ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, содержащее производные от искомой функции или её дифференциалы.

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

или

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

Примеры ДУ:

$$6y' - xy = 0$$

$$y''' + 2xy'' = 0$$

$$y'' = 4x$$

$$y' = xe^{y}$$

$$x\,dy = 2y\,dx$$

$$x\,dy = y\ln x\,dx$$

- Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком ДУ.

- Решением ДУ называется такая функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество.

Пример 1. Показать, что данная функция

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad C_1, C_2 \in R$$

является решением ДУ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

Решение: $y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$

$$y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

Подставим: $-C_1 \sin x - C_2 \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$

$$0 = 0$$

Т.о. функции вида $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ являются решениями данного ДУ при любом выборе постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 = 1 \quad и \quad C_2 = 0: \quad y = \sin x$$

$$C_1 = 0 \quad и \quad C_2 = 2: \quad y = 2\cos x$$

$$C_1 = 3 \quad и \quad C_2 = -1: \quad y = 3\sin x - \cos x$$

Дифференциальные уравнения I порядка

- ДУ I порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$

$y' = f(x, y)$ или $dy = f(x, y)\,dx$

- Общим решением ДУ I порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая зависит от одного произвольного постоянного С.

или $\Phi(x, y, C) = 0$ (неявный вид)

- **Частным решением ДУ** I порядка называется любая функция $y=\varphi(x,C_0)$ полученная из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

или $\Phi(x,y,C_0)=0$ (неявный вид)

Пример 2. ДУ: $y' = 3x^2$

$y = x^3 + C$ -общее решение $\quad y' = \left(x^3 + C\right)' = 3x^2$

$C = 2: \quad y = x^3 + 2 \qquad y' = \left(x^3 + 2\right)' = 3x^2$

$C = -1: \quad y = x^3 - 1 \qquad y' = \left(x^3 - 1\right)' = 3x^2$

$C = 0: \quad y = x^3 \qquad y' = \left(x^3\right)' = 3x^2$

частные решения

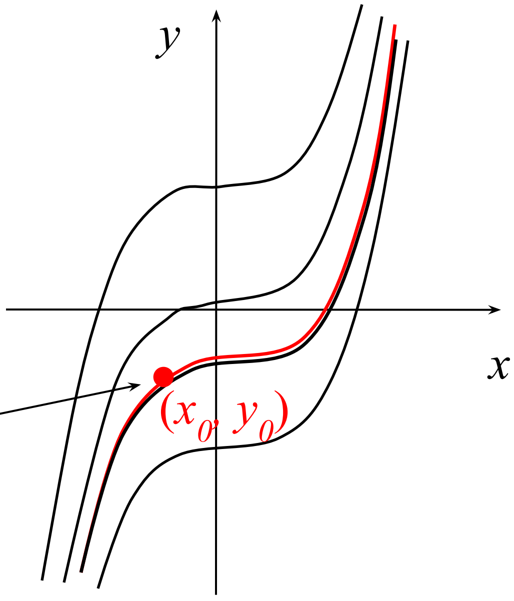
Геометрически:

- Общее решение ДУ $y=\varphi(x,C)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy;
- Частное решение ДУ $y=\varphi(x,C_0)$ -одна кривая этого семейства, проходящая через точку (x_0,y_0)

$$y'=3x^2$$

$y=x^3+C$ -общее решение

$y=x^3-1$ -частное решение



- Условие, что при $x=x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 называется начальным условием.

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{или} \qquad y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

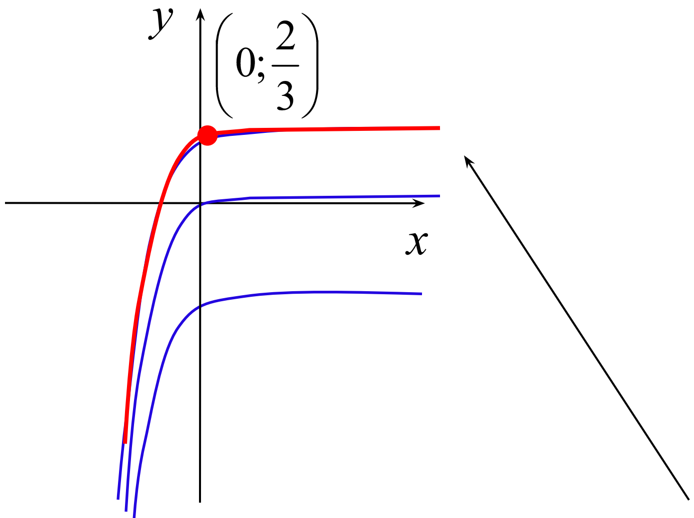
- Задача отыскания конкретного частного решения данного ДУ по начальным данным называется задачей Коши (Cauchy).

Пример 3. Решить задачу Коши: $y' = e^{-3x}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$

Решение: $y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$ -общее решение

Подставим в общее решение начальные условия: $y(0) = \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}e^{-3\cdot 0} + C$$



$$\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} + C$$

$$C = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + 1$ -частное решение

Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

- Если в уравнении $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и её частная производная $f'_y(x;y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $(x_0;y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$

1. ДУ I порядка с разделёнными переменными.

- Если каждая часть ДУ представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной, то говорят, что переменные в этом уравнении разделены.

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

В этом случае уравнение достаточно проинтегрировать:

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C$$

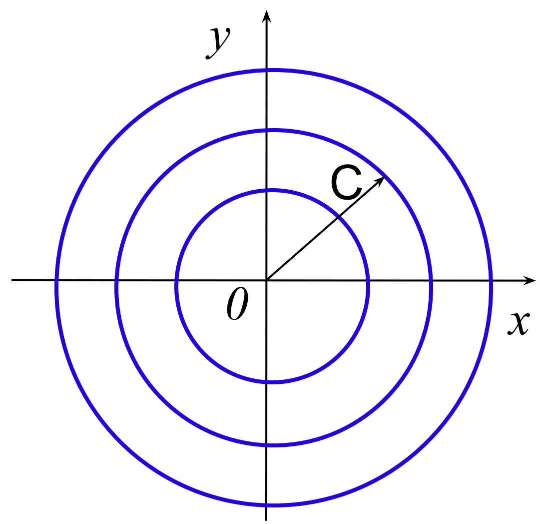
Пример 4. Решить ДУ: $x\,dx + y\,dy = 0$

Решение:

общее решение: $\underline{y^2 = -x^2 + C}$

$$y\,dy = -x\,dx$$

или $\underline{y^2 + x^2 = C}$



$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \qquad \Big|\cdot 2$$

$$y^2 = -x^2 + \underbrace{2C}_{C}$$

Геометрически: получили семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом C.

Пример 5. Решить ДУ: $x\,dx - y\,dy = 0$

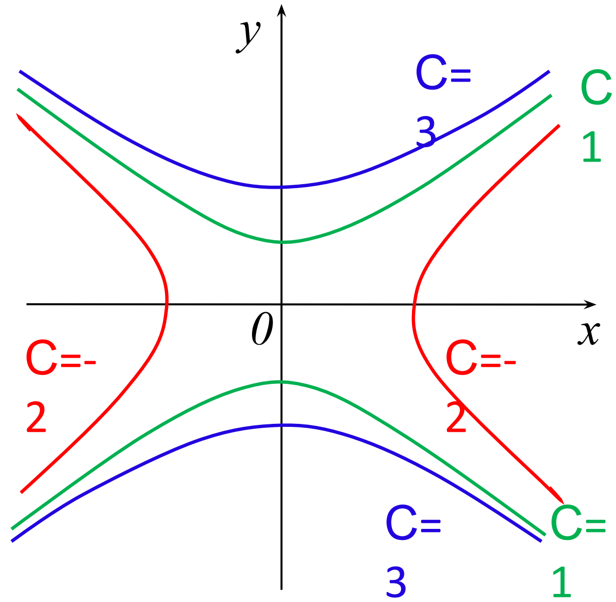
Решение:

$$y\,dy = x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \qquad \Big| \cdot 2$$

$$y^2 = x^2 + \underbrace{2C}_{C}$$



общее решение: $\underline{y^2 = x^2 + C}$

или $\underline{y^2 - x^2 = C}$

2. ДУ I порядка с разделяющимися переменными.

- Уравнения, в которых переменные разделяются, называются ДУ с разделяющимися переменными.

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0$$

где $M_1(x), \quad M_2(x), \quad N_1(y), \quad N_2(y)$

некоторые функции.

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \quad \Big| : \; N_1(y)\,M_2(x) \neq 0$$

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy = 0$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

интегрируем: $\displaystyle \int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$

Замечание:

- При проведении почленного деления ДУ на

$$N_1(y)M_2(x)$$

могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение

$$N_1(y)M_2(x)=0$$

и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения- особые решения.

Пример 6. Найти общее и частное решение ДУ:

$$x\,dy = y\,dx, \quad y(5) = 10$$

Решение: 1) Найдём общее решение ДУ:

$$x\,dy = y\,dx \quad \Big| \cdot \frac{1}{xy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln|xC|$$

$$|y| = |Cx|$$

$$y = \pm Cx \quad \Rightarrow \quad y = Cx$$

Итак, общее решение ДУ: $y = Cx$

2) Найдём частное решение ДУ, если $y(5) = 10$

Подставим эти начальные условия в общее решение ДУ и найдем С:

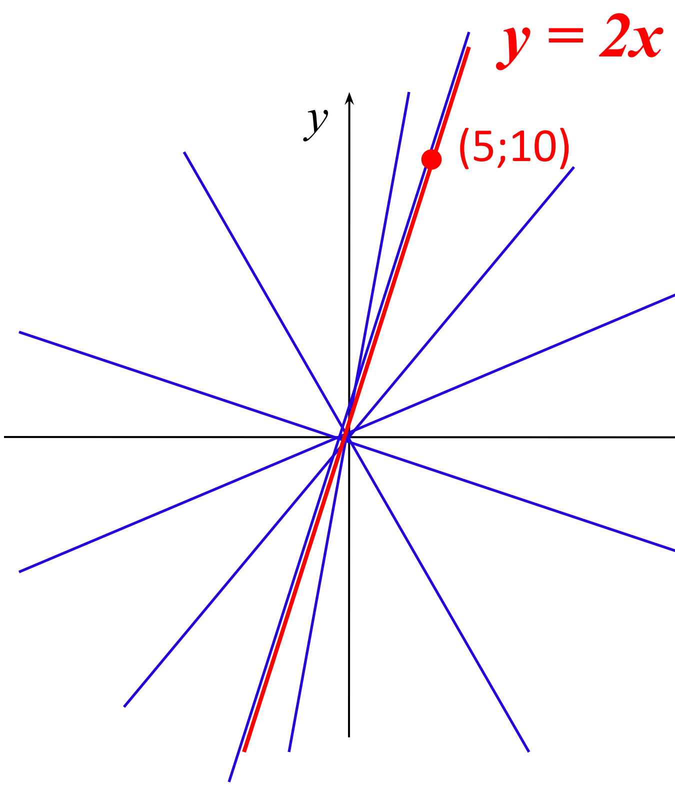
$$\left.\begin{array}{l} 10 = 5 \cdot C \\ C = 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$y = 2x$ - частное решение ДУ.

Ответ: общее решение $y = Cx$

частное решение $y = 2x$

Геометрически:



общее решение $y = Cx$

частное решение $y = 2x$

Пример 7. Найти общее решение ДУ:

$$(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$$

Решение:

$$(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$$

$$(1-y)x\,dy=-(1+x)y\,dx \qquad \left|\cdot\frac{1}{xy}\right.$$

$$\frac{1-y}{y}dy=-\frac{1+x}{x}dx$$

$$\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=-\left(\frac{1}{x}+1\right)dx \quad\Rightarrow\quad \int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=-\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx$$

$$\ln|y|-y=-\ln|x|-x+C$$

$$\ln|y|+\ln|x|=y-x+C$$

$$\ln|xy|=y-x+C \qquad \text{или} \qquad \ln|xy|-y+x=C$$

Ответ. Общее решение: $\ln|xy|-y+x=C$

Нахождение особого решения:

Здесь уравнение $N_1(y)M_2(x)=0$ имеет вид $xy=0$ Его решения $x=0$, $y=0$ являются решениями данного ДУ, но не получаются из общего решения ни при каких значениях произвольной постоянной.
Значит, решения $x = 0$, $y = 0$ являются особыми.

Пример 8. Найти общее решение ДУ:

$$2x\sin y\,dx+\left(x^2+3\right)\cos y\,dy=0$$

Решение:

$$2x\sin y\,dx+\left(x^2+3\right)\cos y\,dy=0$$

$$\left(x^2+3\right)\cos y\,dy=-2x\sin y\,dx \qquad \Bigg|\cdot\frac{1}{\left(x^2+3\right)\sin y}$$

$$\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\frac{2x}{x^2+3}dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{2x}{x^2+3} dx$$

$$\ln\left|\sin y\right| = -\ln\left|x^2+3\right| + C$$

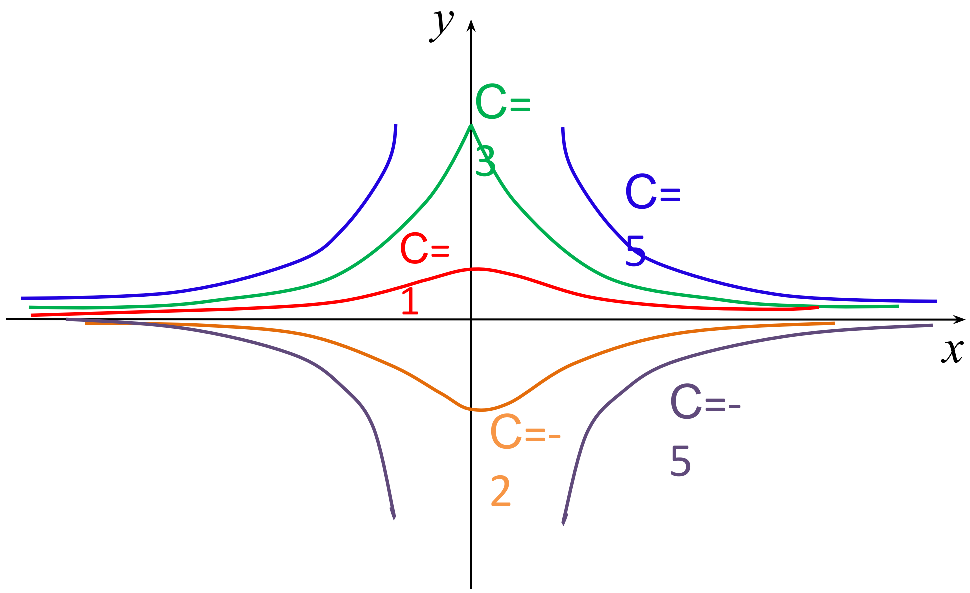
$$\ln\left|\sin y\right| = -\ln\left|x^2+3\right| + \ln\left|C\right|$$

$$\ln\left|\sin y\right| = \ln\left|\frac{C}{x^2+3}\right| \qquad \Rightarrow \qquad \left|\sin y\right| = \left|\frac{C}{x^2+3}\right|$$

$$\sin y = \pm\frac{C}{x^2+3}$$

$$\sin y = \frac{C}{x^2+3} \qquad \text{или} \qquad \underline{y = \arcsin\frac{C}{x^2+3}}$$

Геометрически:



общее решение $y = \arcsin \dfrac{C}{x^2 + 3}$

Пример 9. Решить задачу Коши:

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2 y' = e^x, \quad y(0)=1$$

Решение:

1) Найдём общее решение ДУ: $\left(1+e^{2x}\right)y^2 \dfrac{dy}{dx} = e^x$

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2 dy = e^x\,dx \qquad \left|\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\right.$$

$$y^2 dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$\int y^2 dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \arctan e^x + C \quad \Big| \cdot 3$$

$$y^3 = \arctan e^x + \underbrace{3C}_{C} \qquad \text{или} \qquad y^3 = \arctan e^x + C$$

Итак, общее решение ДУ: $y^3 - \arctan e^x = C$

2) Найдём частное решение ДУ, если $y(0) = 1$

Подставим эти начальные условия в общее решение $y^3 - \arctan e^x = C$ и найдем С:

$$1 - 3\arctan e^0 = C$$

$$1 - 3\arctan 1 = C$$

$$1 - 3 \cdot \frac{\pi}{4} = C$$

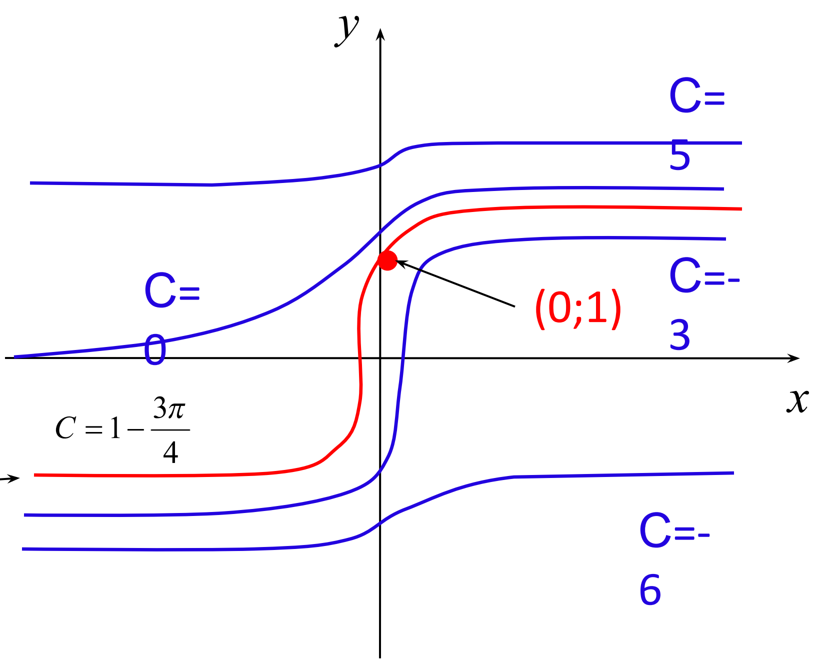
$$y^3 - 3\arctan e^x = 1 - \frac{3\pi}{4}$$

$$y^3 = 3\arctan e^x + 1 - \frac{3\pi}{4}$$

или

частное решение ДУ: $y = \sqrt[3]{3\arctan e^x + 1 - \frac{3\pi}{4}}$

Геометрически:



$$y = \sqrt[3]{3\arctan e^x + 1 - \frac{3\pi}{4}}$$

общее решение $\quad y^3 - \arctan e^x = C$

частное решение $\quad y = \sqrt[3]{3\arctan e^x + 1 - \frac{3\pi}{4}}$

Пример 10. Решить задачу Коши:

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-3), \quad y(0) = 4$$

Решение:

1) Найдём общее решение ДУ:

$$dy = 2(y-3)\,dx \qquad \Big| \cdot \frac{1}{y-3}$$

$$\frac{dy}{y-3} = 2\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2\,dx$$

$$\ln|\,y-3\,| = 2x + C$$

$$\ln|\,y-3\,| = \ln e^{2x} + \ln|\,C\,|$$

$$\ln|\,y-3\,| = \ln|\,C\,| \cdot e^{2x}$$

$$|\,y-3\,| = |\,C\,| \cdot e^{2x}$$

$$y-3 = \pm C \cdot e^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad y-3 = C \cdot e^{2x}$$

Итак, общее решение ДУ: $y = 3 + C \cdot e^{2x}$

2) Найдём частное решение ДУ, если $y(0) = 4$

Подставим эти начальные условия в общее решение $y = 3 + C \cdot e^{2x}$ и найдем С:

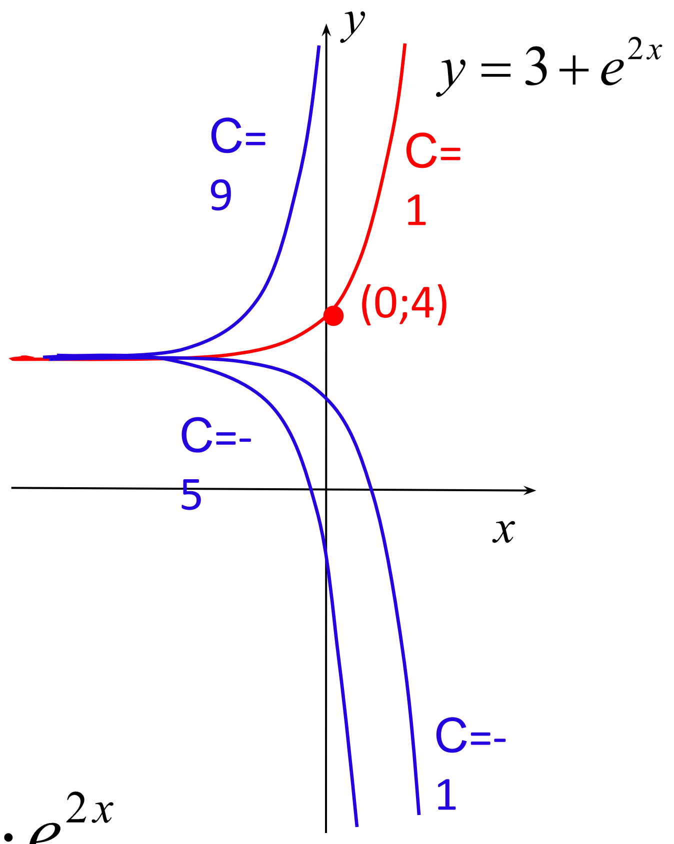
$$4 = 3 + C \cdot e^{0}$$

$$4 = 3 + C$$

$$C = 1$$

Тогда, частное решение ДУ: $y = 3 + e^{2x}$

Геометрически:



общее решение $y = 3 + C \cdot e^{2x}$

частное решение $y = 3 + e^{2x}$