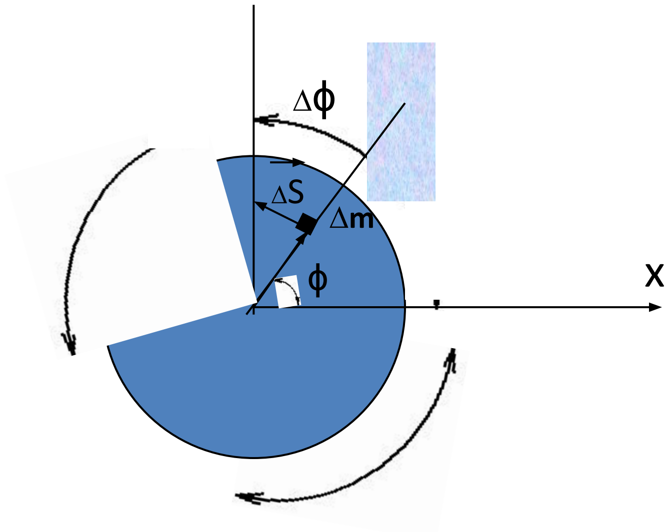
Лекция 3

Динамика абсолютно твердого тела

Момент импульса. Момент сил. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. Момент инерции тела относительно оси. Теорема Штейнера. Уравнения движения и равновесия твердого тела. Энергия движущегося тела. Неинерциальные системы отсчёта

Вращательное движение твердого тела



Кинематические параметры

$$\varphi$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Связь угловых и линейных параметров

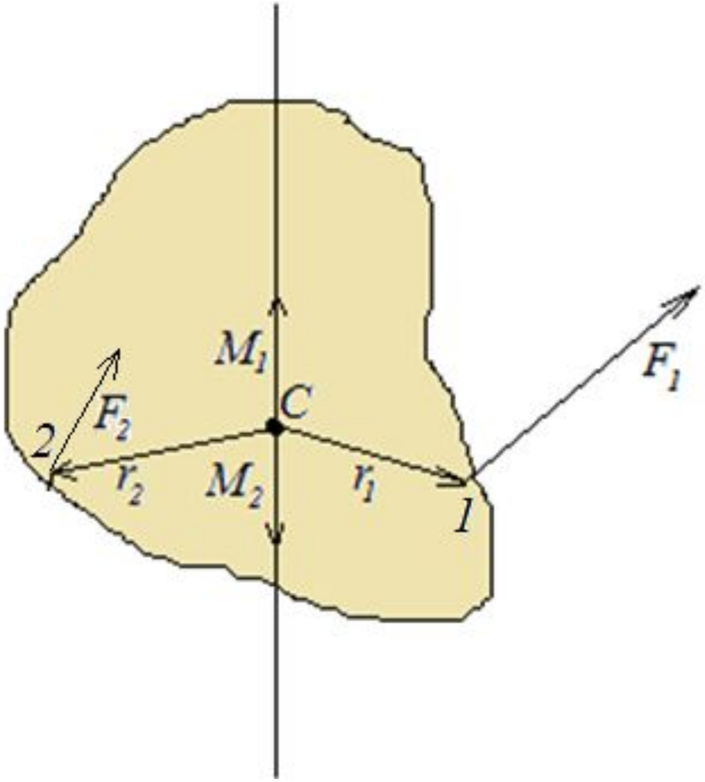
$$dS = R \cdot d\varphi, \qquad \vec{V} = \left[\vec{\omega} \times \vec{R}\right]$$

$$\frac{dS}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \qquad V = \omega \cdot R$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \qquad a_\tau = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon$$

$$a_n = \frac{V^2}{R}, \qquad a_n = \omega^2 \cdot R$$

Момент силы



$$\vec{M} = [\vec{F} \cdot \vec{r}]$$

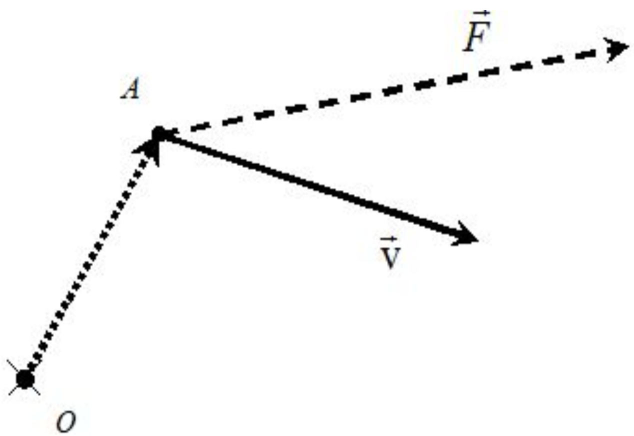
$$\sum \overrightarrow{M_i} = \vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2$$

Состояние покоя

$$\sum \vec{F_i} = 0 \qquad \sum \overrightarrow{M_i} = 0$$

Момент импульса

Материальная точка



$$\vec{L} = [\vec{p} \cdot \vec{r}] = m \cdot [\vec{v} \cdot \vec{r}]$$

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt}$$

$$\vec{M} = [\vec{F} \cdot \vec{r}] = \left[\frac{\overrightarrow{dp}}{dt} \cdot \vec{r}\right] = \left[\frac{d(\vec{p} \cdot \vec{r})}{dt}\right] = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

с другой стороны

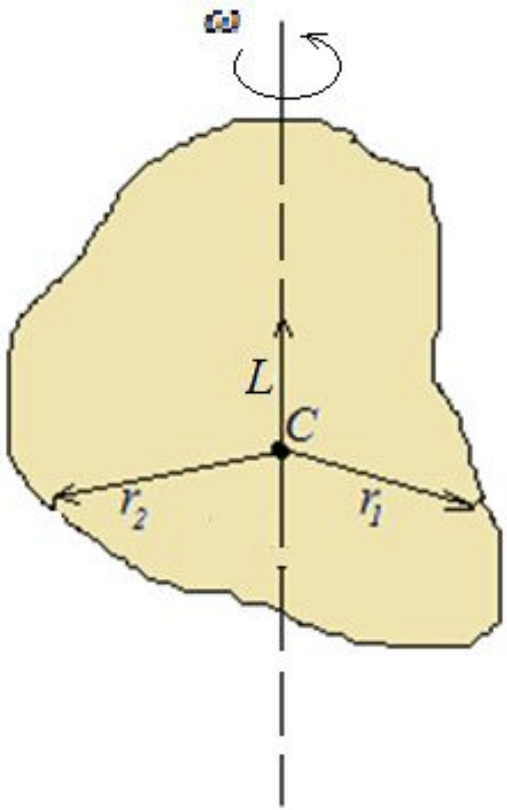
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$$

$$\vec{M} = \frac{d([\vec{p} \cdot \vec{r}])}{dt} = \frac{d([m \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] \cdot \vec{r}])}{dt} = \frac{d(m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega})}{dt} = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$m \cdot r^2 = I$ – момент инерции

$$\vec{M} = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

Твёрдое тело



$$L = \sum \overrightarrow{L_i} = \left(\sum m_i \cdot r_i^2\right) \cdot \vec{\omega} = I \cdot \vec{\omega}$$

$$I = \left(\sum m_i \cdot r_i^2\right)$$

Момент инерции твердого тела *– физическая величина характеризующая массу тела и характер распределения её относительно оси вращения*

$$I = \left(\sum m_i \cdot r_i^2\right)$$

Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела

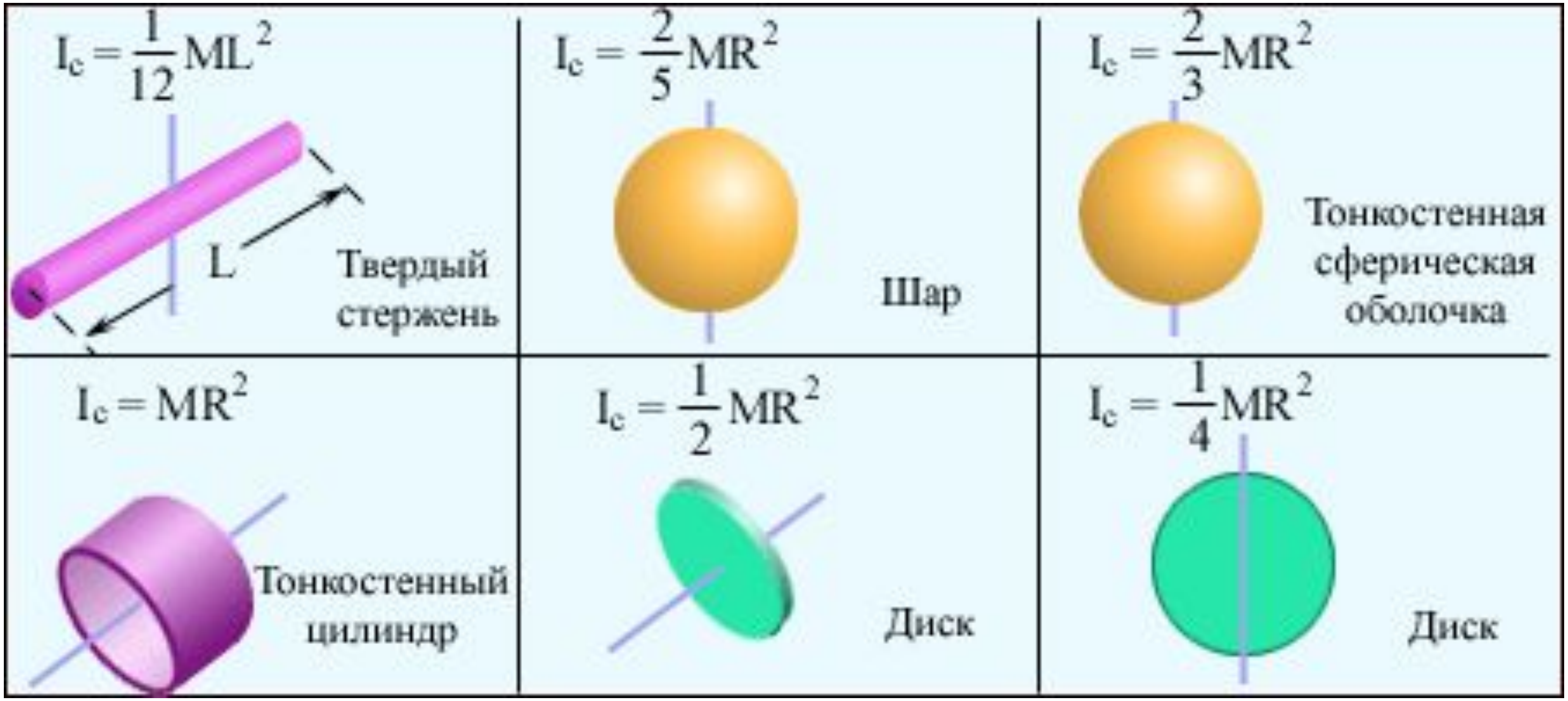
материальная точка

$$E_к = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2} = m \cdot r^2 \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

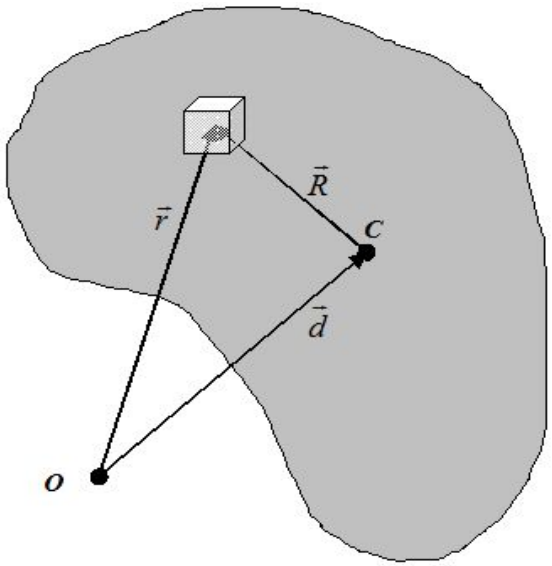
твёрдое тело

$$E_к = \sum E_{к_i} = \sum m_i \cdot r_i^2 \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum m_i \cdot r_i^2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

Моменты инерции геометрических тел.



Теорема Гюйгенса-Штейнера.



Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме моменту инерции тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$I = m \cdot d^2 + I_C$$

Любой набор взаимодействующих тел именуется *системой тел*.

Если на тела, входящие в систему, не действуют другие тела, не входящие в эту систему (или действие других тел на каждое тело скомпенсировано), то такая система тел называется ***замкнутой.***

Если суммарный момент сил действующий на систему равен нулю, то такая система также будет ***замкнутой.***

Закон сохранения момента импульса

$$I \cdot \vec{\omega} = L = const$$

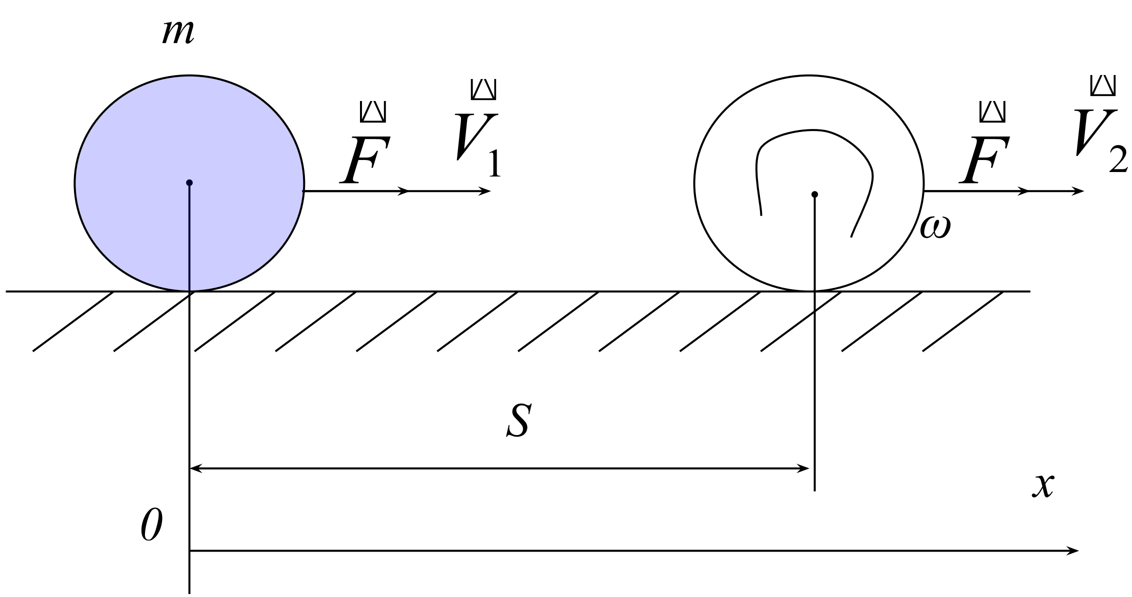
Момент импульса замкнутой системы всегда остаётся неизменным.

$$I \cdot \vec{\omega} = const$$

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

Энергия движущегося твёрдого тела

Качение по плоскости без проскальзывания (плоское движение)



$$E = E_k = E_k^{пост} + E_k^{вращ} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$