируемого уравнения теоретические значения эндогенных переменных, содержащихся в правой части уравнения

Подставить их вместо фактических значений и применить обычный МНК к структурной форме сверхидентифицируемого уравнения

Таким образом, МНК используется дважды:

1) При определении приведенной формы модели и нахождении на ее основе оценок эндогенной переменной $\hat{y}_i = \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \ldots + \delta_{ij}x_j$

2) При определении структурных коэффициентов структурного сверхидентифицируемого уравнения на основе оценок эндогенных переменных

Если все уравнения системы сверхидентифицируемы

- То для оценки структурных коэффициентов каждого уравнения используется ДМНК

Если в системе есть точно идентифицируемые уравнения

- То структурные коэффициенты по точно идентифицируемым уравнениям находятся из системы приведенных уравнений

Пример (И. И. Елисеева,Эконометрика, 2005)

Применим ДМНК к простейшей сверхидентифицируемой модели:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

1 уравнение является сверхидентифицируемым: H=1 (y_1), D=1 (x_2) и D+1>H.

2 уравнение является точно идентифицируемым: H=2 (y_1, y_2), D=1 (x_1) и D+1=H.

Условные данные по пяти регионам

Регион	Y1	Y2	X1	X2
1	2	5	1	3
2	3	6	2	1
3	4	7	3	2
4	5	8	2	5
5	6	5	4	6
Средние	4	6,2	2,4	3,4

Приведенная форма модели составит:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + u_1, \\ y_2 = \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + u_2. \end{cases}$$

Используя отклонения от средних уровней, для первого уравнения приведенной формы модели система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \sum y_1 x_1 = \delta_{11} \sum x_1^2 + \delta_{12} \sum x_1 x_2, \\ \sum y_1 x_2 = \delta_{11} \sum x_1 x_2 + \delta_{12} \sum x_2^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = 5{,}2\delta_{11} + 4{,}2\delta_{12}, \\ 10 = 4{,}2\delta_{11} + 17{,}2\delta_{12}. \end{cases}$$

$$y_1 = 0{,}852 x_1 + 0{,}373 x_2 + u_1.$$

Используя отклонения от средних уровней, для второго уравнения приведенной формы модели система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \sum y_2 x_1 = \delta_{21} \sum x_1^2 + \delta_{22} \sum x_1 x_2, \\ \sum y_2 x_2 = \delta_{21} \sum x_1 x_2 + \delta_{22} \sum x_2^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,4 = 5,2\delta_{21} + 4,2\delta_{22}, \\ -0,4 = 4,2\delta_{21} + 17,2\delta_{22}. \end{cases}$$

$$y_2 = -0,0728x_1 - 0,00557x_2 + u_2.$$

Таким образом, приведенная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 0,852x_1 + 0,373x_2 + u_1, \\ y_2 = -0,0728x_1 - 0,00557x_2 + u_2. \end{cases}$$

На основе второго уравнения данной системы можно найти теоретические значения (оценки) для эндогенной переменной y_2. Затем, используя сверхидентифицируемое структурное уравнение:

$y_1=b_{12}(y_2+x_1)$, и заменив фактические значения y_2 их оценками, найдем

$$\tilde{y}_2 + x_1 = z$$

значения новой переменной z:

Расчетные данные для второго шага ДМНК

X_1	X_2	Y_2 (теорет)	Z	Y_1	Y_1Z	Z^2
-1,4	-0,4	0,103	-1,297	-2	2,594	1,682
-0,4	-2,4	0,042	-0,358	-1	0,358	0,128
0,6	-1,4	-0,035	0,565	0	0	0,319
-0,4	1,6	0,020	-0,380	1	-0,380	0,144
1,6	2,6	-0,130	1,470	2	2,940	2,161
Сумма =0	0	0	0	0	5,512	4,434

Далее применим МНК к уравнению
$y_1=b_{12}(y_2+x_1)$:

$$y_1 = b_{12}z,$$

$$\sum y_1 z = b_{12}\sum z^2,$$

$$b_{12} = \frac{\sum y_1 z}{\sum z_2} = \frac{5{,}512}{4{,}434} = 1{,}243.$$

Таким образом, первое сверхидентифицируемое структурное уравнение составит:

$$y_1 = 1{,}243(y_2 + x_1) + \varepsilon_1.$$

Второе точно идентифицируемое структурное уравнение найдем из
системы приведенных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}852x_1 + 0{,}373x_2 + u_1, \\ y_2 = -0{,}0728x_1 - 0{,}00557x_2 + u_2. \end{cases}$$

С этой целью из второго уравнения приведенной формы модели следует исключить x_1, выразив его через первое уравнение и подставив
во второе:

$$x_1 = \frac{y_1 - 0{,}373x_2}{0{,}852},$$

$$\hat{y}_2 = -0{,}0728\left(\frac{y_1 - 0{,}373x_2}{0{,}852}\right) - 0{,}00557x_2,$$

Таким образом, второе уравнение структурной формы модели:

$$\hat{y}_2 = -0{,}085y_1 + 0{,}026x_2 + \varepsilon_2$$

В целом рассматриваемая система одновременных уравнений составит:

$$\begin{cases} y_1 = 1{,}243(y_2 + x_1) + \varepsilon_1, \\ y_2 = -0{,}085 y_1 + 0{,}026 x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Двухшаговый метод наименьших квадратов является наиболее общим
и широко распространенным методом решения системы одновременных
уравнений. Для точно идентифицируемых уравнений ДМНК дает
тот же результат, что и КМНК.