





Неопределённый интеграл.

Метод интегрирования по частям.

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемые функции

известно $d(uv) = (uv)' dx$

тогда $d(uv) = (u'v + uv') dx$

проинтегрируем $\int d(uv) = \int (u'v + uv') dx$

$$\int d(uv) = \int u'v dx + \int uv' dx$$

m.k. $u' dx = du$; $v' dx = dv$

то

$$\int d(uv) = \int v du + \int u dv$$

$$uv + C = \int v du + \int u dv$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Если интеграл, стоящий справа, проще интеграла, стоящего слева, то применение формулы имеет смысл.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x e^x dx$

$$\left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right]$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = \underline{x e^x - e^x + C}$$

Некоторые типы интегралов, решаемые методом интегрирования по частям.

$$1^0. \quad \int P(x) \underbrace{\ln x}_{u} dx \quad \int P(x) \underbrace{\arcsin x}_{u} dx \quad \int P(x) \underbrace{\arctan x}_{u} dx$$
$$\int P(x) \underbrace{\arccos x}_{u} dx \quad \int P(x) \underbrace{\operatorname{arccot} x}_{u} dx$$

где $P(x)$ - многочлен

$$2^0. \quad \int \underbrace{P(x)}_u e^{ax} dx \quad \int \underbrace{P(x)}_u \sin ax dx \quad \int \underbrace{P(x)}_u \cos ax dx, \quad a \neq 0$$

$u = P(x)$ - многочлен

Если $P(x)$ выше первой степени, то операцию интегрирования по частям следует применять несколько раз.

$$3^0. \quad \int e^{ax} \cos bx dx \quad \int e^{ax} \sin bx dx \quad , \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

Формула применяется два раза, причем оба раза за u выбирается либо показательная функция, либо тригонометрическая.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \ln x \, dx$

$$\left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right]$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int (x - 5)x \sin 2x dx$

$$\int (x - 5)x \sin 2x dx = \int (x^2 - 5x) \sin 2x dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = x^2 - 5x & dv = \sin 2x dx \\ du = (2x - 5) dx & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} (x^2 - 5x) \cos 2x - \int (2x - 5) \frac{1}{-2} \cos 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 5x)\cos 2x + \frac{1}{2} \int (2x - 5)\cos 2x dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = 2x - 5 & dv = \cos 2x dx \\ du = 2 dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 5x)\cos 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(2x - 5)\sin 2x - \frac{2}{2} \int \sin 2x dx \right) =$$

$$= \frac{5x - x^2}{2} \cos 2x + \frac{2x - 5}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C =$$

$$= \frac{1 + 10x - 2x^2}{4} \cos 2x + \frac{2x - 5}{4} \sin 2x + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int e^{3x} \sin 2x dx$

$$\left[\begin{array}{ll} u = e^{3x} & dv = \sin 2x dx \\ du = 3e^{3x} dx & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right]$$

$$\int e^{3x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = e^{3x} & dv = \cos 2x dx \\ du = 3e^{3x} dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \sin 2x - \frac{9}{4} \int e^{3x} \sin 2x dx$$

Пусть $F(x) = \int e^{3x} \sin 2x dx$

тогда $F(x) = -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \sin 2x - \frac{9}{4}F(x)$

$$\frac{13}{4}F(x) = -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \sin 2x$$

$$F(x) = -\frac{2}{13}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{13}e^{3x} \sin 2x + C$$

Ответ:

$$\int e^{3x} \sin 2x dx = -\frac{2}{13}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{13}e^{3x} \sin 2x + C$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int e^{\sqrt{x}} dx$

$$\sqrt{x} = t$$

$$x = t^2$$

$$dx = d(t^2)$$

$$dx = 2t dt$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int 2te^t dt = 2 \int te^t dt =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = t & dv = e^t dx \\ du = dt & v = e^t \end{array} \right]$$

$$= 2(te^t - \int e^t dt) = 2te^t - 2e^t + C = 2e^t(t - 1) + C =$$

$$= \underline{2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C}$$