Интерполяция функций

Постановка задачи

Основу мат моделей многих процессов и явлений в физике, химии, биологии и др. областях составляют уравнения различного вида. Для решения этих уравнений необходимо иметь возможность вычислить значения функций, входящих в описание математической модели рассматриваемого процесса при произвольном значении аргумента.

Используемые в математических моделях функции могут быть заданы как аналитическим способом, так и табличным, при котором функция известна только при дискретных значениях аргумента.

Пусть функция *f(x)* задана множеством своих значений для дискретного набора точек (таблицей). Эта таблица может быть результатом расчетов, либо экспериментальными точками.

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Значения аргумента x_i называются узлами. (В общем случае эти узлы не являются равноотстоящими).

Требуется найти приближенные значения функции *f(x)* в любой произвольной точке отрезка $[x_0;x_n]$ при помощи функции *F(x)*.

$$F(x) \approx f(x) \quad x \in [x_0; x_n]$$

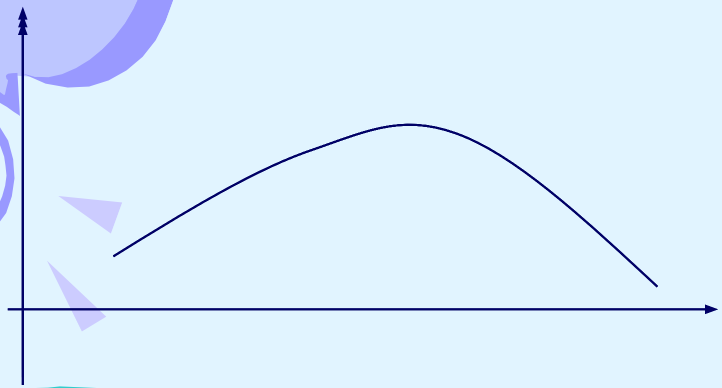
Приближение (замена) функции *f(x)* заданной таблично другой функцией *F(x)*, заданной аналитически, называется аппроксимацией.

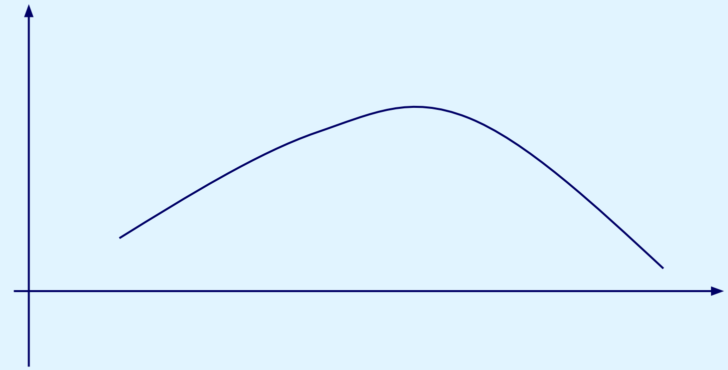
Чем проще аппроксимирующая функция, тем меньше времени требуется для решения задачи аппроксимации. Чем больше узлов, тем меньше погрешность. Для каждой конкретной аппроксимирующей функции нужно стремиться выбрать такой способ аппроксимации, который обеспечивает минимальную погрешность при минимальном количестве узлов.

Существует два принципиально различных метода аппроксимации функций:

1) Интерполяция – аппроксимирующая функция $F(x)$ точно совпадает с табличными значениями $y_0, y_1, \ldots y_n$ функции $f(x)$.

2) Метод наименьших квадратов – аппроксимирующая функция $F(x)$ может не совпадать ни с одним табличным значением $y_0, y_1, \ldots y_n$, максимально приближаясь к ним в среднем.

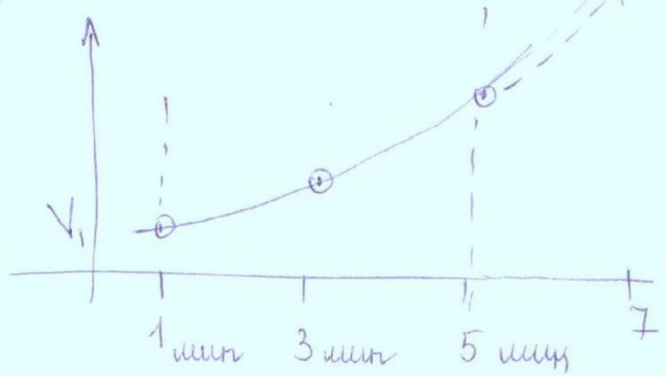




Итак, задача интерполяции - нахождение приближенных значений функции при аргументах, не совпадающих с узловыми. Если x находится внутри интервала $[x_0;x_n]$, процесс нахождения приближенного значения называется интерполяцией. Если x находится вне интервала – экстраполяцией.

Пример. В медиц. лаборатории рассматривается процесс размножения бактерий. Сняты показания эксперимента

t	1 мин	3 мин	5 м
V	2,27	20,1	148



В рез-те интерполирования подобрана функция $f(x) = e^x$. Можем вычислить $f(7) = 1097$

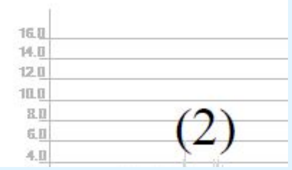
Здесь мы провели экстраполяцию.

2. 2. 2. Линейная интерполяция

При линейной интерполяции табличные значения функции в смежных узловых точках соединяются отрезками прямых, и функция $f(x)$ приближается ломаной с вершинами в данных точках. Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Это наиболее простой и достаточно распространенный способ интерполяции. Если значение x выходит за пределы интервала $[x_0; x_n]$, то осуществляется линейная экстраполяция по отрезкам прямых, примыкающим к конечным точкам. При линейной интерполяции интерполирующая функция имеет изломы в узлах интерполяции и разрывы значений производных. Погрешность интерполяции определяется расстояниями между узлами интерполяции.

В системе *MathCAD* линейная интерполяция реализуется с помощью встроенной функции

$$linterp(VX, VY, x) \qquad (2)$$



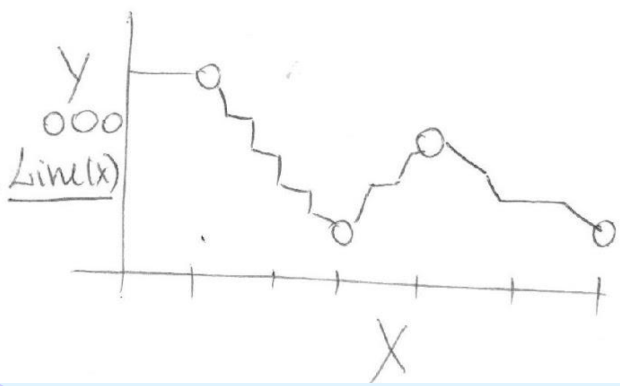
Аргументами являются два вектора VX, VY, содержащие исходные данные и независимая переменная x.

Пример

$i := 0..3$ $\qquad$ $x := 1, 1.1..6$

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$$Line(x) := linterp(X, Y, x)$$



Погрешность интерполяции определяется расстоянием между узлами интерполяции. Обусловлена погрешность тем, что график имеет изломы в узлах.

Изломы интерполяции можно устранить, если в качестве интерполирующей использовать такую функцию, график которой представляет собой плавную кривую, например, полином, проходящий через заданные в таблице точки.

Пусть значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$, приведенные в табл.1, получены с достаточно малой погрешностью и могут считаться точными для решаемой задачи. Тогда целесообразно потребовать, чтобы приближающая функция $F(x)$ проходила точно через точки с координатами x_i, y_i $(i = 0,1,\ldots,n)$, т.е. значения приближающей функции $F(x)$ точно совпадали с табличными значениями данной функции $f(x)$

$$
\begin{aligned}
&F(x_0) = f(x_0) = y_0;\\
&F(x_1) = f(x_1) = y_1;\\
&\qquad \cdots\cdots \qquad\qquad (1)\\
&F(x_n) = f(x_n) = y_n;
\end{aligned}
$$

2. 2. 3. Интерполяция полиномом Лагранжа

Погрешность линейной интерполяции обусловлена тем, что график интерполирующей функции имеет изломы в узлах интерполяции. Эти изломы можно устранить, если в качестве интерполирующей использовать такую функцию, график которой представляет собой плавную кривую (например, полином), проходящий точно через заданные в табл.1 точки. Существует много разновидностей полиномов, для которых выполнены условия (1). Ниже будет рассмотрен полином Лагранжа. Интерполяция полиномом Лагранжа дает высокую точность, если значения функции в смежных узлах, заданные в табл.1, изменяются достаточно медленно.

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, для которого выполнены условия (1), следующим образом:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \ldots + l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \quad , \qquad (3)$$

где $l_i(x)$ – полином

Потребуем, чтобы в узловых точках $x = x_j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$ – номер узла),

$$l_i(x_j) = \begin{cases} y_i, & \text{если} \quad j = i \\ 0, & \text{если} \quad j \neq i. \end{cases} \qquad (4)$$

Полином $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = C_i (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) \quad . \qquad (5)$$

В полиноме (5) каждый из n сомножителей в скобках является разностью изменяющегося непрерывно аргумента x и дискретного значения x_j узла с номером j. Причем номер узла j принимает значения сначала от 0 до i – 1, затем от i + 1 до n. Сомножитель $x - x_i$ отсутствует. За счет этого $l_i(x) =$ 0 во всех узлах, кроме узла, номер которого j совпадает с номером полинома i. Таким образом, обеспечивается выполнение соотношения (4) при $j \neq i$.

Для того чтобы соотношение (4) выполнялось и при $j = i$, коэффициент C_i для полинома (5) найдем из следующего условия:

$$l_i(x_i) = y_i,$$

откуда

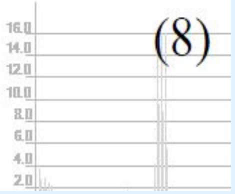
$$C_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \qquad (6)$$

Подставляя выражение (6) в полином (5), получаем

$$l_i(x) = y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \qquad (7)$$

Перепишем соотношение (7) в более компактном виде:

$$l_i(x) = y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \qquad (8)$$



пример

x	1	2	3
y	1	4	9

Составим инт. полином Лагранжа (т.е. выведем аналитическую зависимость $y(x)$).

$$L_n(x) = 1\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 9\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} =$$

$$= 1\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + 3\right) + 4\cdot\left(-x^2+4x-3\right) + 9\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 1\right) =$$

$$= x^2.$$

В системе mathcad полином вычисляется

$$L_k := \sum_i \prod_j \mathrm{if}\left(j=i,\ y(x_i),\ \frac{A_k - x_j}{x_i - x_j}\right).$$

Вычисление коэффициентов интерполяционного полинома *F(x)* путем решения системы уравнений

Недостатком линейной интерполяции является наличие изломов в узловых точках. Изломы будут отсутствовать, если в качестве приближающей функции $F(x)$ используется полином вида:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots + a_n x^n \qquad (3)$$

ТЕОРЕМА: Для фиксированной (заданной) интерполяционной таблицы существует единственный интерполяционный полином $F(x)$, проходящий через все ее точки x_i, y_i.

Степень полинома $F(x)$ равна числу интервалов n между узлами (на единицу меньше числа узлов).

Таблице 1 с двумя узлами x_0, x_1 соответствует полином первой степени (прямая): $F(x) = a_0 + a_1 x$.

Таблице 1 с тремя узлами x_0, x_1, x_2 соответствует полином второй степени (порабола): $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Таблице 1 с четырьмя узлами x_0, x_1, x_2, x_3, соответствует полином третьей степени: $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. И так далее.

Существует множество способов вычисления значений коэффициентов a_k полинома $F(x)$. Мы рассмотрим два способа.

3.1. Вычисление коэффициентов интерполяционного полинома *F(x)* путем решения системы уравнений

В соответствии с соотношениями (1) для каждой точки x_i, y_i таблицы 1 можно записать следующее уравнение:

$$F(x_i) = y_i .$$

Получится система из $n + 1$ уравнения, решив которую можно найти $n + 1$ значение неизвестных коэффициентов a_i интерполяционного полинома $F(x)$. На основании сформулированной выше теоремы эта система уравнений будет иметь решение.

Рассмотрим пример. Пусть надо найти интерполяционный полином (т. е. коэффициенты интерполяционного полинома) для точек, заданных следующей таблицей:

Таблица 2

x_i	*1*	*3*	*4*
$f(x_i)$	*12*	*4*	*6*

$n = 2$ $\quad x_0 = 1$ $\quad x_1 = 3$ $\quad x_2 = 4$

$\quad y_0 = 12$ $\quad y_1 = 4$ $\quad y_2 = 6$

Составим следующую систему уравнений:

$$F(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 12$$
$$F(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = a_0 + a_1 3 + a_2 9 = 4$$
$$F(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = a_0 + a_1 4 + a_2 16 = 6$$

Решаем систему уравнений и находим коэффициенты a_0 a_1 a_2 интерполяционного полинома F(x)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad a := A^{-1} \cdot Y \quad a = \begin{pmatrix} 22 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_0 = 22 \quad a_1 = -12 \quad a_2 = 2$$

Построим график интерполяционного полинома F(x)

$$F(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \qquad x := 1, 1.1 .. 6$$

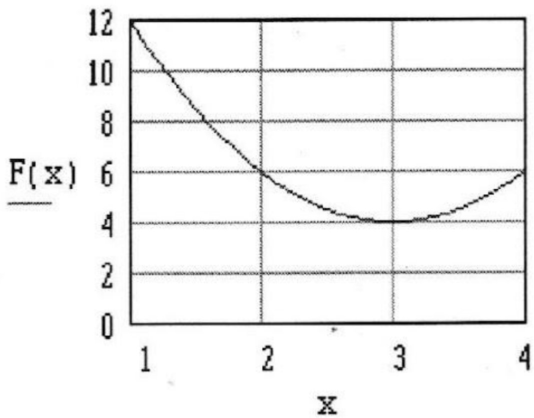


Рис. 2

Таким образом, интерполяционный полином $F(x) = 22 - 12x + 2x^2$ проходит через все три точки, заданные в табл. 2.

2. 2. 4. Интерполяция сплайнами

Полиномиальная интерполяция не всегда дает удовлетворительные результаты при аппроксимации функций. Несмотря на выполнение условий (1) в узлах, интерполирующая функция может иметь значительные отклонения между узлами. Увеличение степени интерполяционного многочлена не всегда приводит к уменьшению погрешности. Возникает так называемое явление волнистости. При этом поведение полинома в окрестности какой-либо точки определяет его поведение в целом. Полиномиальная интерполяция дает особенно большие ошибки, если в окрестности левой или правой границы интервала интерполяции находится вертикальная асимптота графика функции.

На практике для проведения гладких кривых через узловые значения функции используют гибкую упругую линейку, совмещая ее с заданными точками. Математическая теория такой аппроксимации называется теорией сплайн-функций (от английского слова *spline* – рейка, линейка). График интерполирующей функции при сплайн-интерполяции действительно напоминает гибкую линейку, закрепленную в узловых точках интерполируемой функции. Поэтому сплайн-интерполяцию выгодно применять при небольшом числе узловых точек (до 5 –7).

$$\varphi^{(\mathrm{IV})}(x) = 0$$

Рассмотрим интерполяцию кубическими сплайнами. Из теории упругости известно, что гибкая упругая линейка, совмещенная с узловыми значениями функции, проходит по линии, удовлетворяющей уравнению (11).

$$\varphi^{(\mathrm{IV})}(x) = 0$$

Если в качестве функции ϕ(*x*) выбрать полином, то в соответствии с уравнением (11) степень полинома должна быть не выше третьей. Этот полином называют кубическим сплайном, который на каждом интервале записывают в виде

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

(12) где $-a, b, c, d$ коэффициенты сплайна; i = 1,2,..., -номер интервала (номер сплайна).

В отличие от полиномиальной интерполяции, когда вся аппроксимирующая функция описывается одним полиномом, при сплайновой интерполяции на каждом интервале строится отдельный полином ϕ(x) третьей степени (12) со своими коэффициентами.

Аппроксимирующая функция $F(x)$ представляет собой последовательность сплайнов (12), «сшитых» между собой в точках, соответствующих узловым значениям аппроксимируемой функции $f(x)$.

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i на всех n элементарных отрезках необходимо получить $4n$ уравнений. Эти уравнения получаются из следующих условий "сшивания" соседних сплайнов (рис.1):

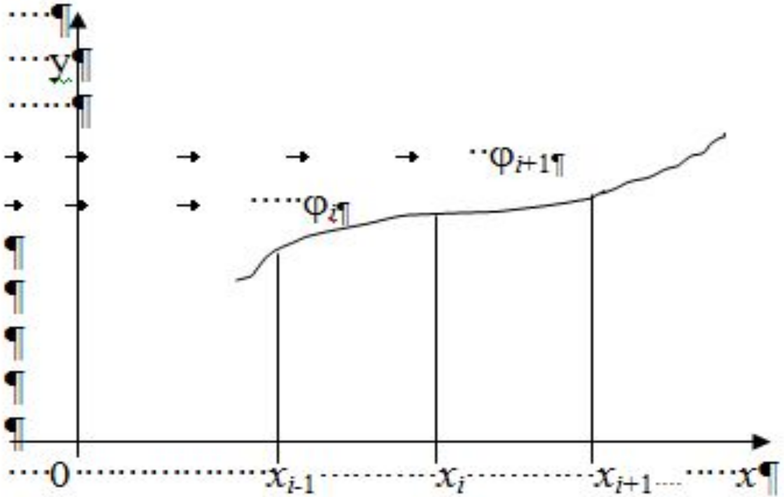


Рис. 1

1) равенство значений сплайнов $\varphi(x)$ и аппроксимируемой функции $f(x)$ в узлах - условия (1):

$$\varphi_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = y_{i-1}; \ \varphi_i(x_i) = f(x_i) = y_i; \quad (13)$$

эта система равенств содержит $2n$ уравнений;

2) непрерывность первой и второй производных от сплайнов в узлах интерполяции – условия гладкости кривой:

$$\varphi_i^{(I)}(x_i) = \varphi_{i+1}^{(I)}(x_i);$$

$$\varphi_i^{(II)}(x_i) = \varphi_{i+1}^{(II)}(x_i). \quad (14)$$

Непрерывность первой производной означает, что соседние сплайны в узловых точках имеют общую касательную. Непрерывность второй производной означает, что соседние сплайны в узловых точках имеют одинаковую кривизну. Эта система равенств содержит $2n-2$ уравнений.

3) Кроме перечисленных условий, необходимо задать условия на концах отрезка, то есть в точках x_0 и x_n. В общем случае эти условия определяются конкретной задачей.

Если за пределами интервала интерполяции экстраполирующая функция представляет собой прямую линию, то это линейная экстраполяция. Следовательно, исходя из условий непрерывности второй производной, запишем еще два равенства:

$$\varphi_0''(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_n''(x_n) = 0 \quad (15)$$

Если за пределами интервала интерполяции экстраполирующая функция представляет собой кубический или квадратический полином, то это кубическая или пораболическая экстраполяция.

Равенства (13), (14), (15) представляют собой полную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов сплайнов a_i, b_i, c_i, d_i. Ее можно решить различными методами (например, методом прогонки).

В системе *MathCAD* сплайн-интерполяция проводится в две стадии. На первой стадии с помощью одной из функций *lspline* , *pspline* или *cspline* вычисляются значения вторых производных в узлах. Эти значения являются элементами вектора вторых производных *VS*. На второй стадии с помощью функции *interp* находится значение интерполирующей функции $F(x)$ для заданного аргумента x .

Рассмотрим формат и уточним назначение этих функций:

cspline(*VX,VY*) – вычисляет вектор *VS* при сплайн-интерполяции
и кубической экстраполяции;

pspline(*VX,VY*) – вычисляет вектор *VS* при сплайн-интерполяции
и параболической экстраполяции;

lspline(*VX,VY*) – вычисляет вектор *VS* при сплайн-интерполяции
и линейной экстраполяции;

interp(*VS,VX,VY,x*) – вычисляет значение интерполирующей функции $F(x)$ для заданного x при сплайн-интерполяции.