Начертательная геометрия

Автор:Разумнова Е.А.

Геометрические тела с вырезом

Для построения проекций линий выреза строят проекции ряда *характерных точек*, лежащих на них, что достигается проведением вспомогательных линий или секущих плоскостей.

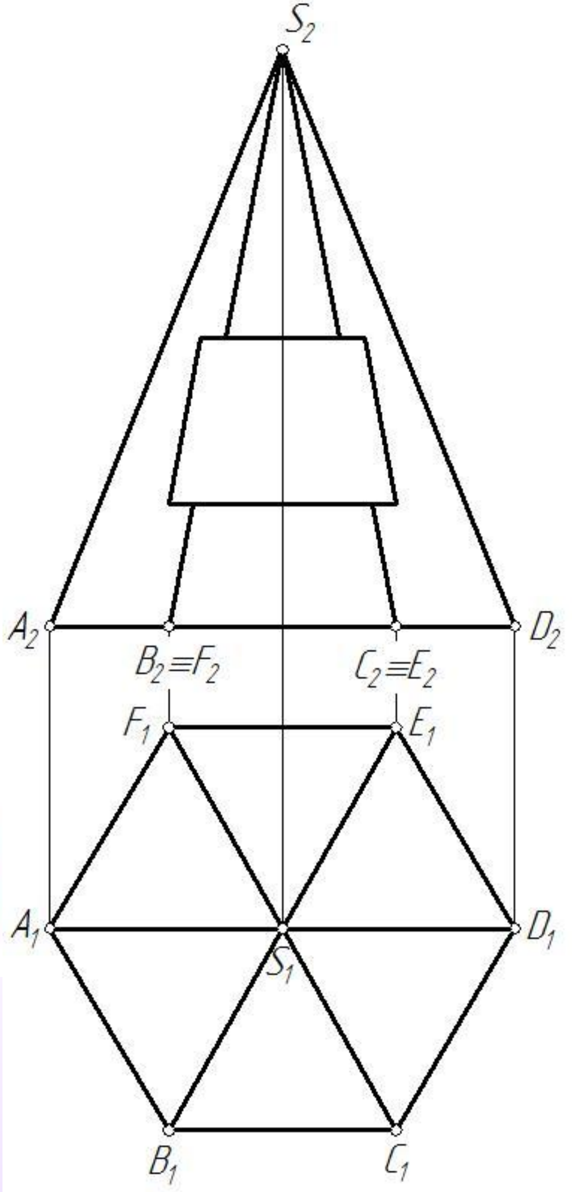
Найденные характерные точки соединяют прямыми или кривыми линиями (в зависимости от характера заданного геометрического тела) и обводят их *с учетом видимости* на каждой проекции.

Общий план решения задач на построение геометрического тела с вырезом:

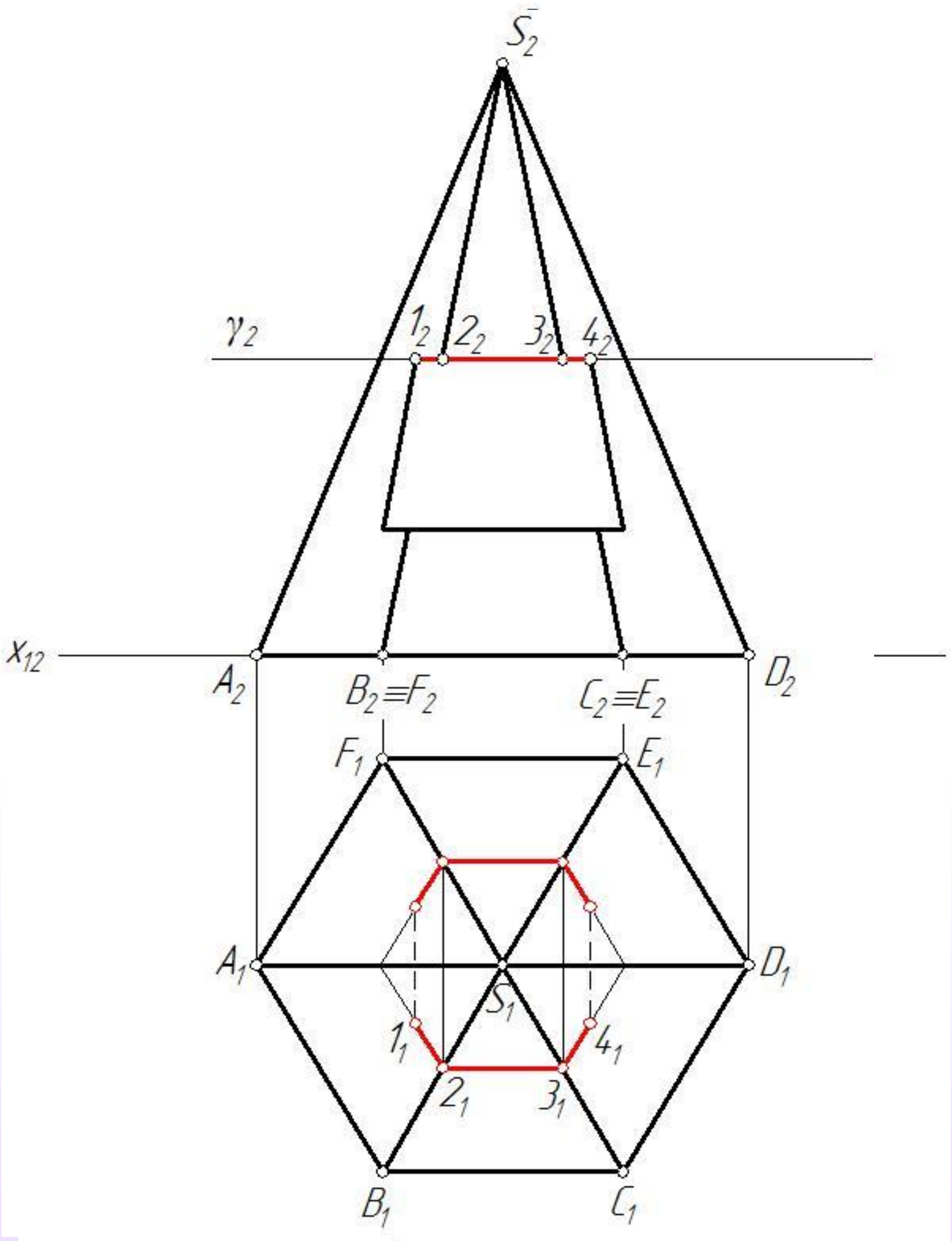
1. Определить вид линий пересечения плоскости выреза с поверхностью геометрического тела.
2. Построить проекции линий пересечения на горизонтальной проекции.
3. Построить профильную проекцию геометрического тела и профильную проекцию линий пересечения.

1. Устанавливаем вид линий пересечения плоскостей выреза с гранями и ребрами пирамиды:

плоскость пересекает все грани пирамиды по прямым линиям

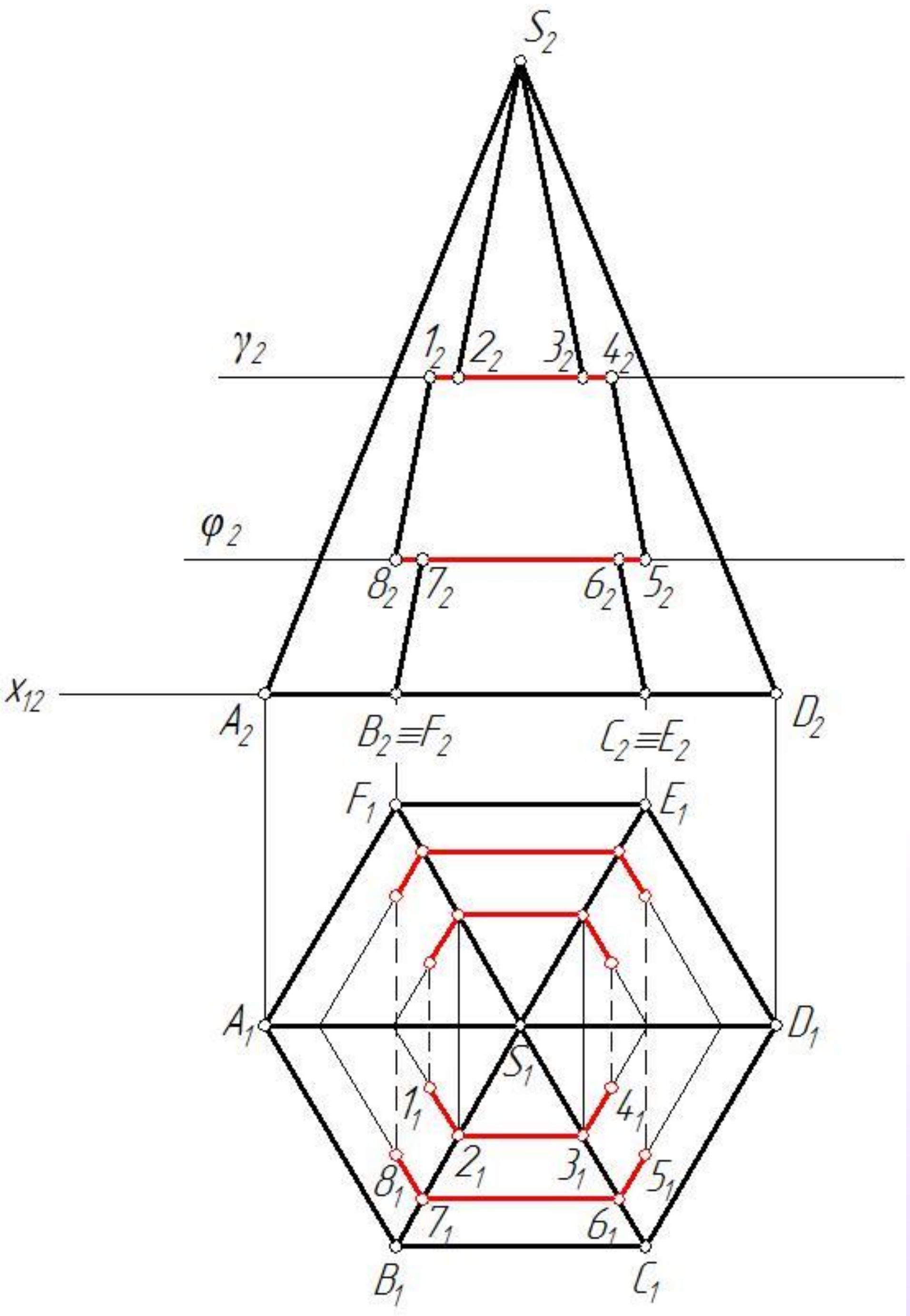


Заданное геометрическое тело - шестигранная пирамида SABCDEF с вырезом

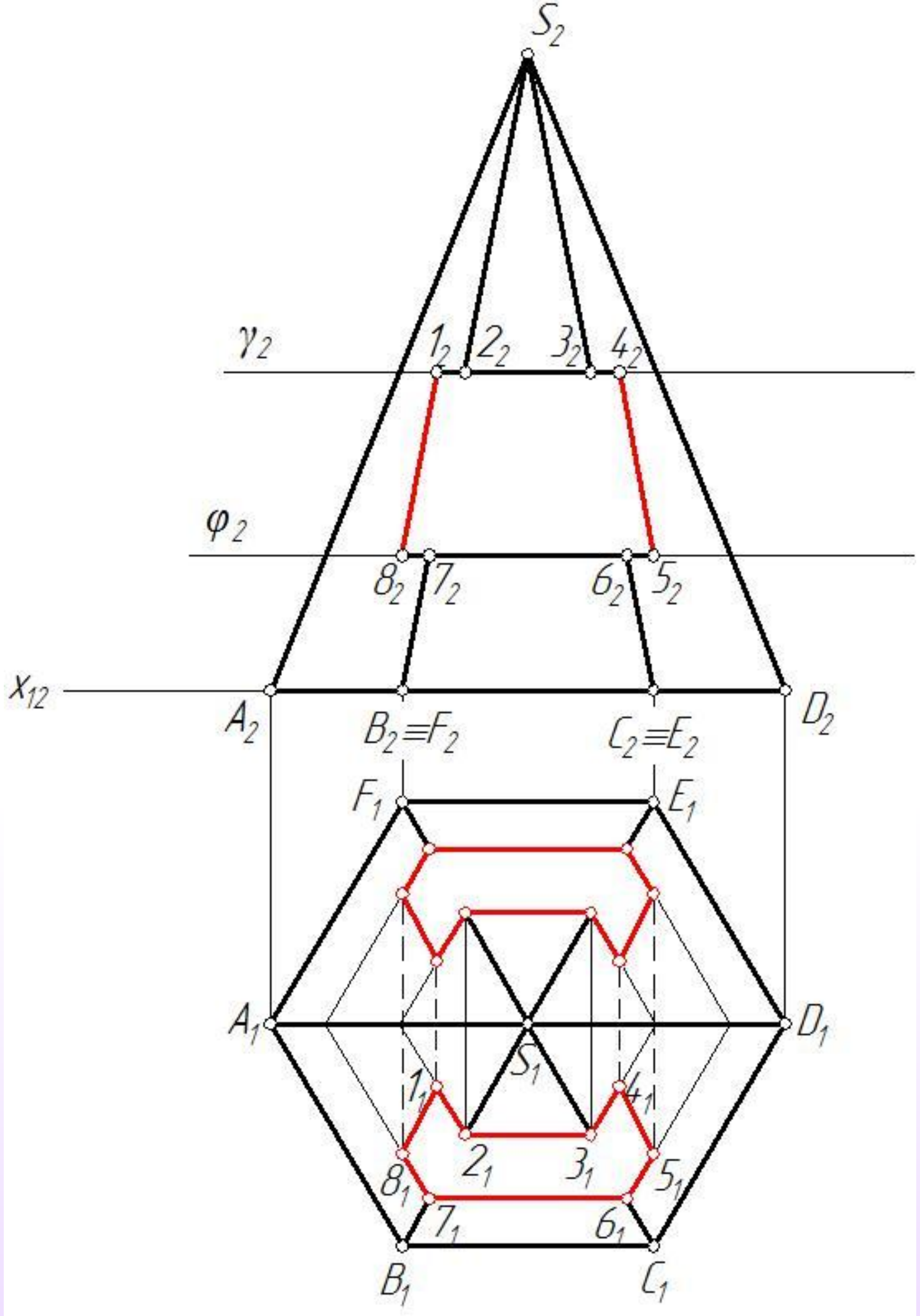


Отмечаем фронтальные проекции характерных точек выреза. Обязательно отмечаем точки на ребрах пирамиды

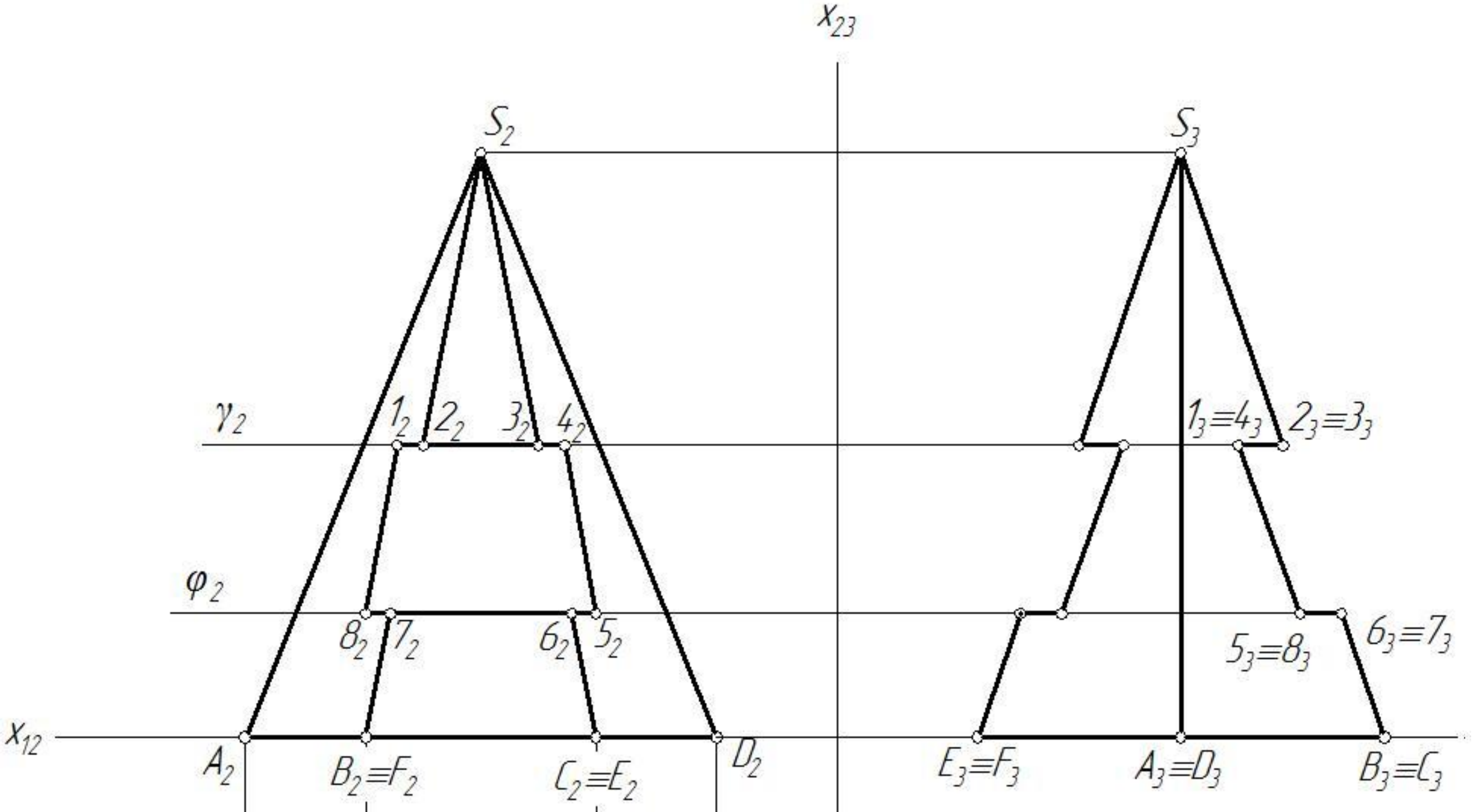
1. Проводим вспомогательных секущую плоскость **γ** для построения проекций *характерных точек 1,2,3,4*, лежащих на ней.
2. Плоскость $\gamma || \Pi_1$ => в сечении получается фигура, подобная основанию.
3. Соединяем точки последовательно.

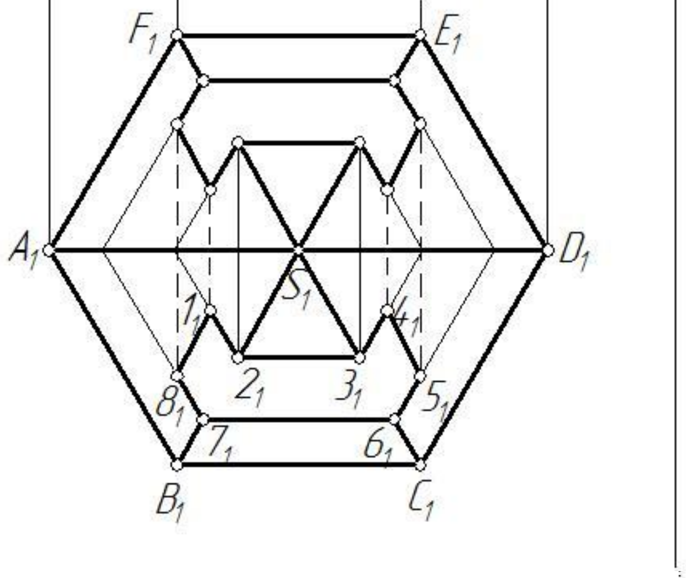


1. Проводим вспомогательных секущую плоскость **φ** для построения проекций *характерных точек 5,6,7,8*, лежащих на ней.
2. Плоскость **φ||П$_1$** => в сечении получается фигура, подобная основанию.
3. Соединяем точки последовательно.



1. Соединяем последовательно точки выреза.
2. Удаляем вырезанные участки ребер.





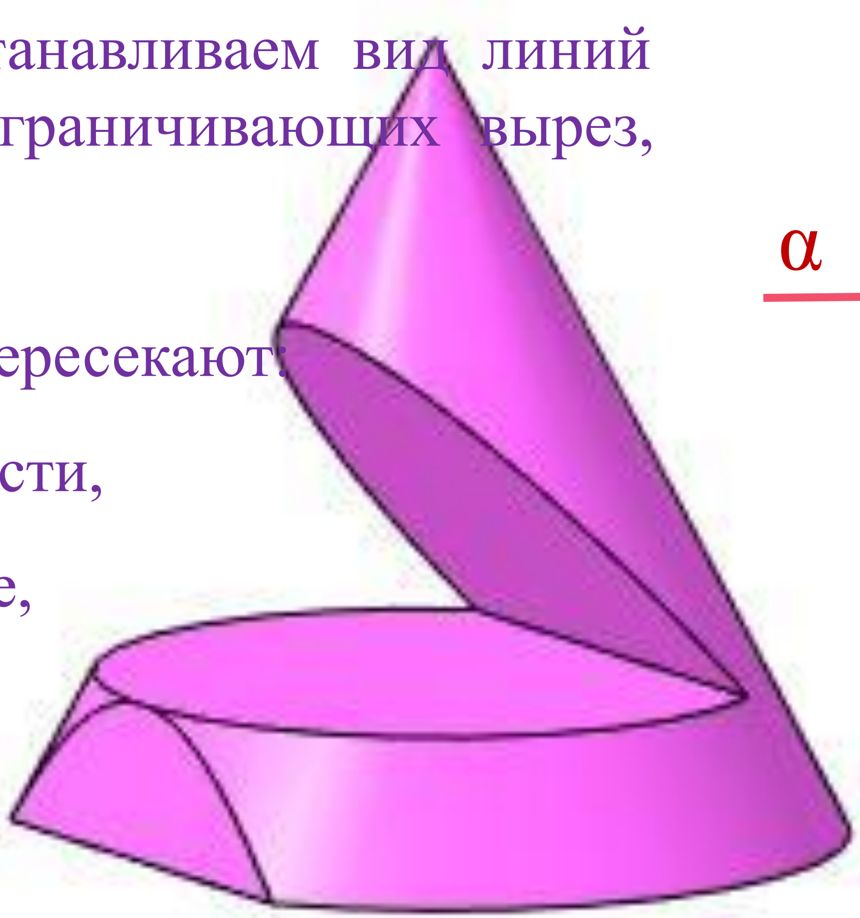
1. Строим профильную проекцию пирамиды и профильные проекции точек выреза.

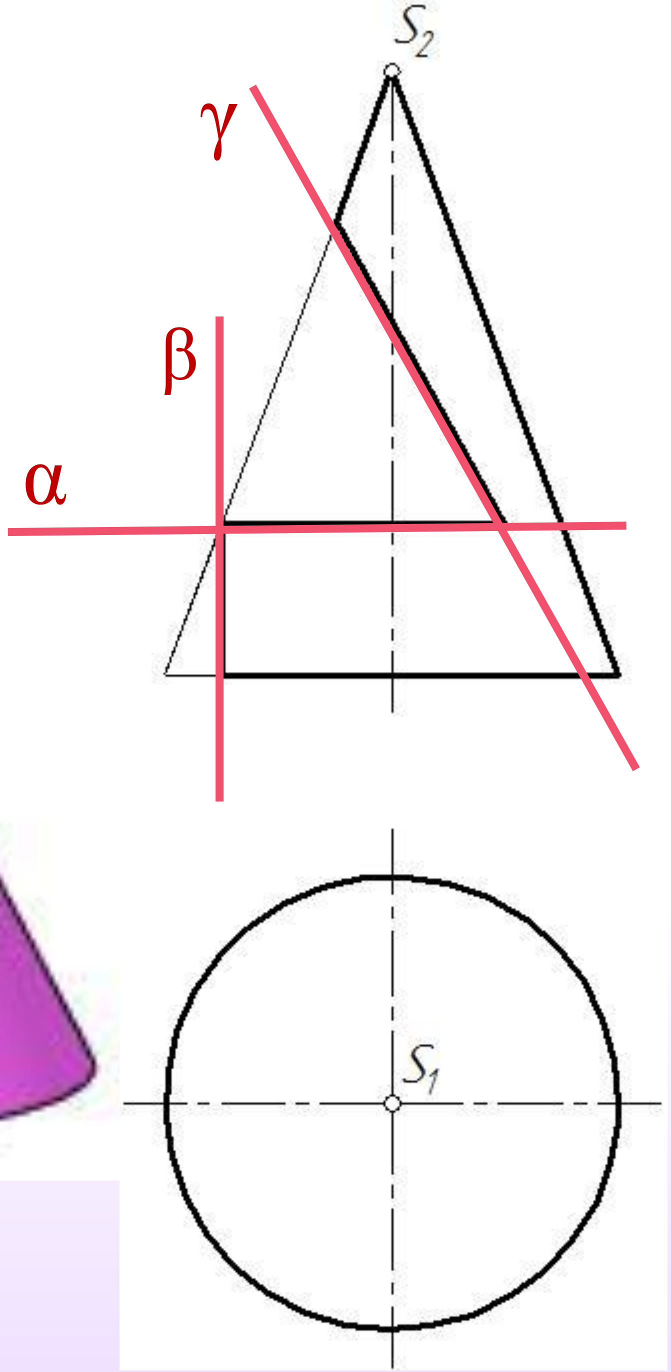
2. Удаляем вырезанные ребра

По исходному чертежу устанавливаем вид линий пересечения плоскостей , ограничивающих вырез, с конусом.

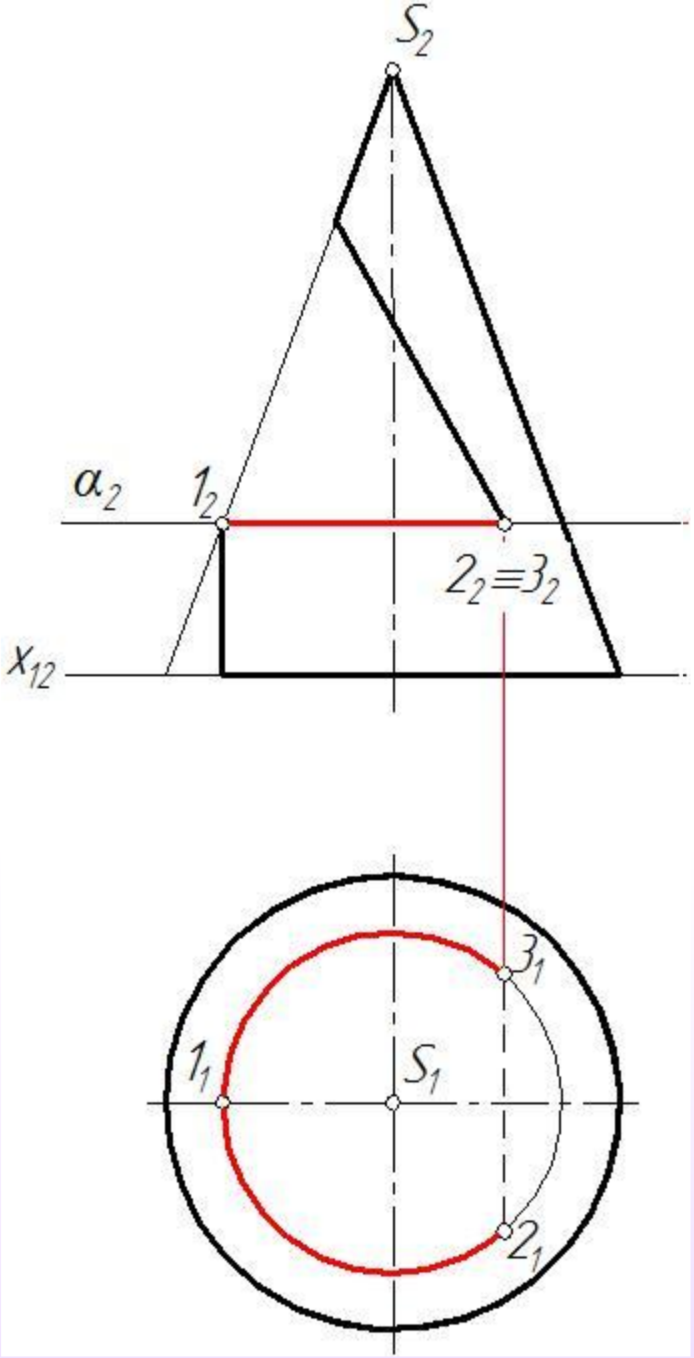
Коническую поверхность пересекают:

- плоскость α- по окружности,
- плоскость β по гиперболе,
- плоскость γ- по эллипсу.



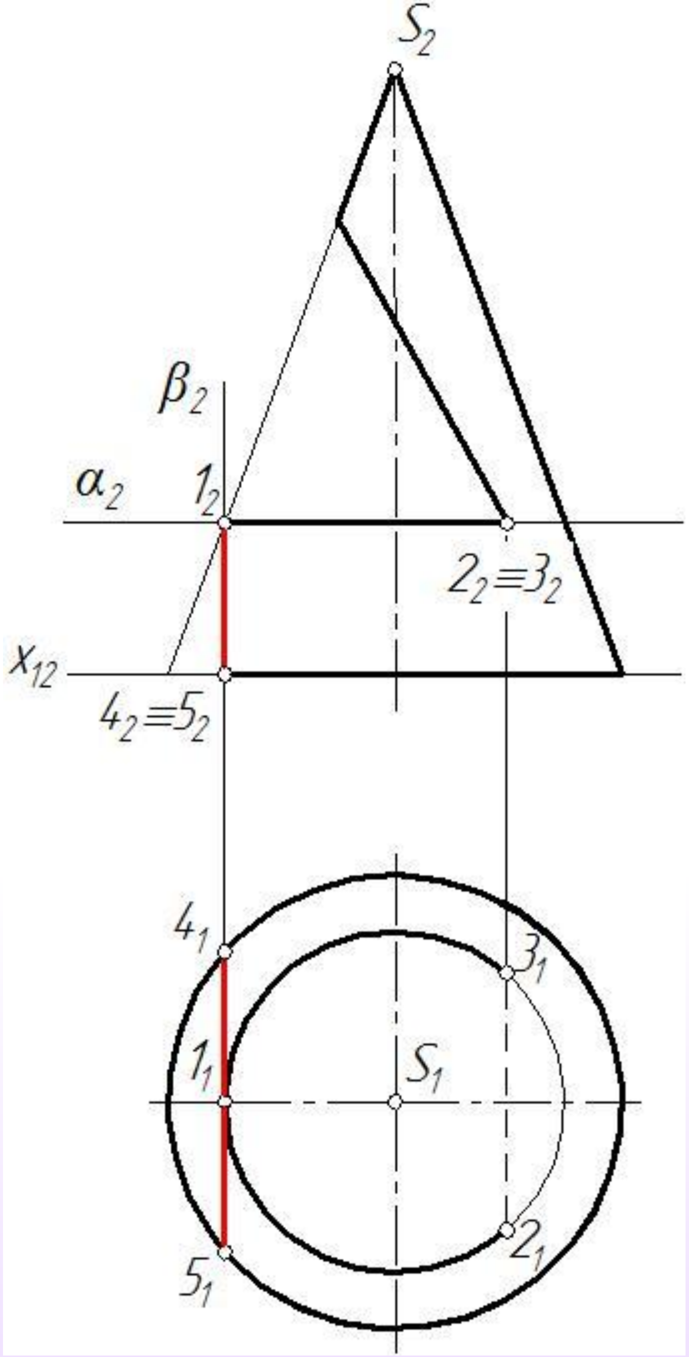


Заданное геометрическое тело – конус с вырезом



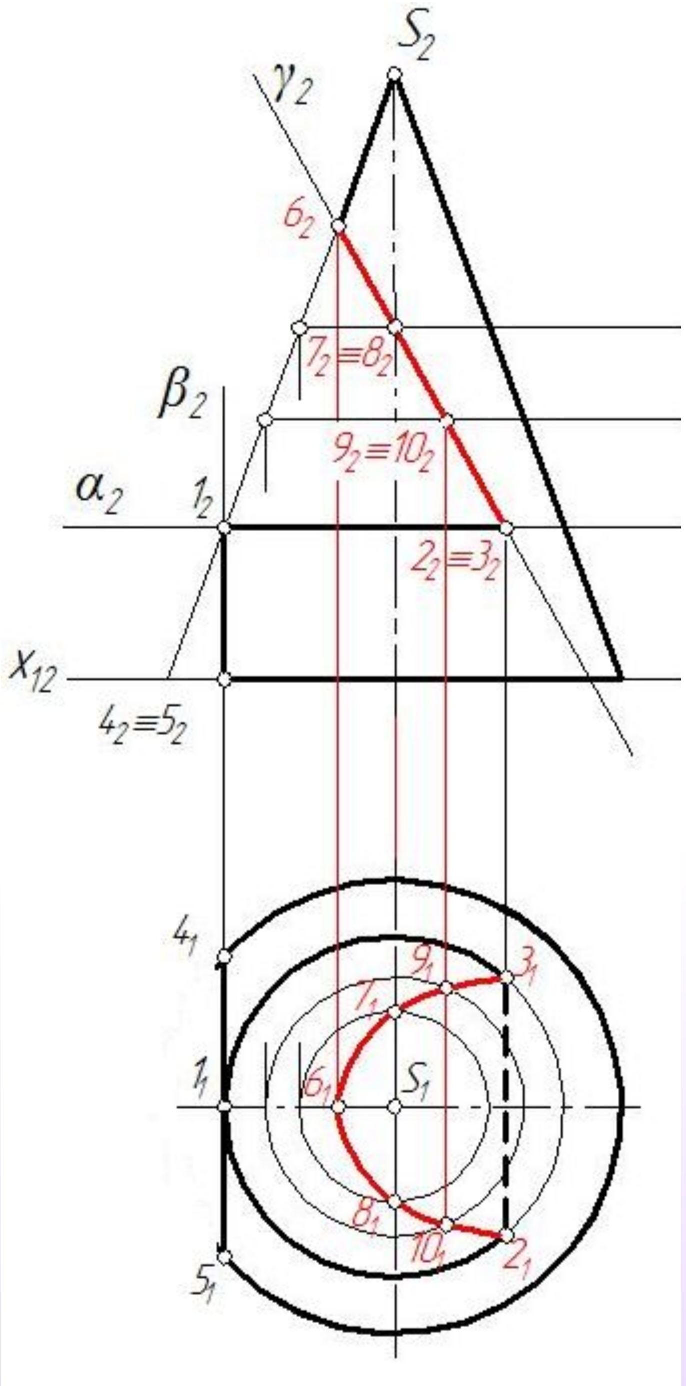
Коническую поверхность плоскость α пересекает по окружности,

Часть линии выреза – дуга



Коническую поверхность плоскость β пересекает по гиперболе, горизонтальная проекция которой- прямая, а профильная проекция –гипербола.

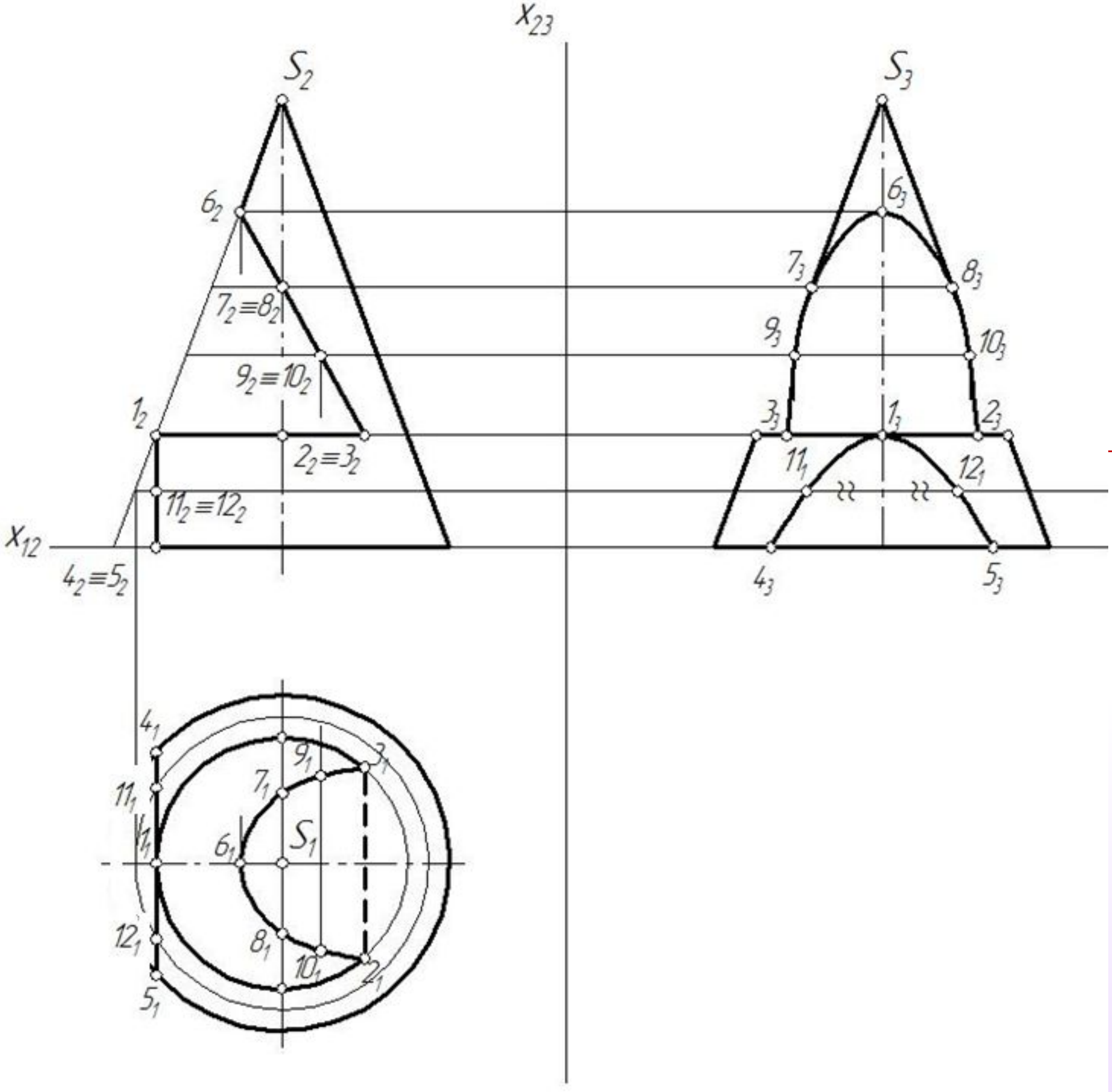
$$\beta \perp \Pi_3$$



Коническую поверхность плоскость γ- пересекает по эллипсу.

Для построения кривой линии строим

- Опорные точки-6,7,8
- Промежуточные точки для уточнения линии-9,10



Строим профильную проекцию конуса и профильные проекции точек выреза. Для простроения профильной проекции гиперболы отмечечаем точки 11 и 12. Находим горизонтальные и профильные проекции этих точек.

Пересечение поверхности плоскостью общего положения

Линия пересечения поверхности с плоскостью является *линией*, одновременно принадлежащей поверхности и секущей плоскости. Поэтому необходимо построить точки и линии, которые *одновременно принадлежат* поверхности и плоскости.

***Замкнутая фигура*, образованная линией пересечения поверхности тела секущей плоскостью, которая называется *сечением*.**

Линия пересечения **строится с использованием метода** ***секущих плоскостей – посредников*** **или способом** ***дополнительного ортогонального проецирования(перемена плоскостей проекций*)**

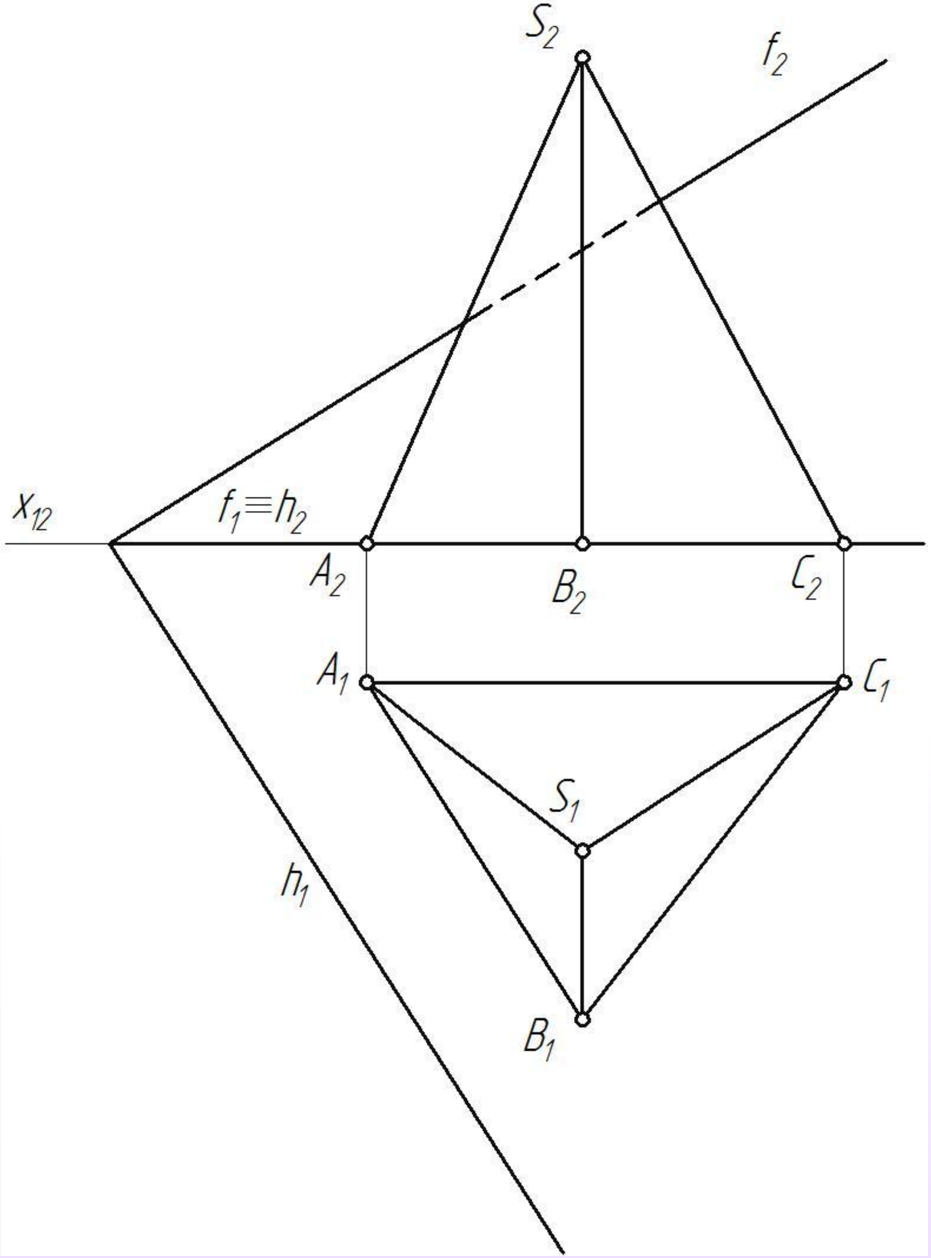
Способ ***дополнительного ортогонального проецирования(перемена плоскостей проекций*)**

используется для преобразования плоскости общего положения в плоскость частного положения. В некоторых случаях это облегчает решение задачи.

Пересечение многогранников плоскостью общего положения

При сечении многогранника плоскостью образуется ломанная линия.

Проекциями сечения многогранников, в общем случаи являются *многоугольники*, вершины которых принадлежат *ребрам*, а стороны – *граням* многогранника.

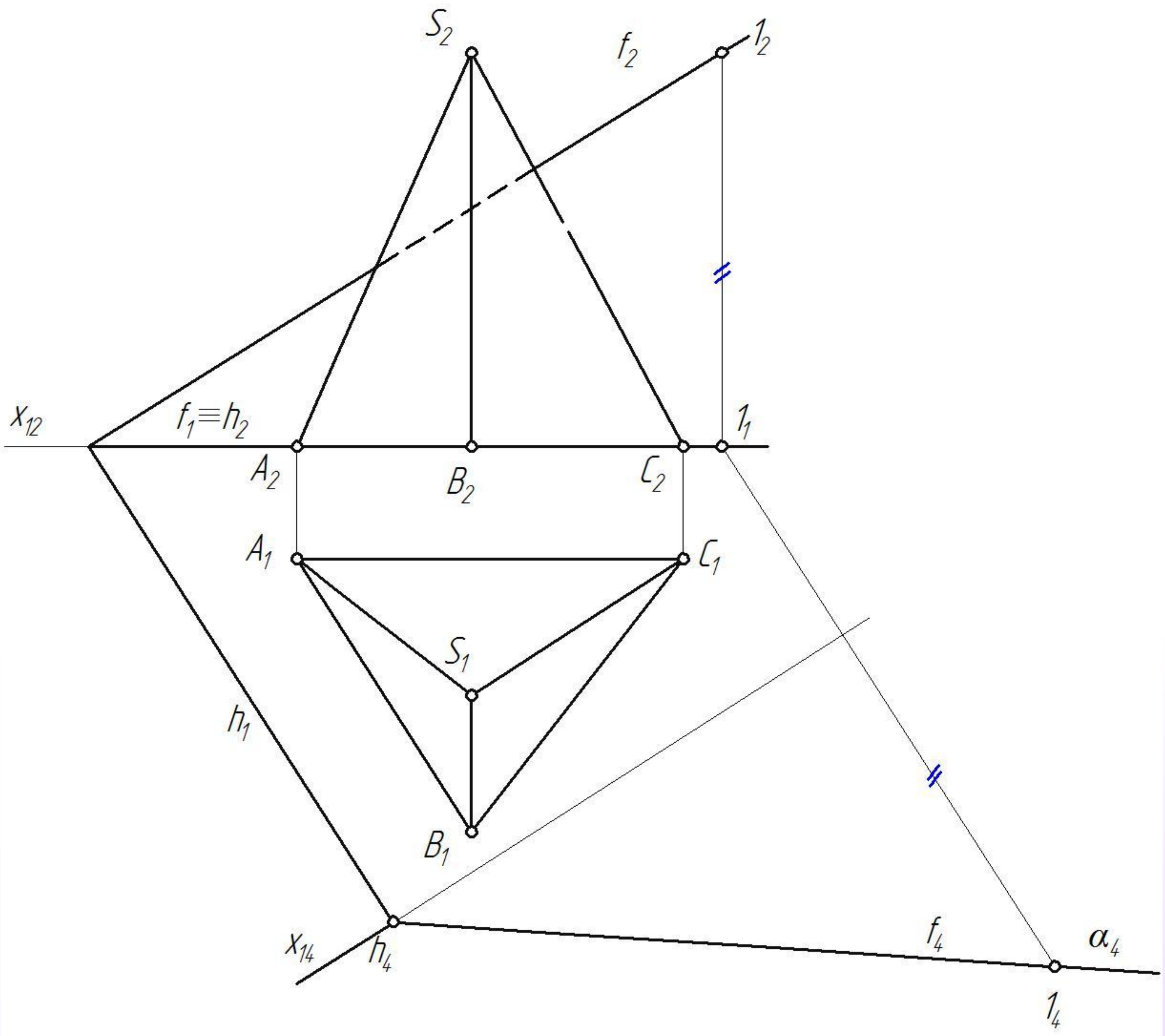


<u>Задача 1</u>

Пирамида Ф{SABC} и плоскость α (h ∩ f)

m=Ф∩α; m{M,N,K} - ?

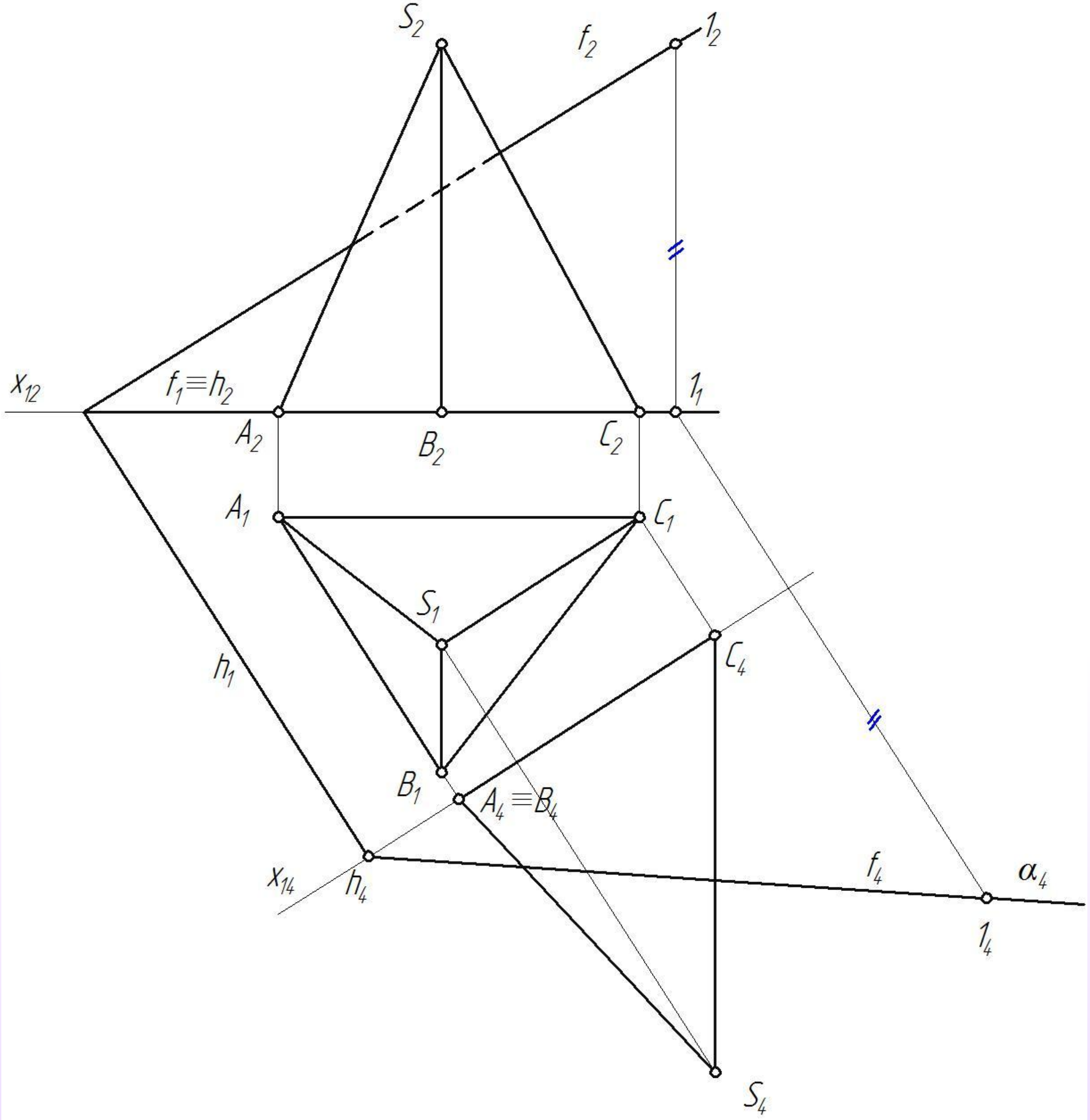
Ребро SB – профильная прямая.



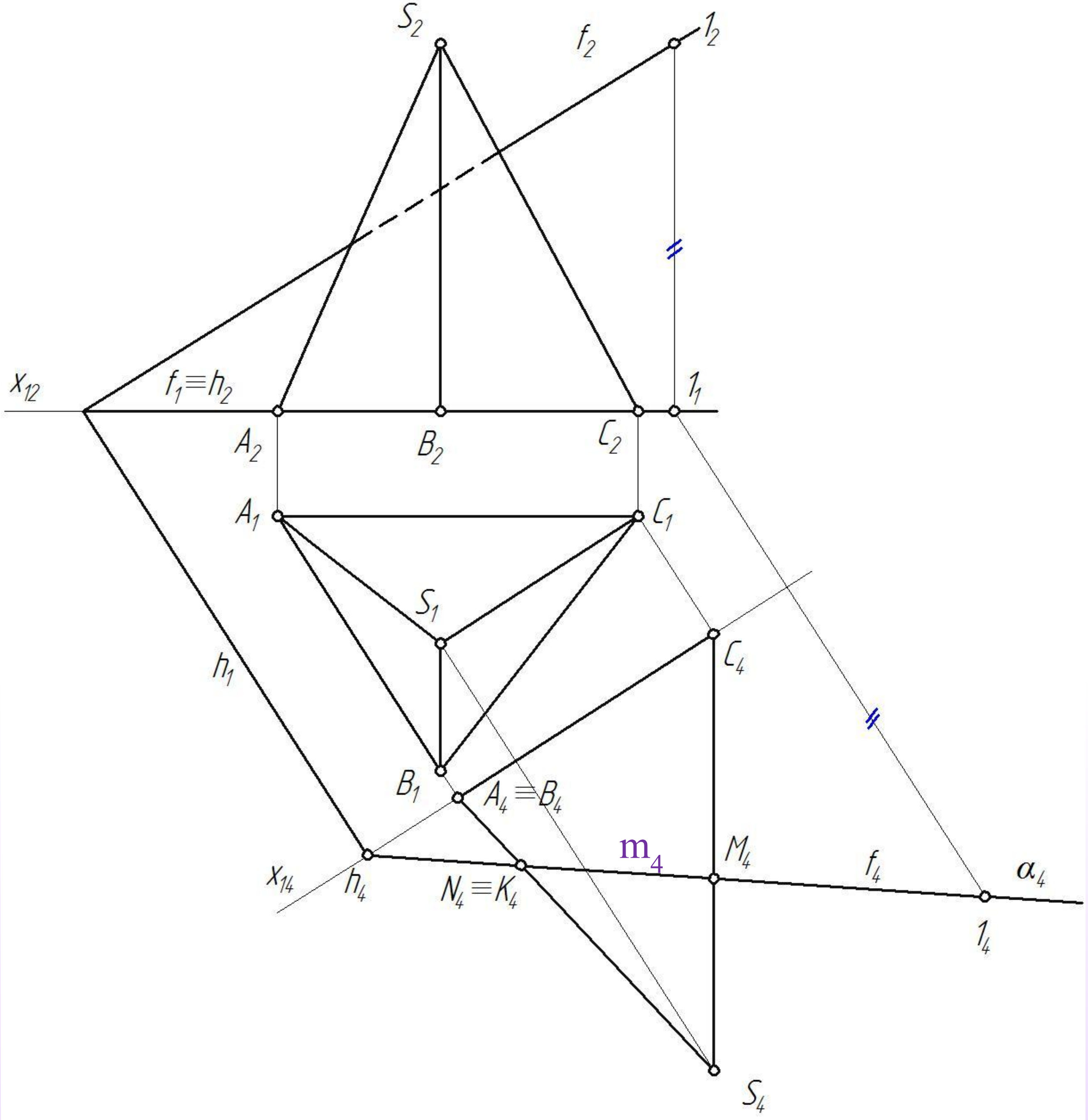
Введем плоскость $П_4$

$$\begin{cases} П_4 \perp П_1 \\ П_4 \perp \alpha \end{cases}$$

Плоскость α преобразуем из плоскости общего положения в частное



Построим пирамиду Ф{SABC} на плоскости $П_4$.



$$m = \Phi \cap \alpha;$$

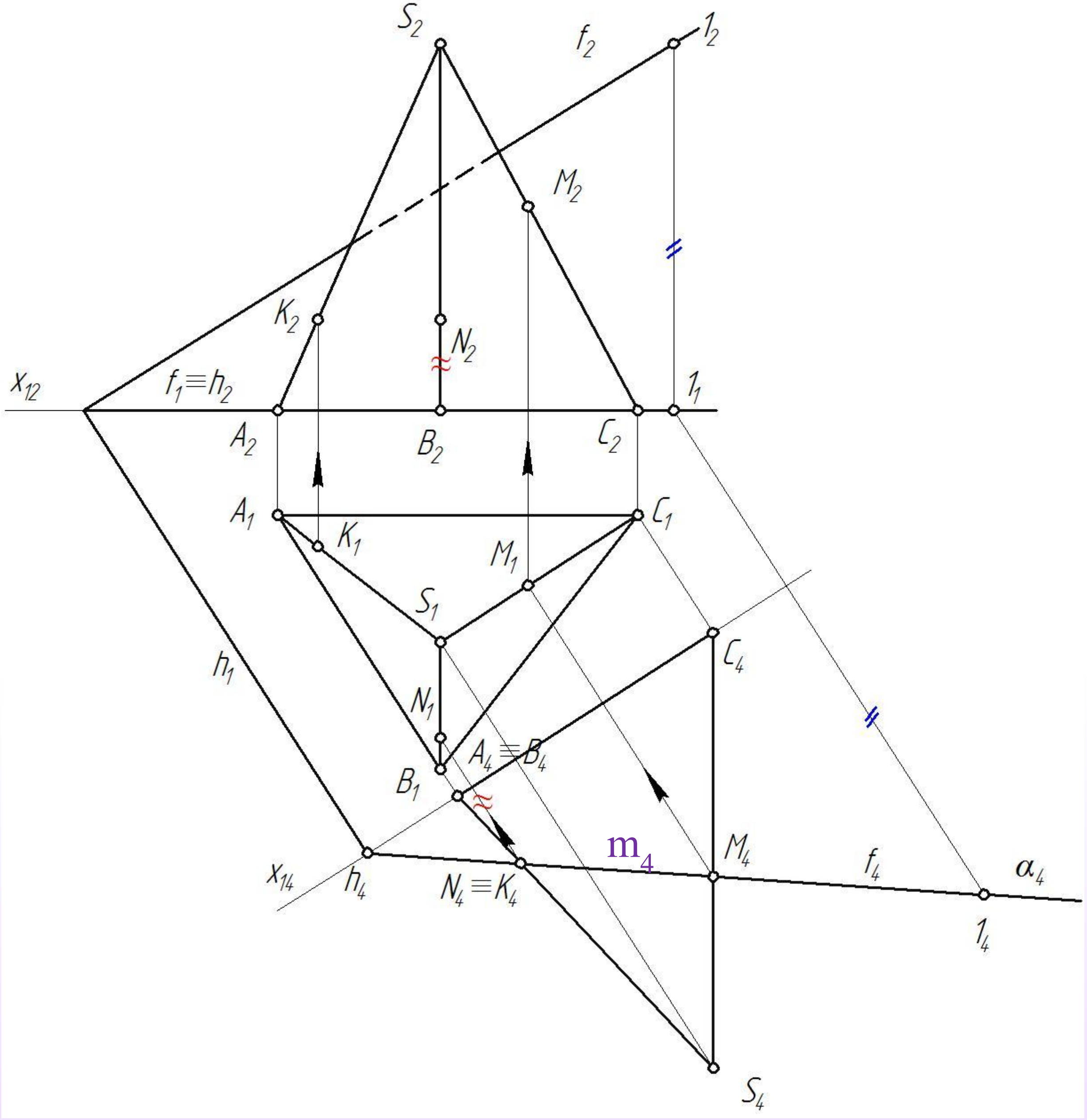
$$\alpha \perp \Pi_4 \Rightarrow \alpha_4 \equiv m_4$$

$$m\{M, N, K\}$$

$$K = AS \cap \alpha;$$

$$M = CS \cap \alpha;$$

$$N = BS \cap \alpha$$

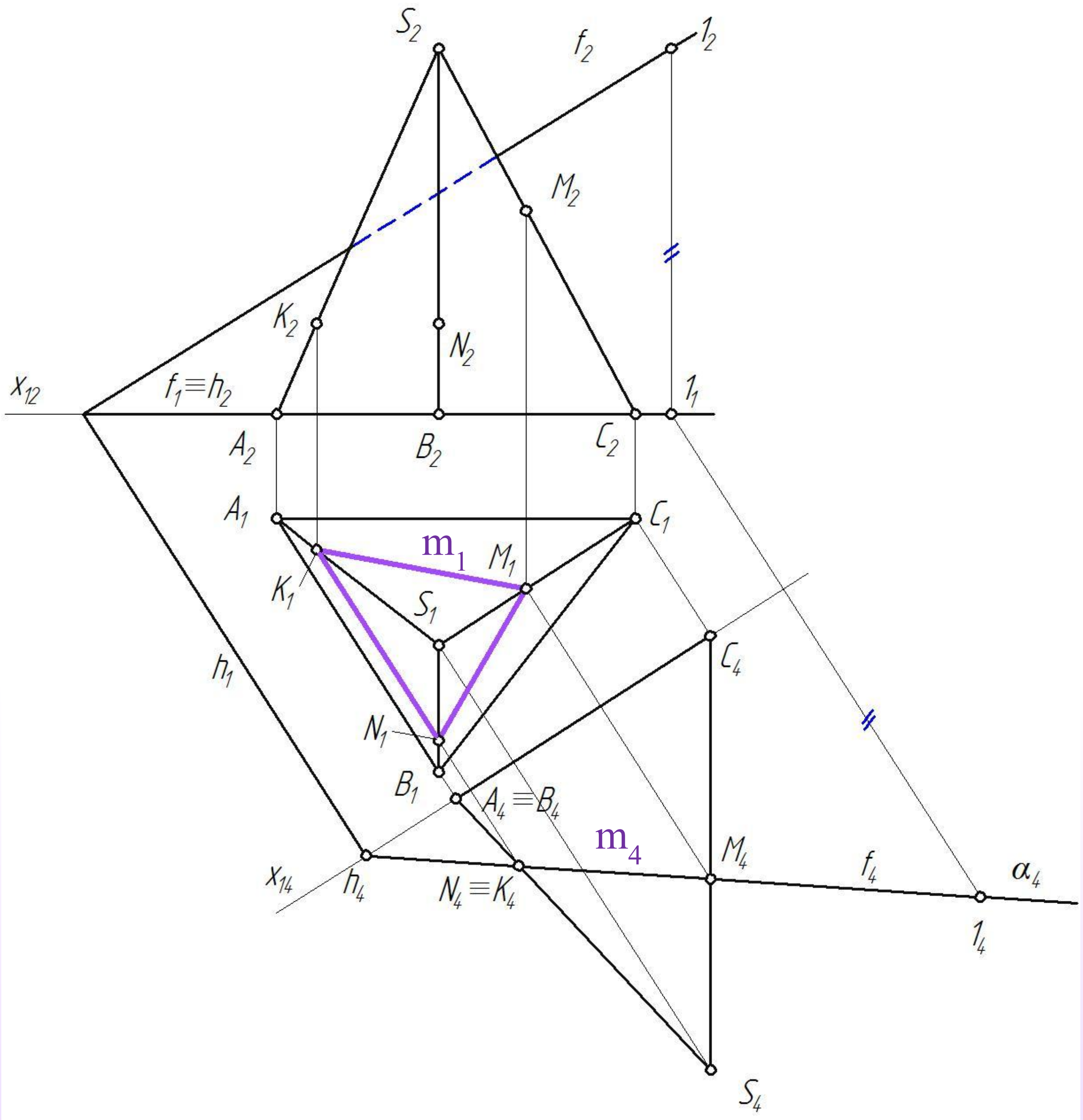


Строим горизонтальные и фронтальные проекции точек пересечения

K = *AS* ∩ α;

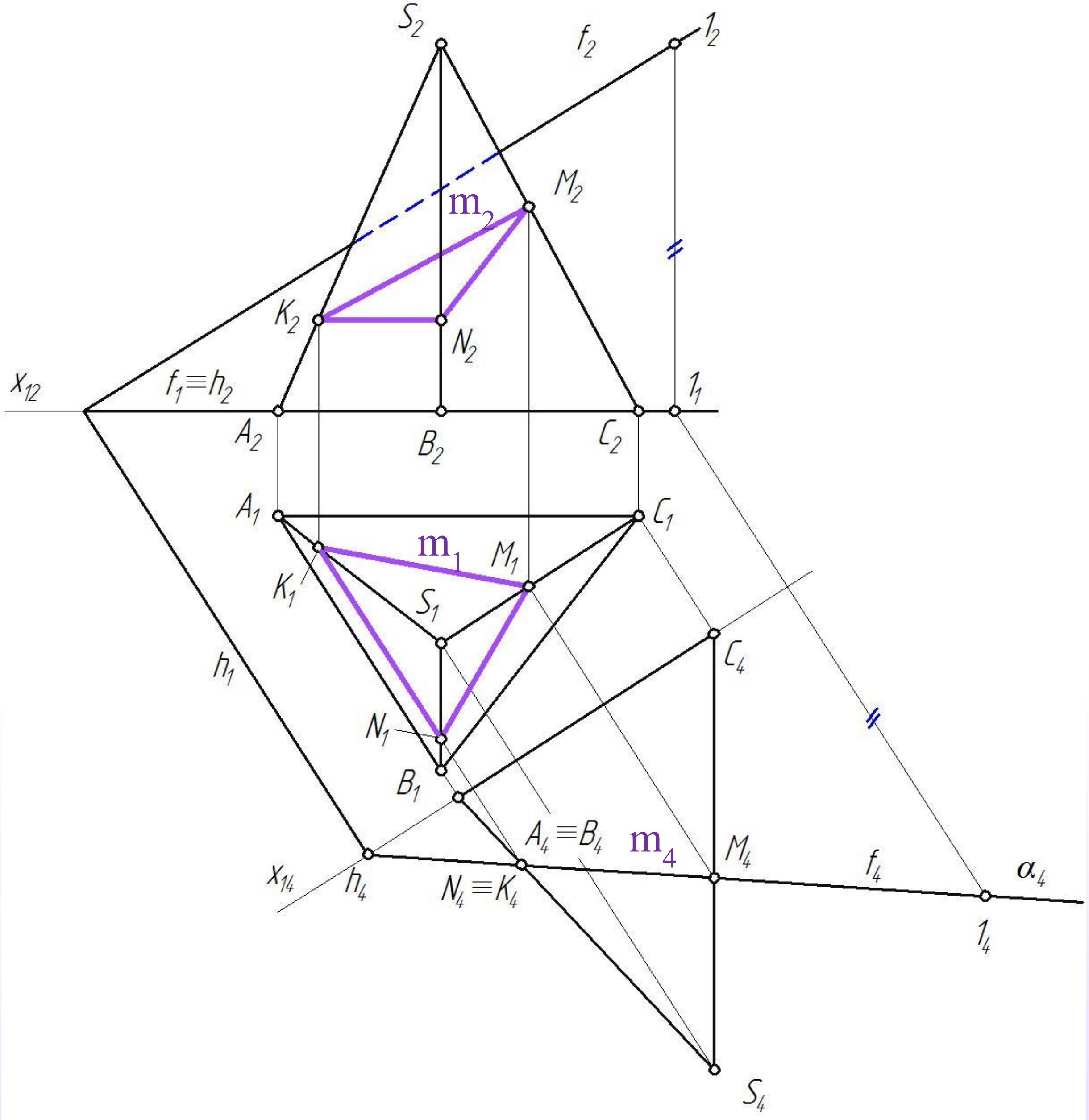
M = *CS* ∩ α;

N = *BS* ∩ α

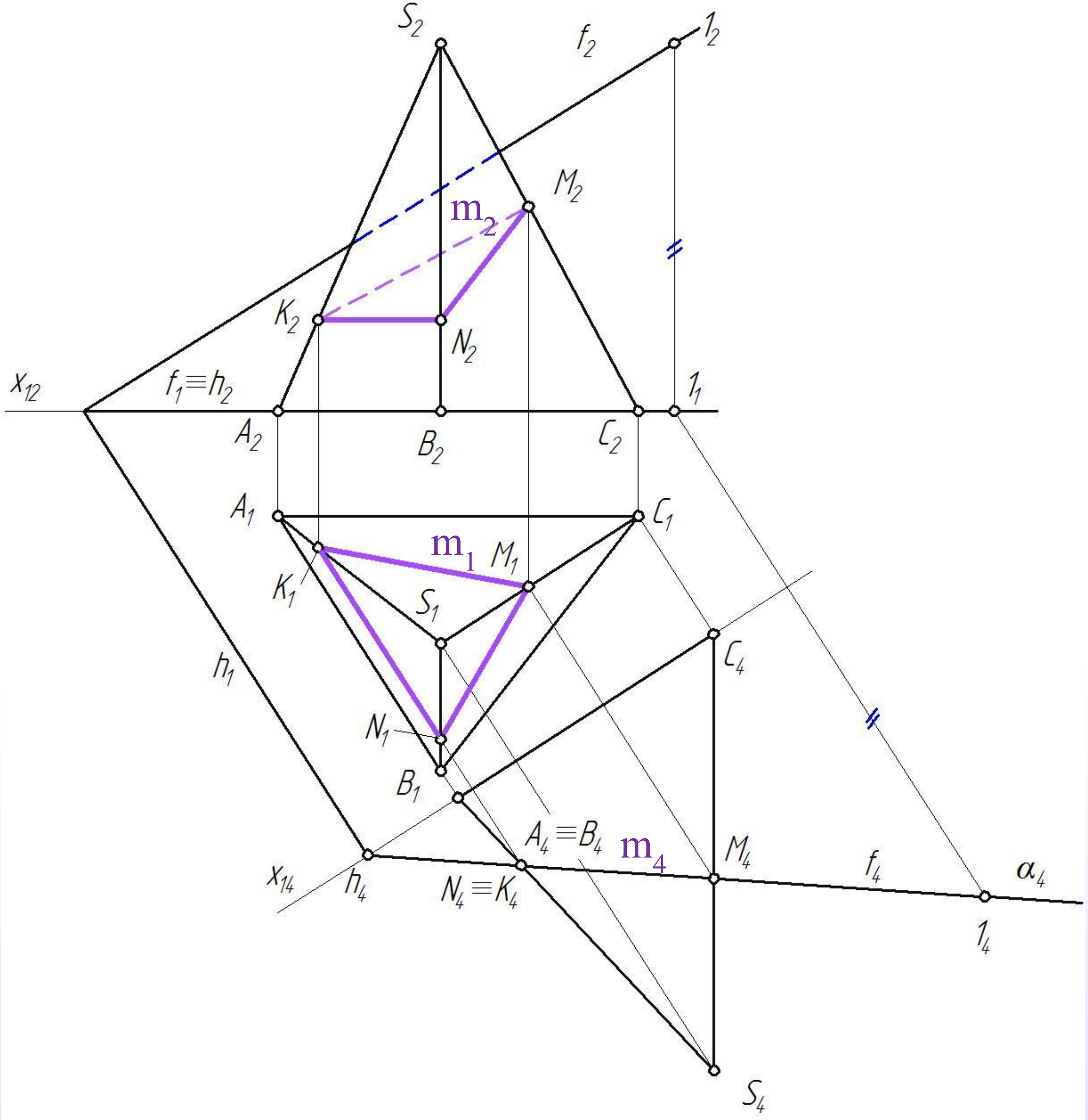


S_2
f_2
1_2
M_2
K_2
N_2
x_{12}
$f_1 \equiv h_2$
1_1
A_2
B_2
C_2
A_1
C_1
m_1
M_1
K_1
S_1
C_4
h_1
N_1
B_1
$A_4 \equiv B_4$
m_4
M_4
f_4
α_4
x_{14}
h_4
$N_4 \equiv K_4$
1_4
S_4

$m_1\{M_1, N_1, K_1\}$


S2
f2
12
M2
m2
K2
N2
x12
f1≡h2
11
A2
B2
C2
A1
C1
m1
M1
K1
S1
C4
h1
N1
B1
A4≡B4
m4
M4
f4
α4
x14
h4
N4≡K4
14
S4

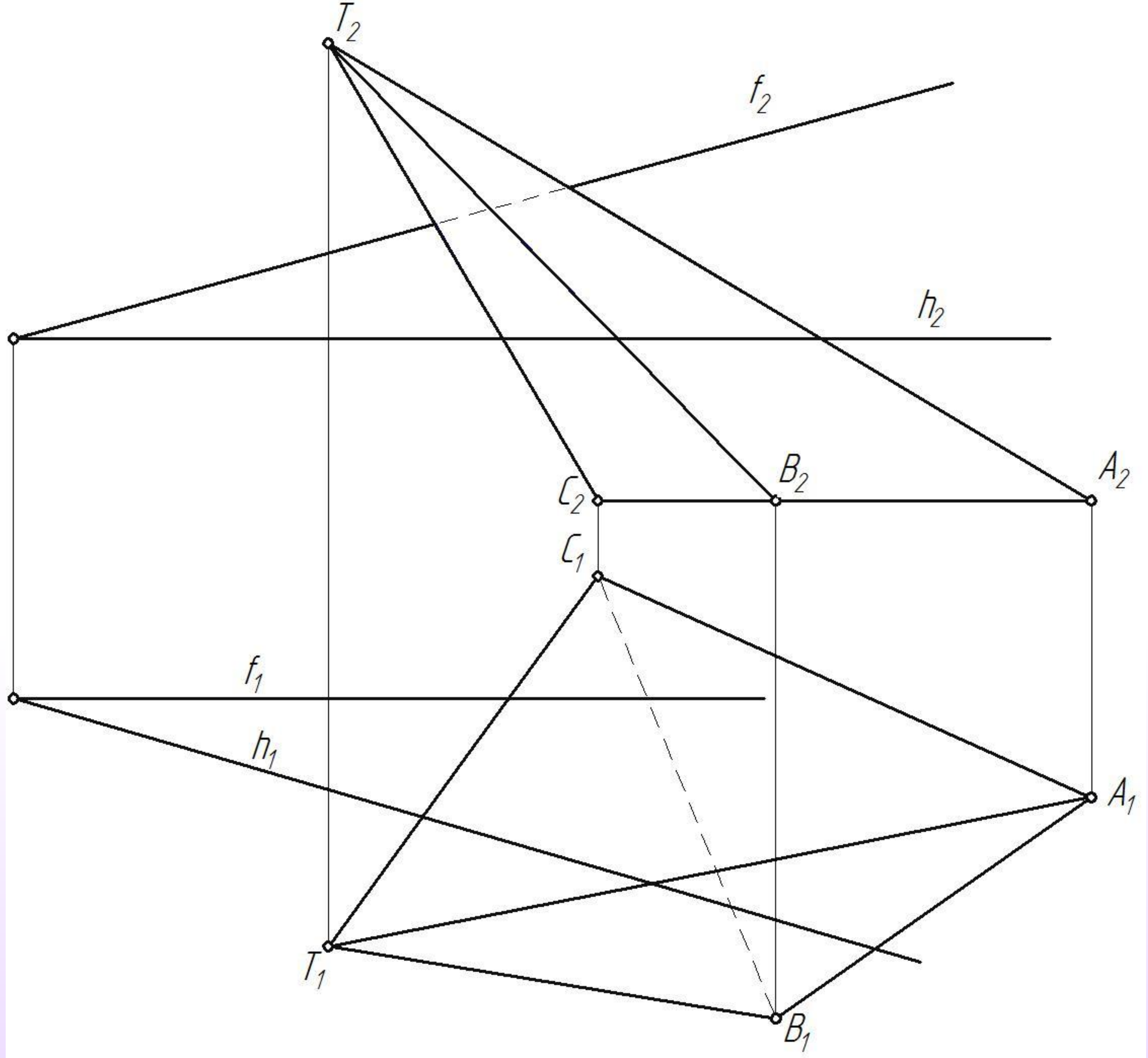
$m_2\{M_2,N_2,K_2\}$



Определяем видимость линии пересечения

Задача по определению сечения многогранника сводится к многократному решению задач:

- **Определение точки пересечения прямой (*ребер многогранника*) с плоскостью**
- **Нахождение линии пересечения двух плоскостей (*грани многогранника* и секущей плоскости).**



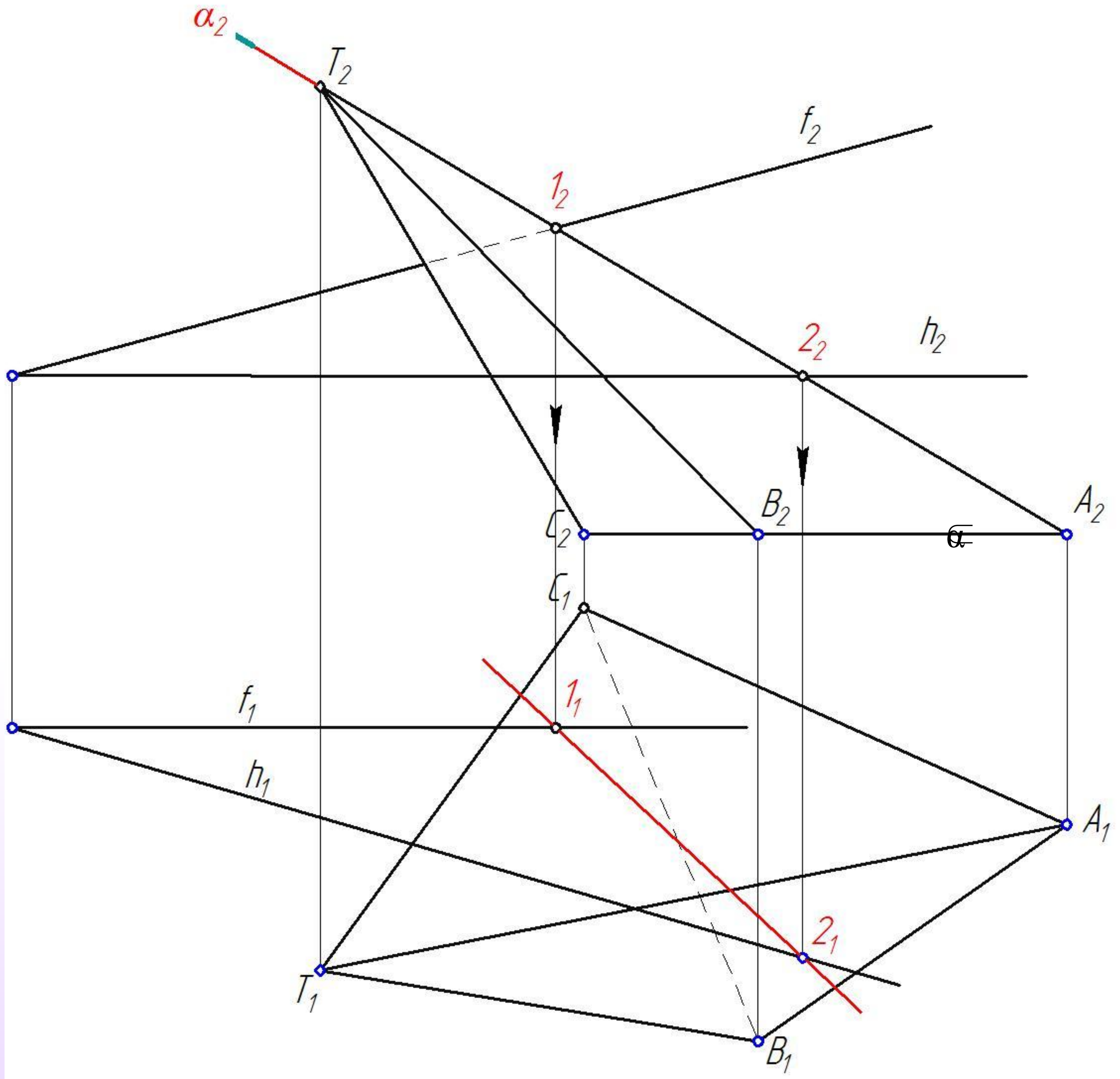
Задача 2

Пирамида Ф{TABC} и

плоскость δ(h ∩ f)

m=Ф∩δ; m{M,N,L} - ?

Линия пересечения **строится с использованием метода** ***секущих плоскостей – посредников***

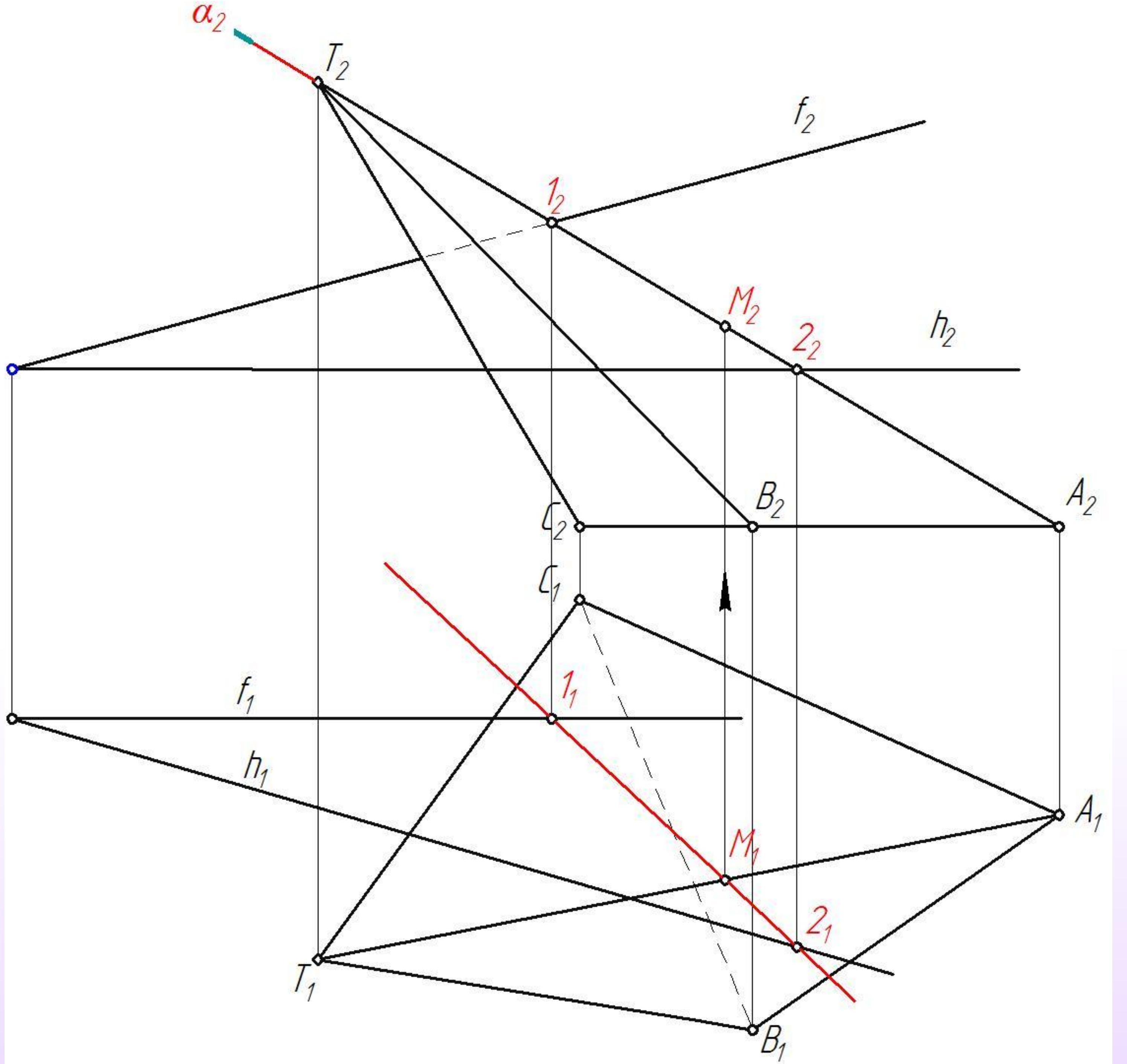


1. Вводим плоскость – посредник α

$\alpha \perp \Pi_2$, $(TA) \subset \alpha$,

2. Находим линию пересечения заданной плоскости **δ** и введенной плоскости **α**

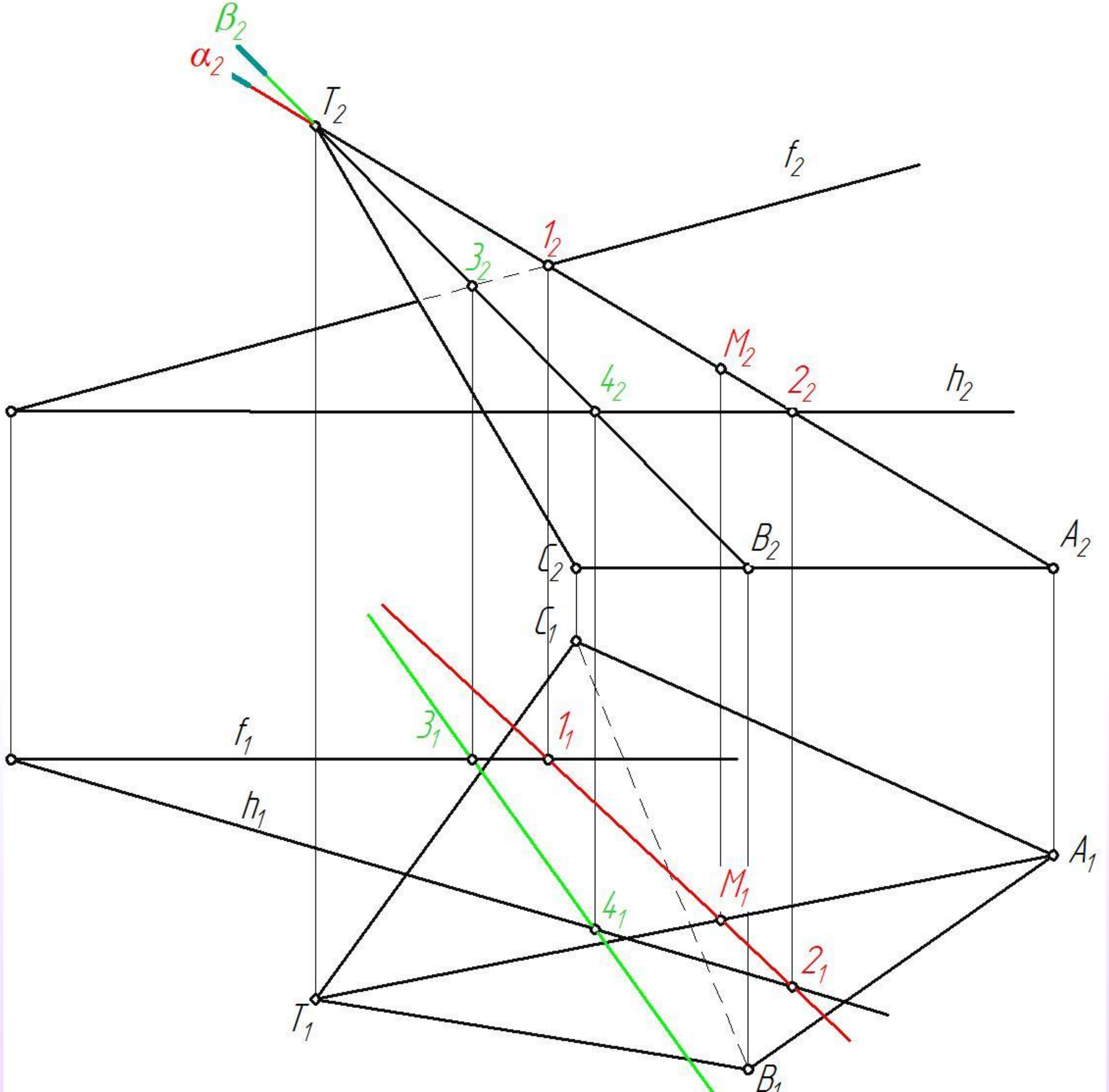
$\alpha \cap \delta \equiv (12)$



3. Точка пересечения построенной прямой (12) с ребром (ТА) есть первая точка линии пересечения

$$(12) \cap (TA) \equiv M$$

Повторяем алгоритм еще два раза (по количеству ребер многогранника)

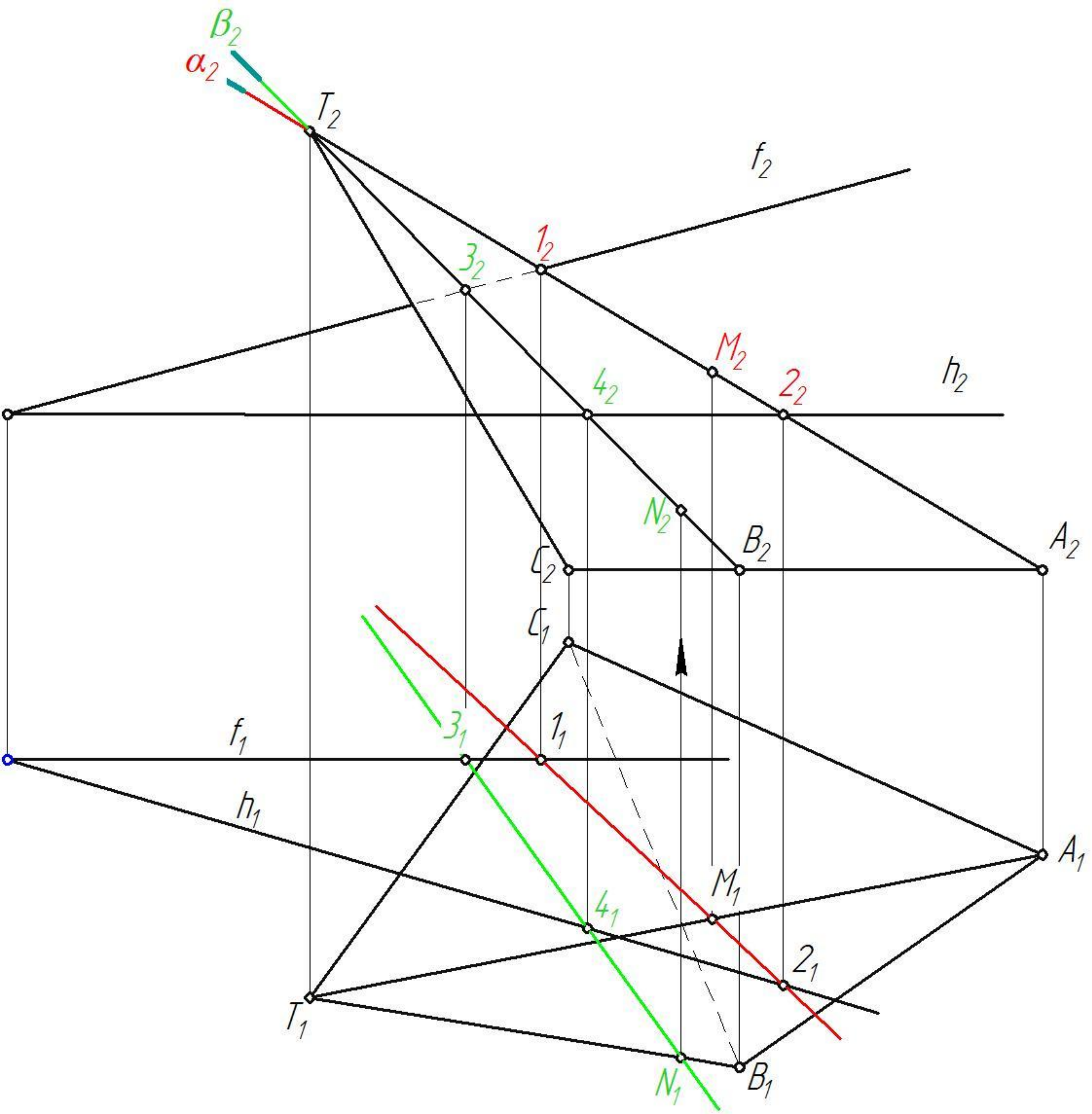


4. Вводим плоскость – посредник β

$$\beta \perp \Pi_2, (TB) \subset \beta,$$

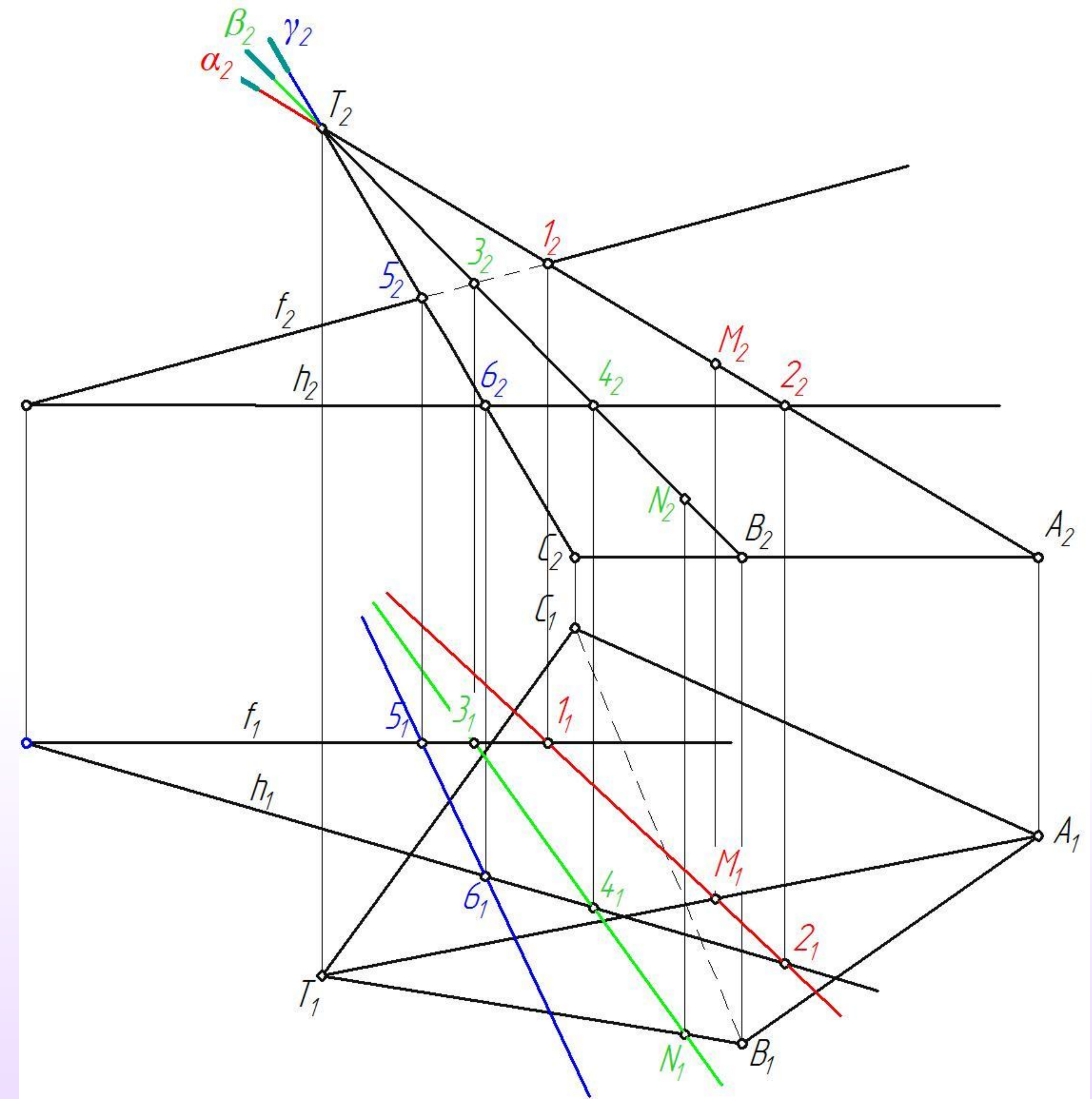
5. Находим линию пересечения заданной плоскости **δ** и введенной плоскости **β**

$$\beta \cap \delta \equiv (34)$$



6. Точка пересечения построенной прямой (34) с ребром (ТВ) есть точка линии пересечения

(34) ∩ (ТВ) ≡ N

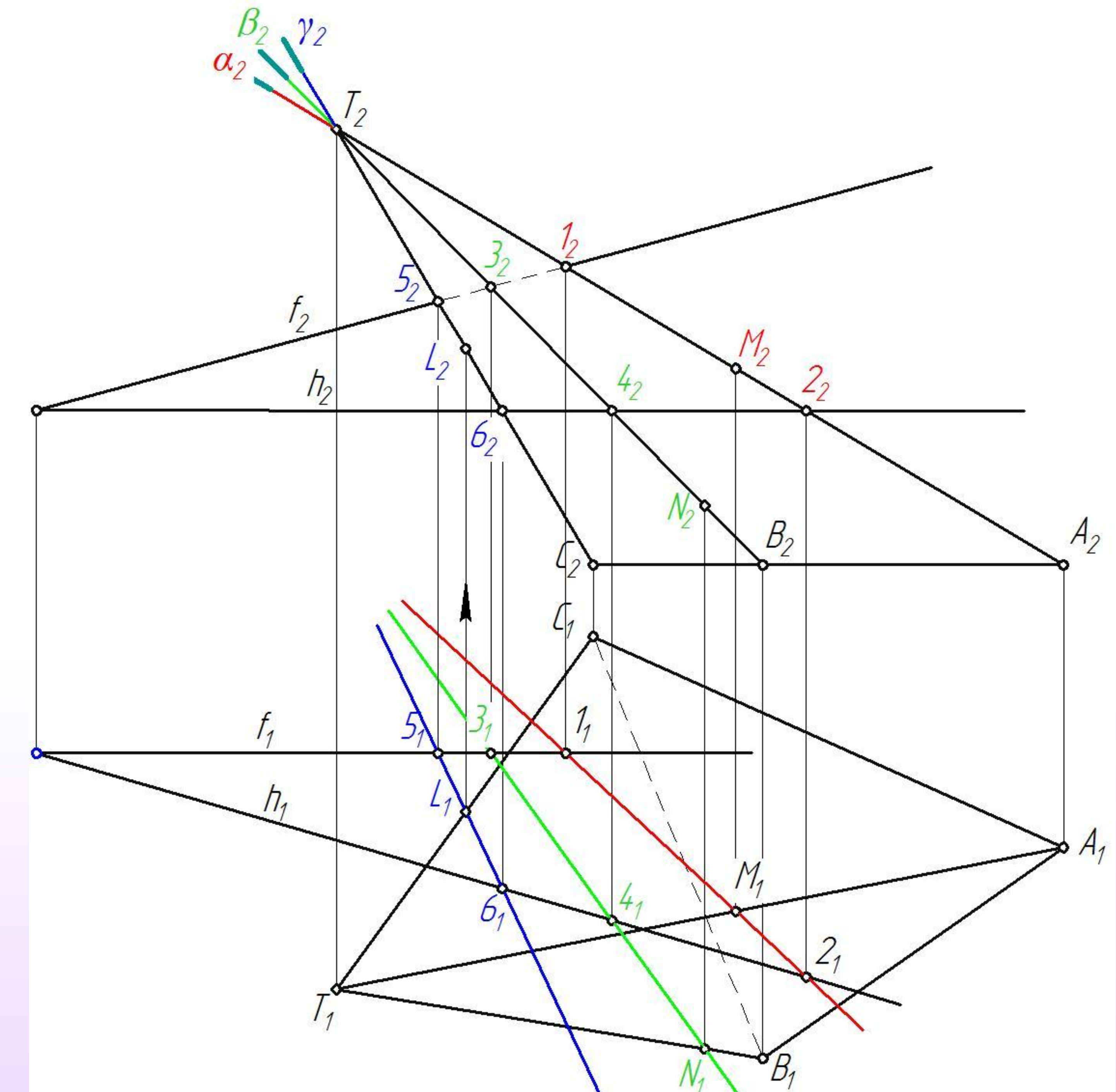


7. Вводим плоскость – посредник γ

$\gamma \perp \Pi_2$, $(TC) \subset \gamma$,

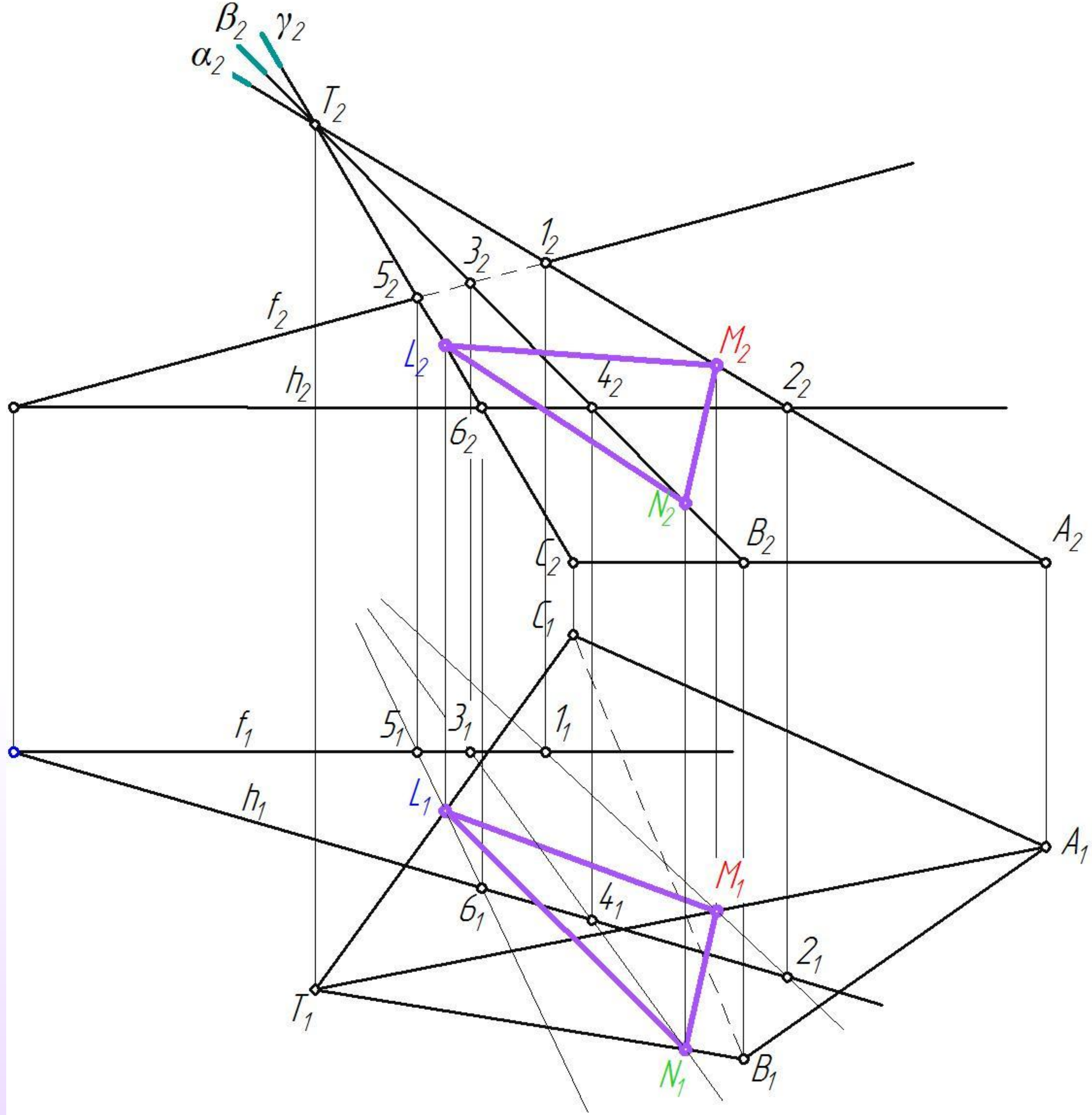
8. Находим линию пересечения заданной плоскости **δ** и введенной плоскости **γ**

$\gamma \cap \delta \equiv (56)$



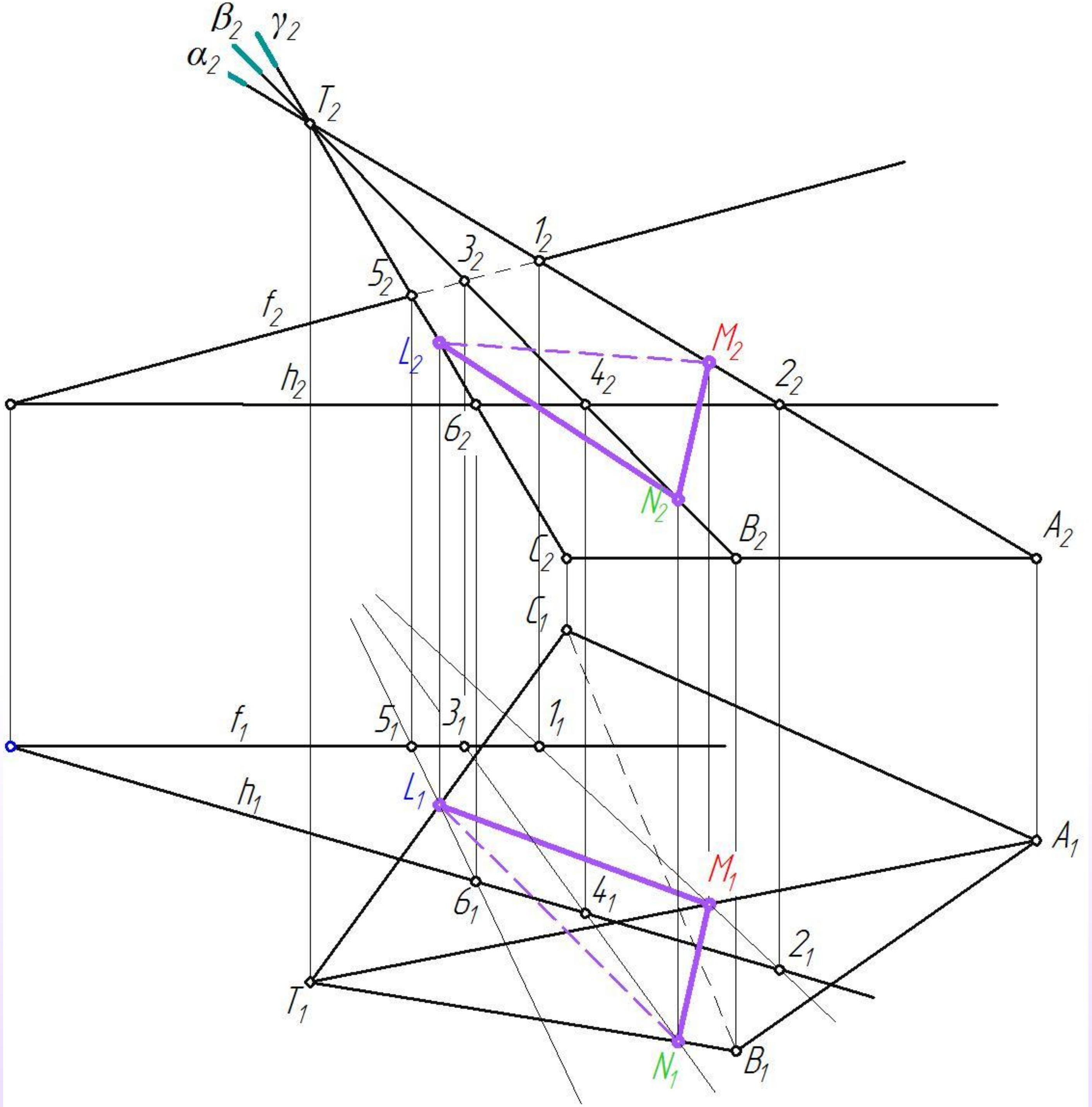
9. Точка пересечения построенной прямой (56) с ребром (ТС) есть точка линии пересечения

$(56) \cap (TC) \equiv L$



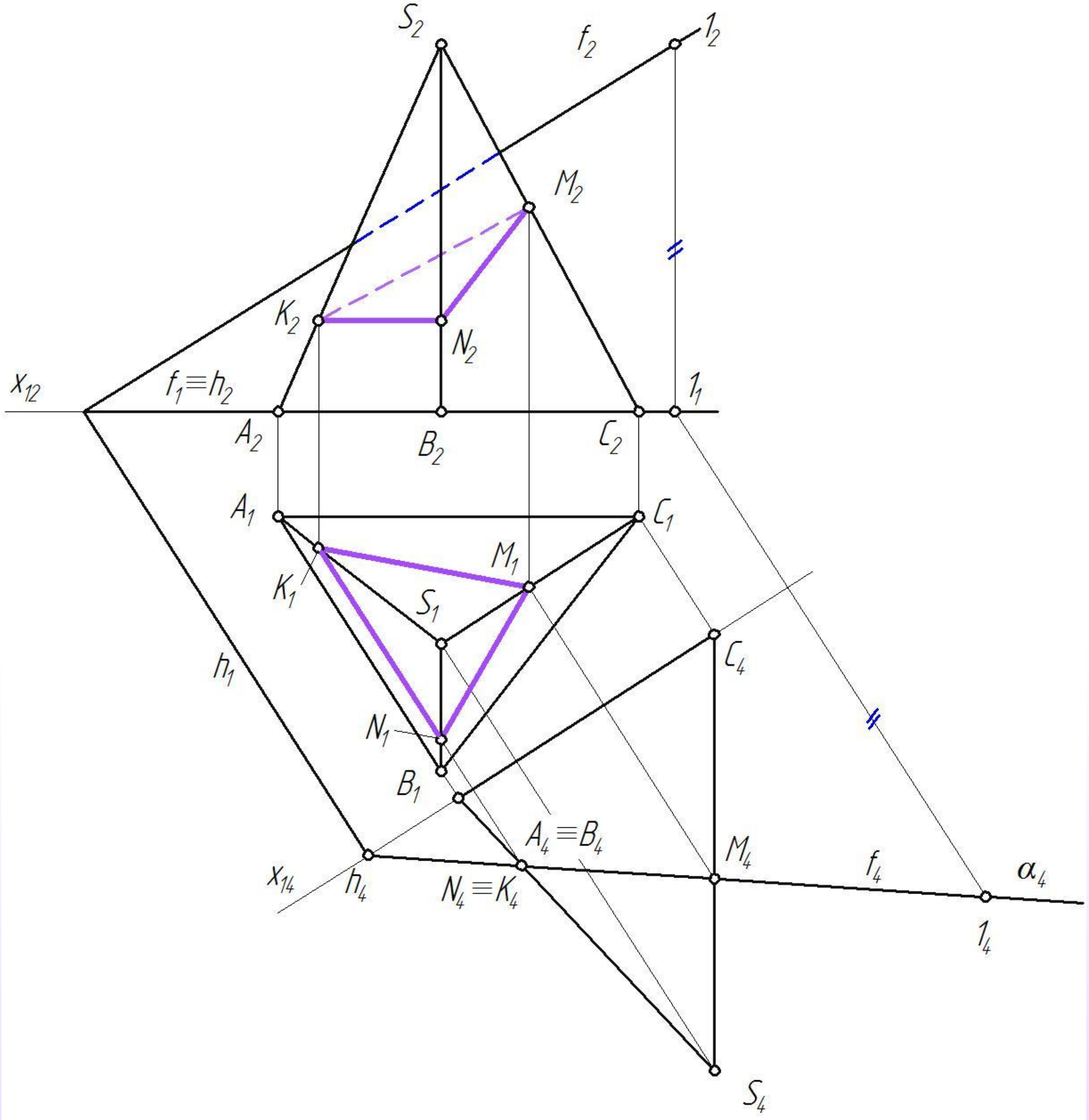
10. Строим линию пересечения

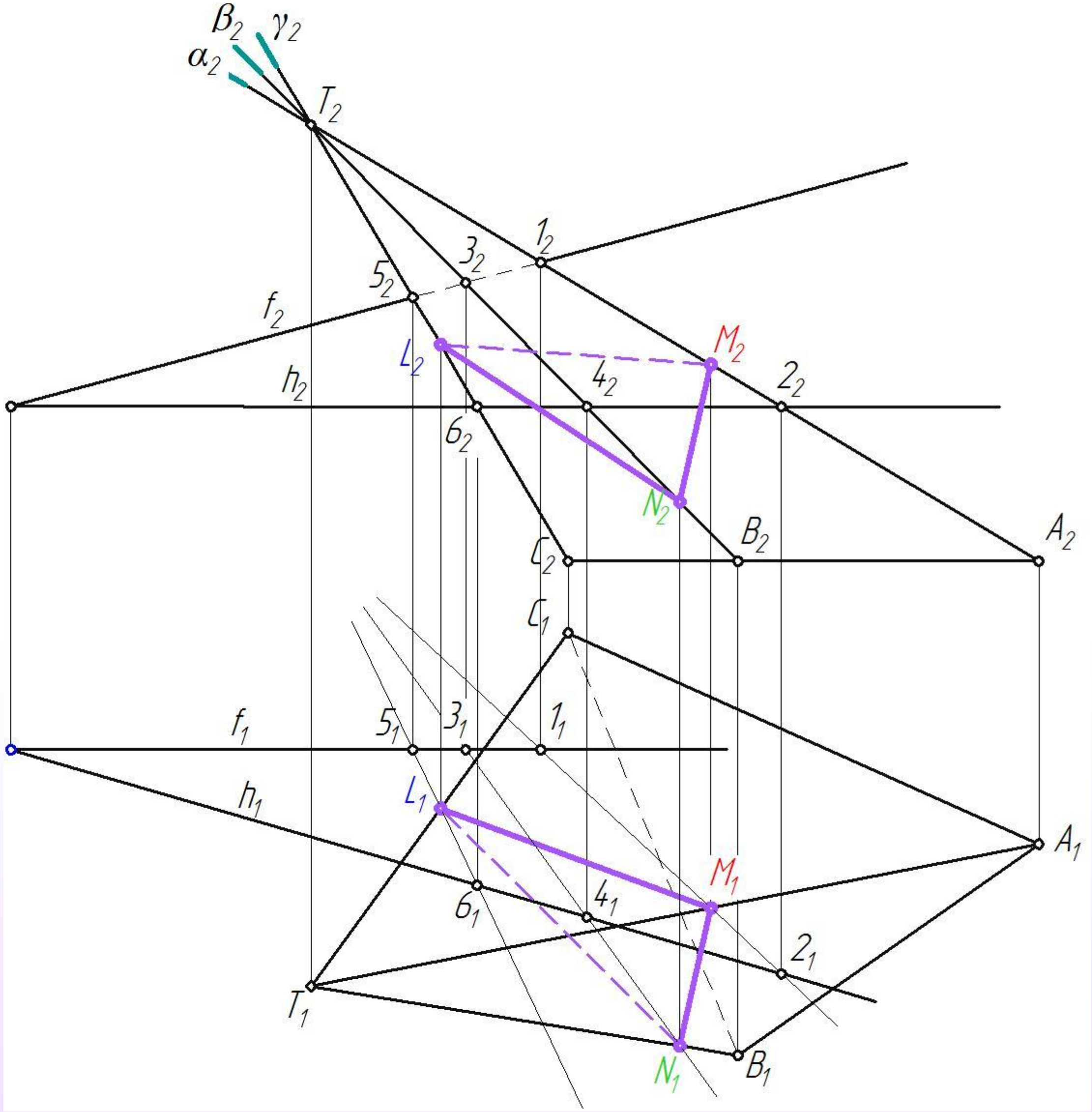
$m \equiv \Phi \cap \delta$; $m\{M,N,L\}$



Определяем видимость построенной линии пересечения

***m*{M,N,L}**


S_2
f_2
1_2
M_2
K_2
N_2
x_{12}
$f_1 \equiv h_2$
1_1
A_2
B_2
C_2
A_1
C_1
K_1
M_1
S_1
h_1
C_4
N_1
B_1
$A_4 \equiv B_4$
M_4
f_4
α_4
x_{14}
h_4
$N_4 \equiv K_4$
1_4
S_4


β_2
γ_2
α_2
T_2
1_2
3_2
5_2
f_2
L_2
M_2
4_2
2_2
h_2
6_2
N_2
B_2
A_2
C_2
C_1
f_1
5_1
3_1
1_1
h_1
L_1
M_1
A_1
6_1
4_1
2_1
T_1
N_1
B_1

Пересечение поверхностей вращения плоскостью общего положения

Алгоритм решения задач на пересечение поверхности с плоскостью общего положения

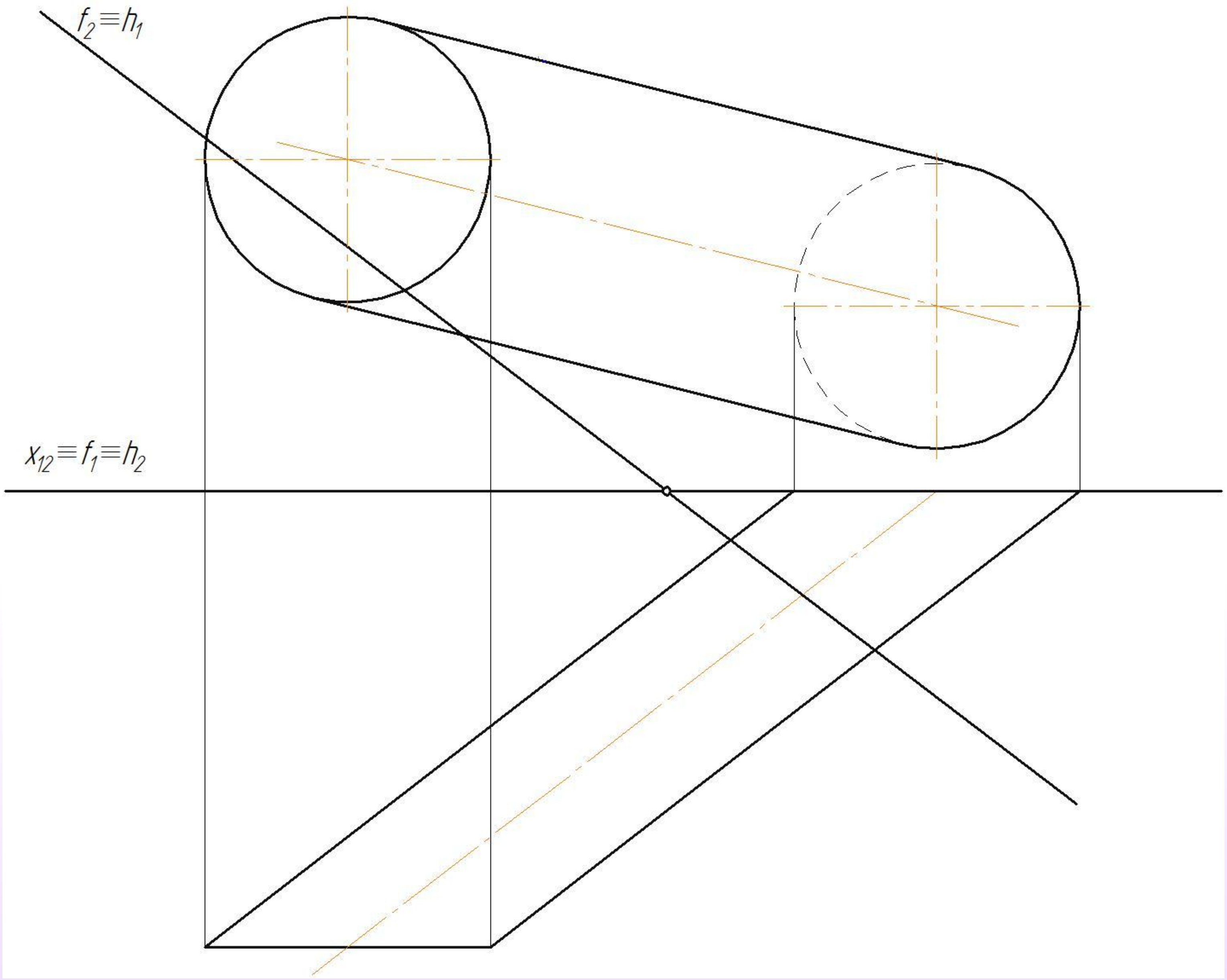
1. Образующую поверхности заключаем во вспомогательную плоскость – посредник γ.
2. Находим линию пересечения плоскости – посредника γ с заданной плоскостью α: $(12)=\alpha \cap \gamma$.
3. Отмечаем точку, в которой построенная линия пересекается с образующей поверхности : $M \equiv (12) \cap a$.
4. Точка M, являясь общей для данных поверхности и плоскости будет точкой искомой линии пересечения.
5. Для построения линии пересечения необходимо найти еще ряд точек, используя плоскости – посредники.

Обе проекции искомой линии строятся в плоскостях Π_1 и Π_2.

Количество точек, используемых для построения линии пересечения, определяется формой поверхности и точностью построения.

Но из всего множества точек линии пересечения **обязательно** должны быть построены следующие точки:

1. Опорные точки – точки расположенные на *очерковых образующих поверхности*. Эти точки определяют границы видимости проекции кривой.
2. Точки, определяющие габариты фигуры сечения;
3. Для уточнения линии пересечения строим промежуточные точки.

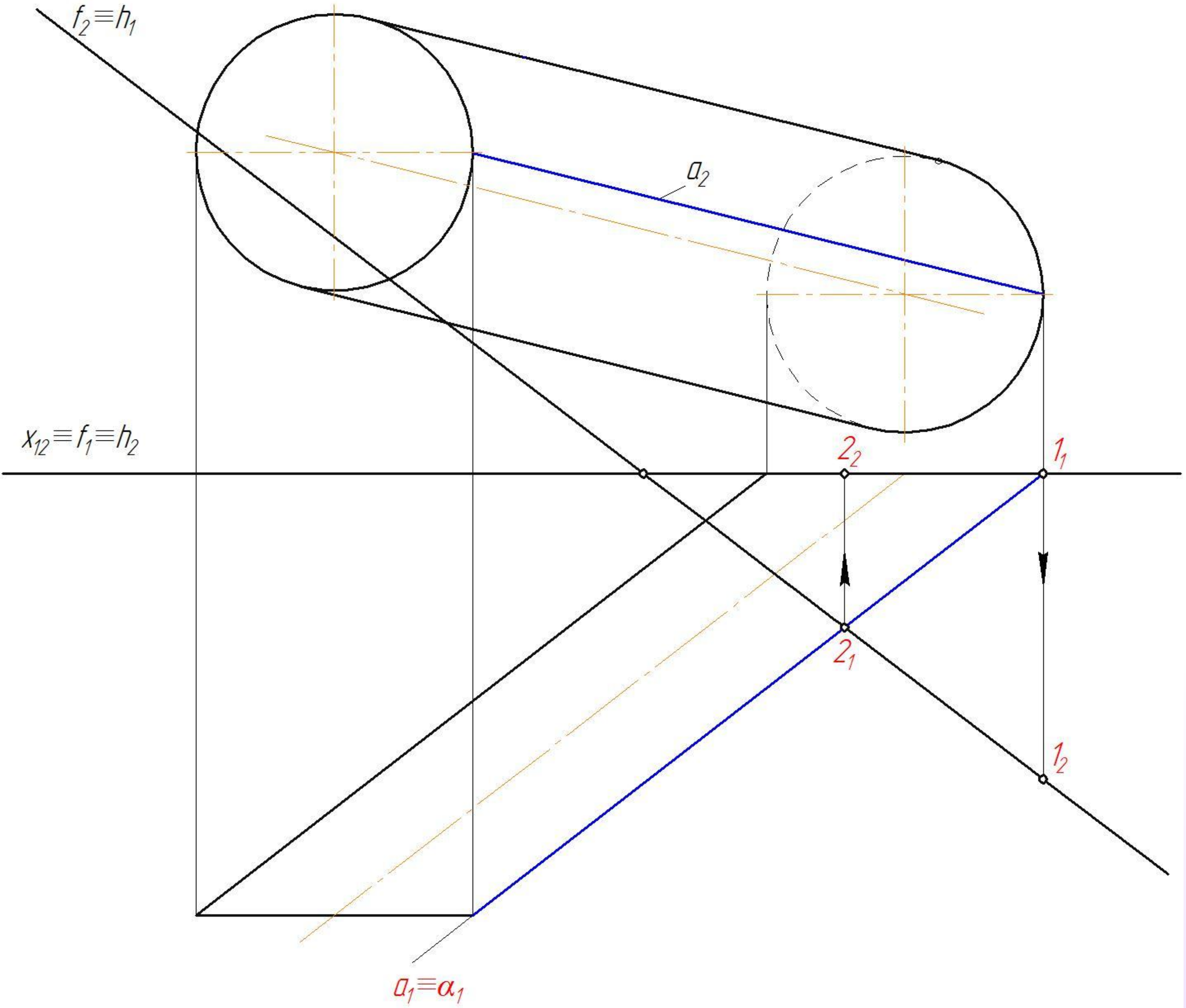


Задача 3

Цилиндр Ф и плоскость

γ(h ∩ f)

q=Ф∩γ - ?

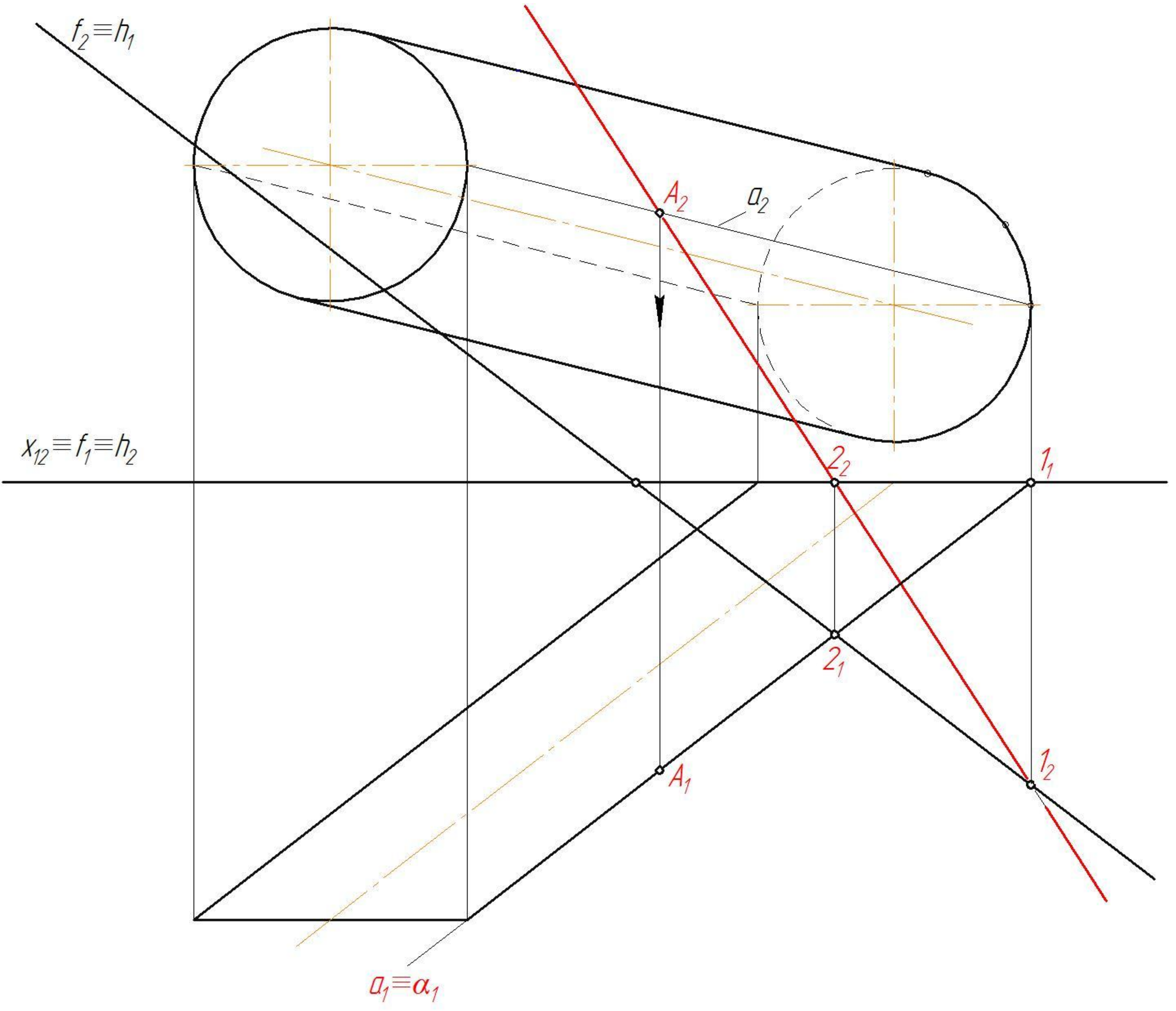


1. Образующую поверхности **а** заключаем во вспомогательную плоскость – посредник **α**.

$\alpha \perp \Pi_1,\ a \subset \alpha,$

Находим точки пересечения плоскости – посредника α с заданной плоскостью γ :

$$1,2=\alpha \cap \gamma.$$

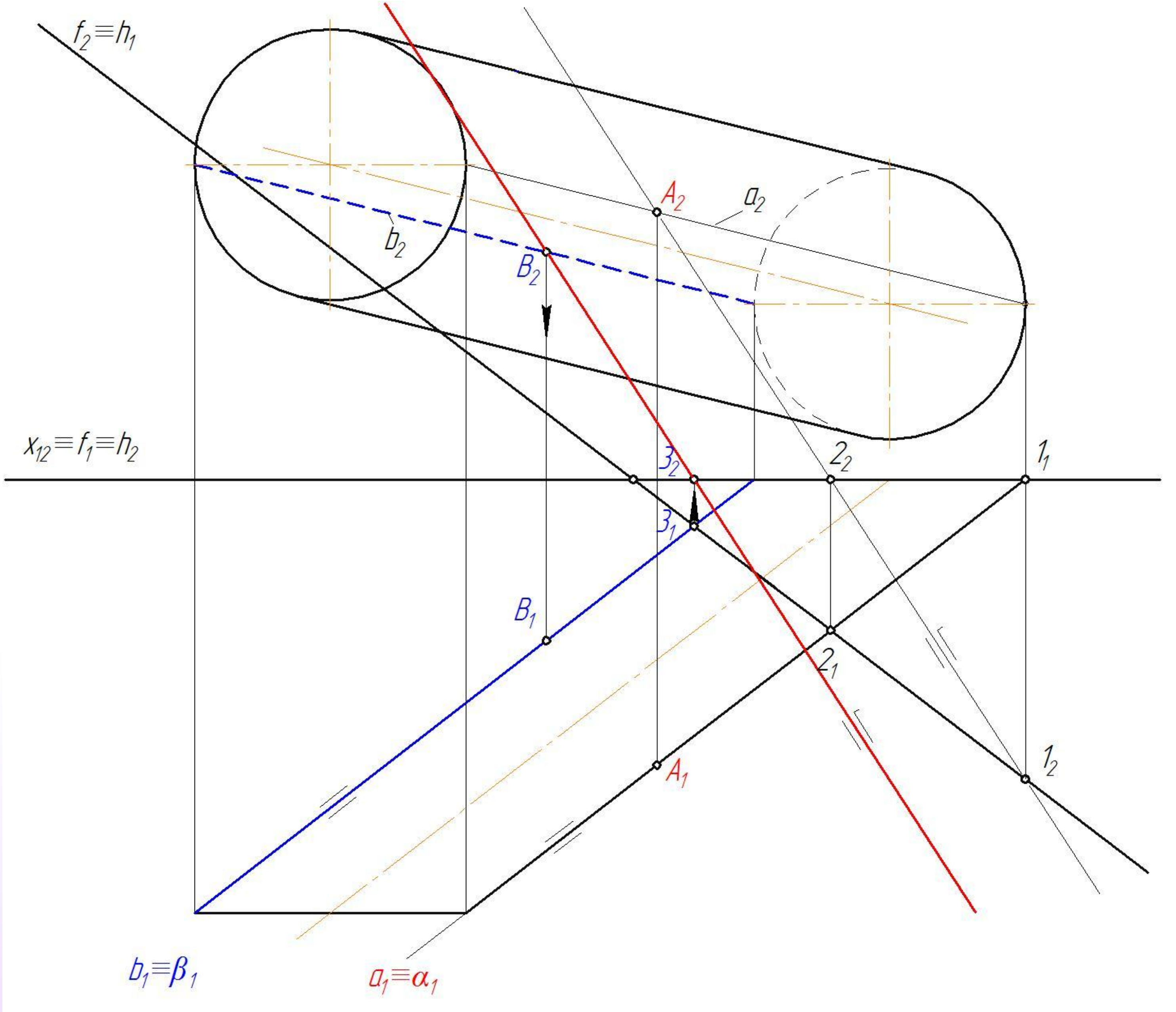


2. **Находим линию пересечения плоскости – посредника α с заданной плоскостью γ :**

(12)=α ∩ γ.

3. **Отмечаем точку, в которой построенная линия пересекается с образующей поверхности :**

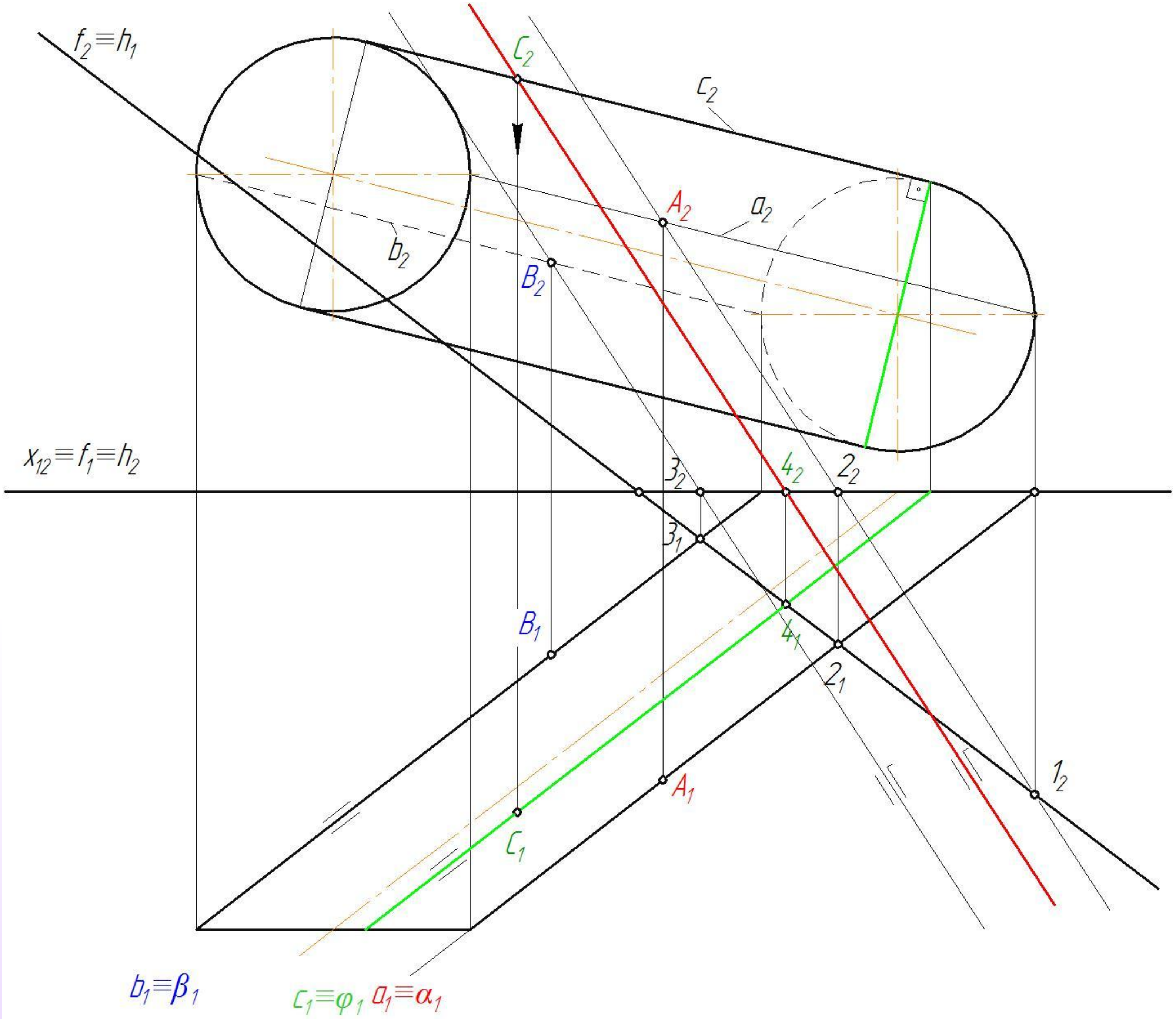
A ≡ (12) ∩ a.



1. $\beta \perp \Pi_1$, $b \subset \beta$,

2. $(3) = \beta \cap \gamma$.
   $\beta \parallel \alpha \Rightarrow (3) \parallel (12)$

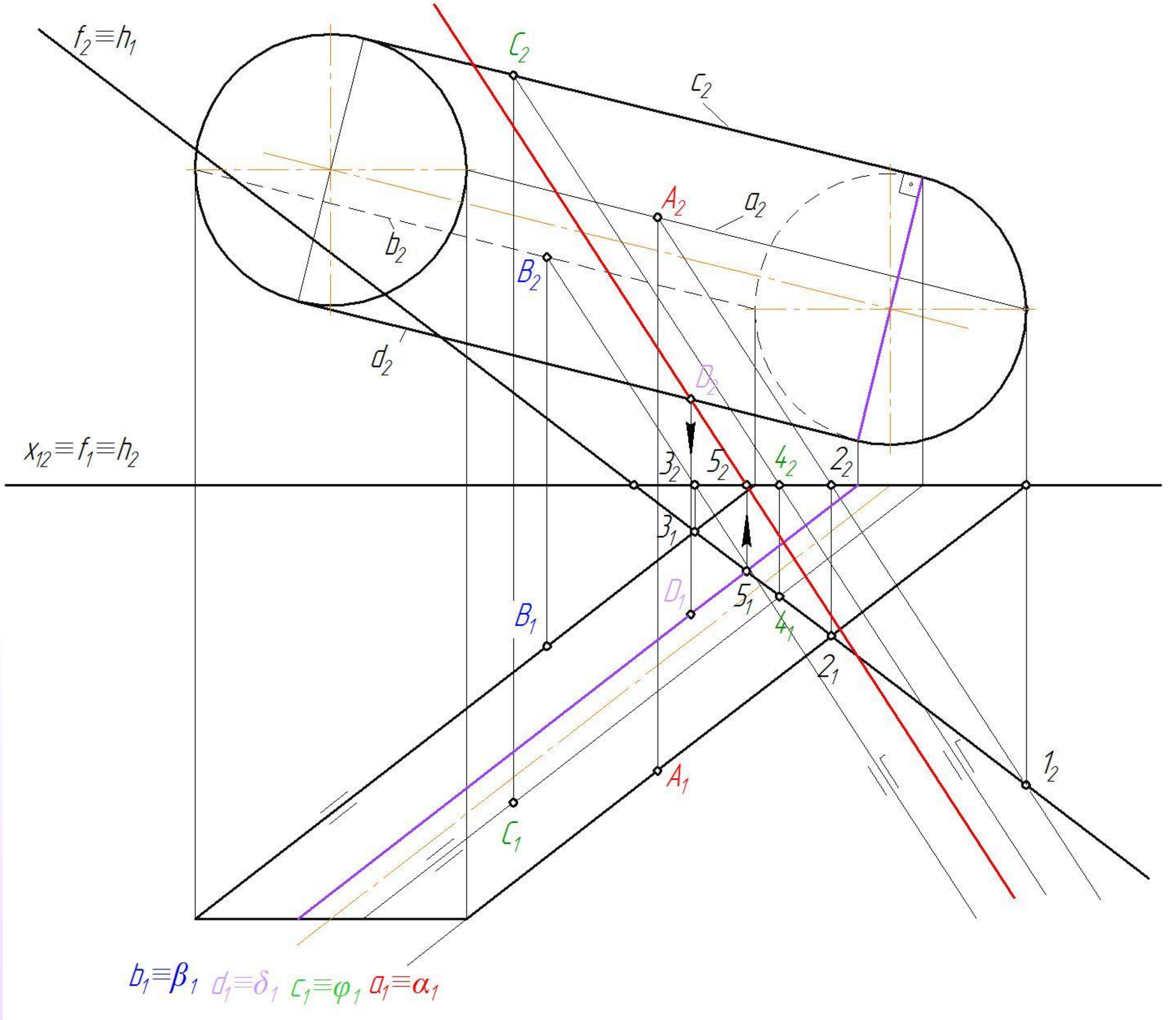
3. $B \equiv (3) \cap b$.



1. $\varphi \perp \Pi_1$, $c \subset \varphi$,

2. $(4) = \varphi \cap \gamma$.
   $\varphi \parallel \alpha \Rightarrow (4) \parallel (12)$

3. $C \equiv (4) \cap c$.



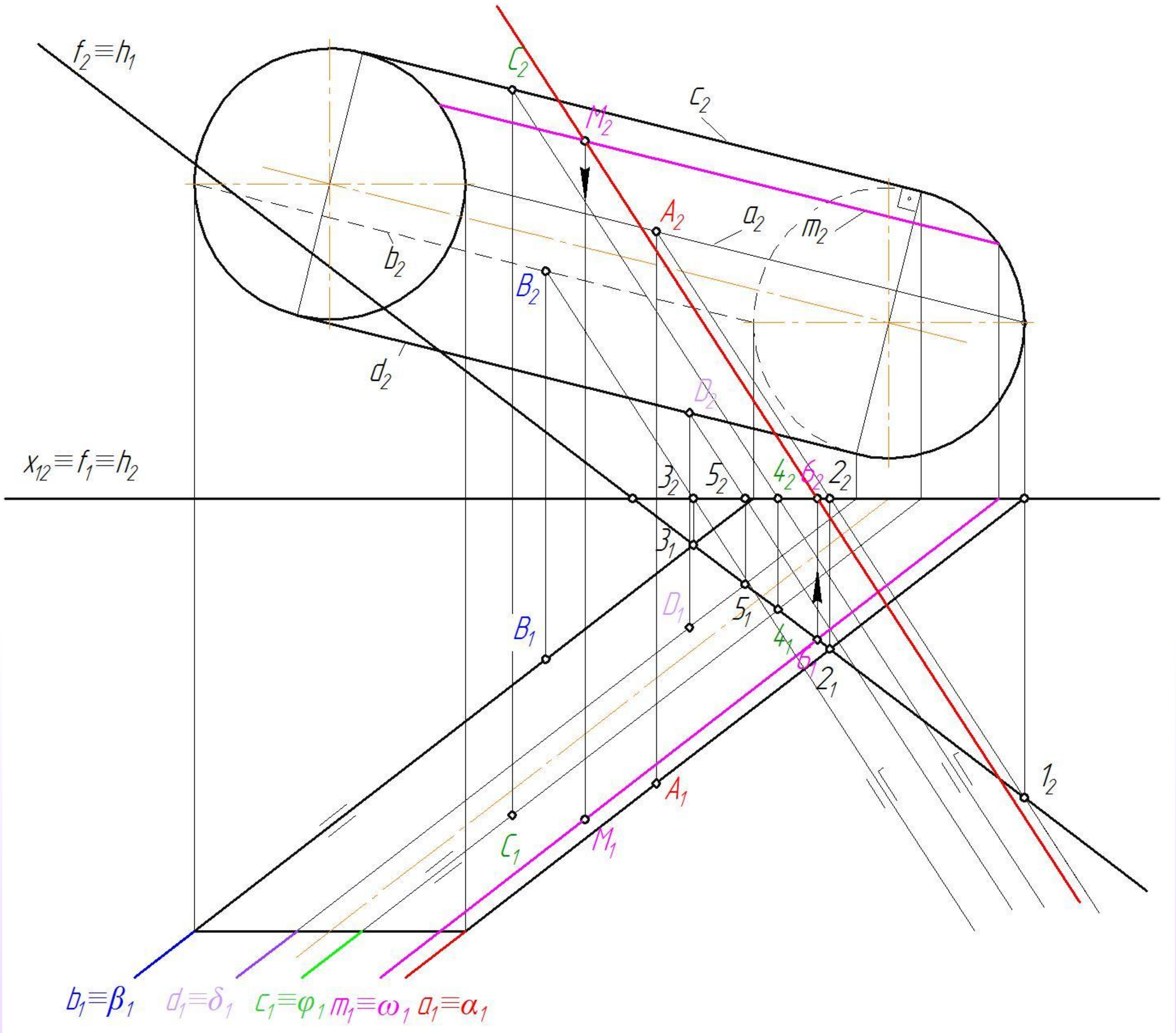
1. $\delta \perp \Pi_1$, $d \subset \delta$,

2. $(5) = \delta \cap \gamma$.

$\delta \parallel \alpha \Rightarrow (5) \parallel (12)$

3. $D \equiv (5) \cap d$.

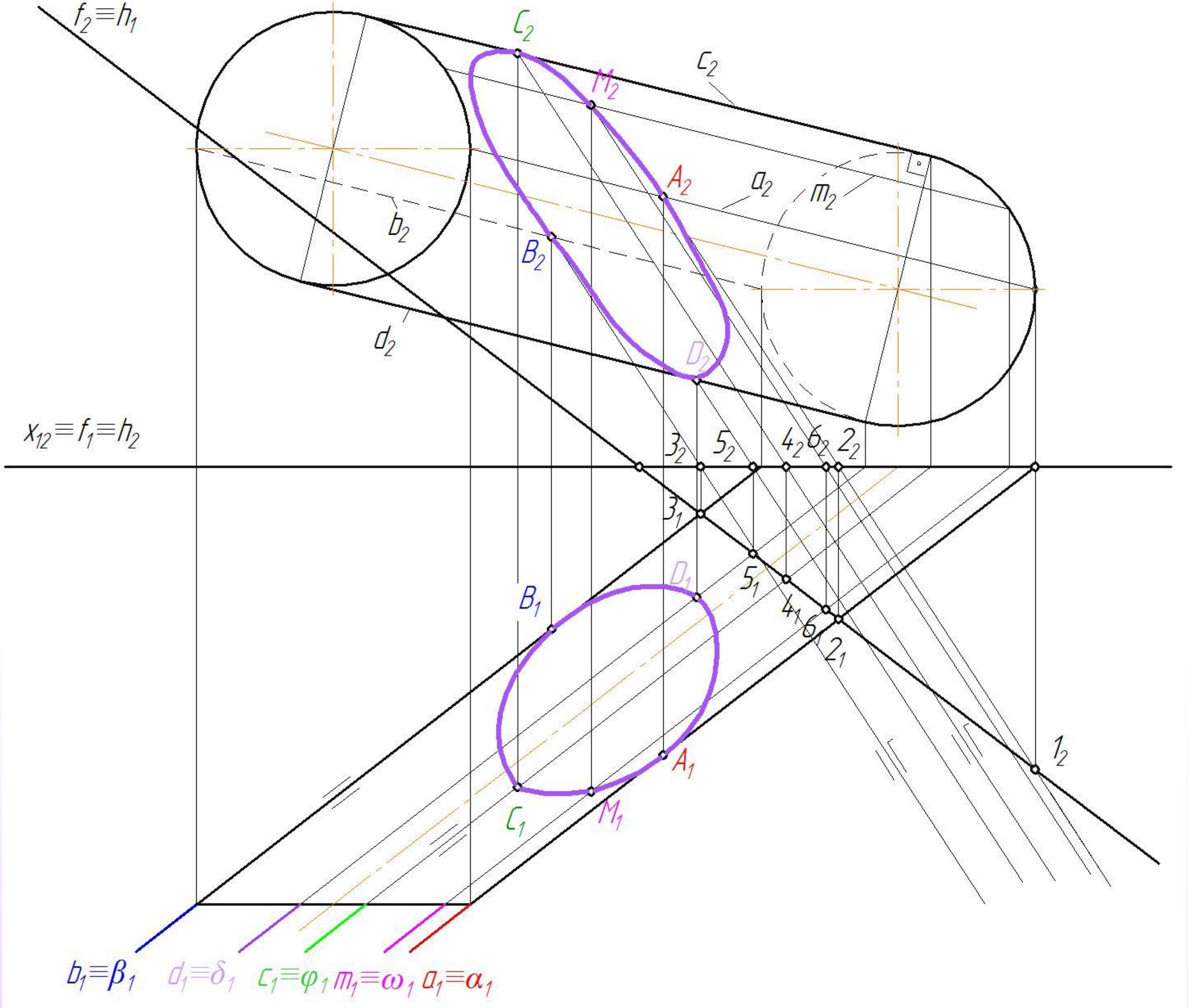
Для построения линии пересечения необходимо найти еще ряд точек, используя плоскости – посредники.



1. $\omega \perp \Pi_1$, $m \subset \omega$,

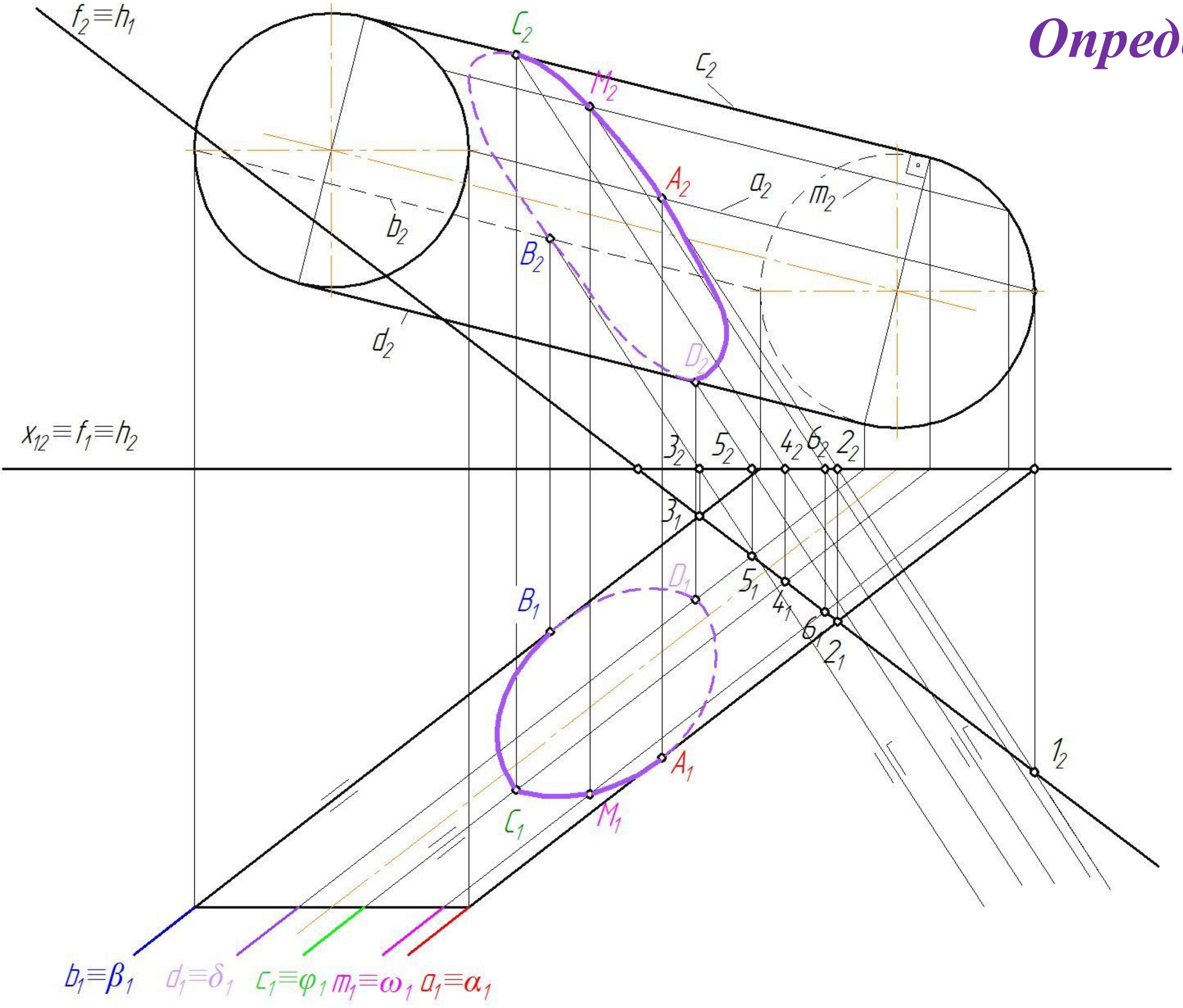
2. **$(6) = \omega \cap \gamma$.**
$\omega \parallel \alpha \Rightarrow (6) \parallel (12)$

3. **$M \equiv (6) \cap m$.**



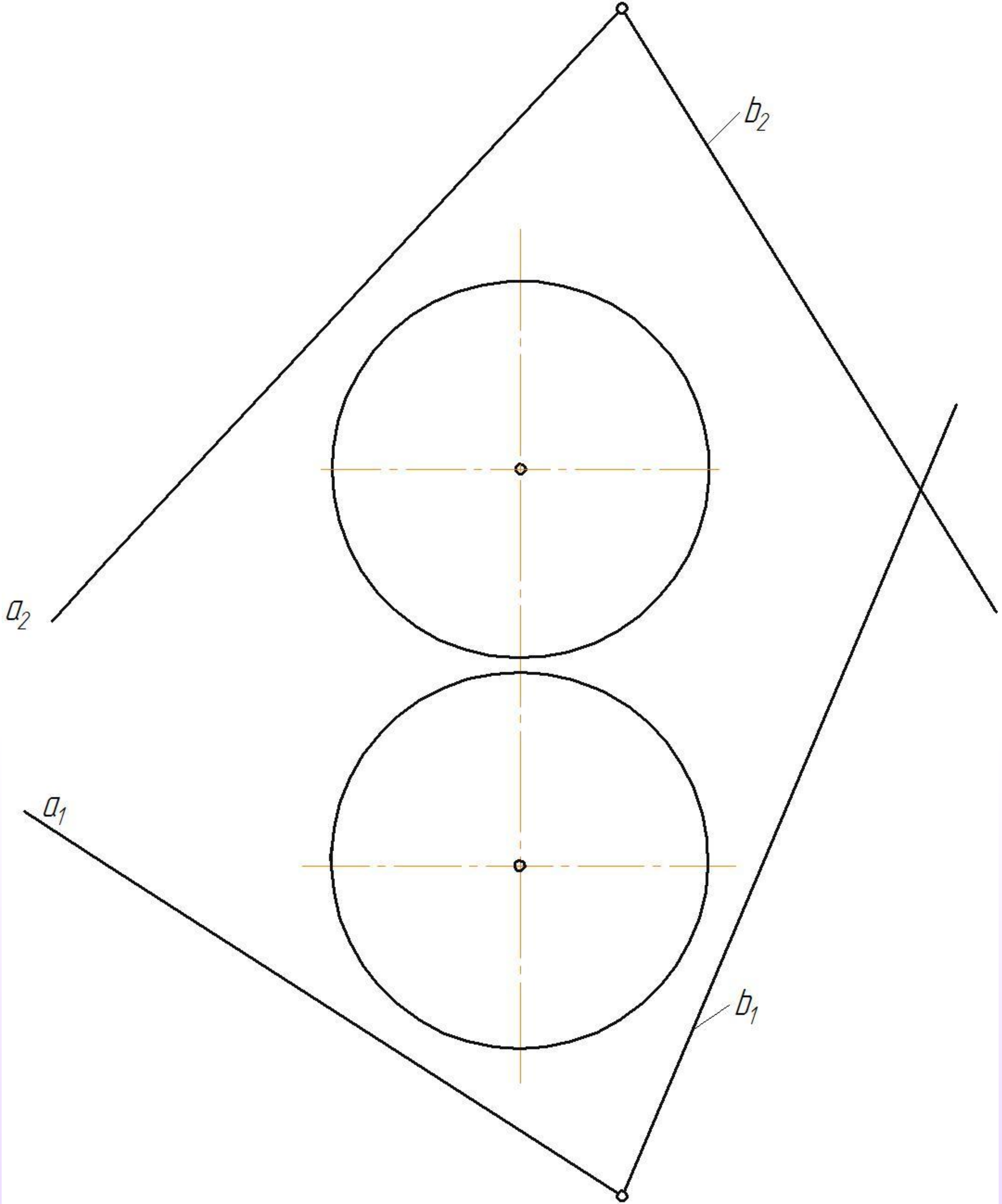
Точки A, B, C, D, M, являясь общими для данных поверхности и плоскости будут точками искомой линии пересечения.

Определяем видимость сечения.



Точки пересечения плоскости со сферой можно рассматривать как точки пересечения окружностей сферы с плоскостью.

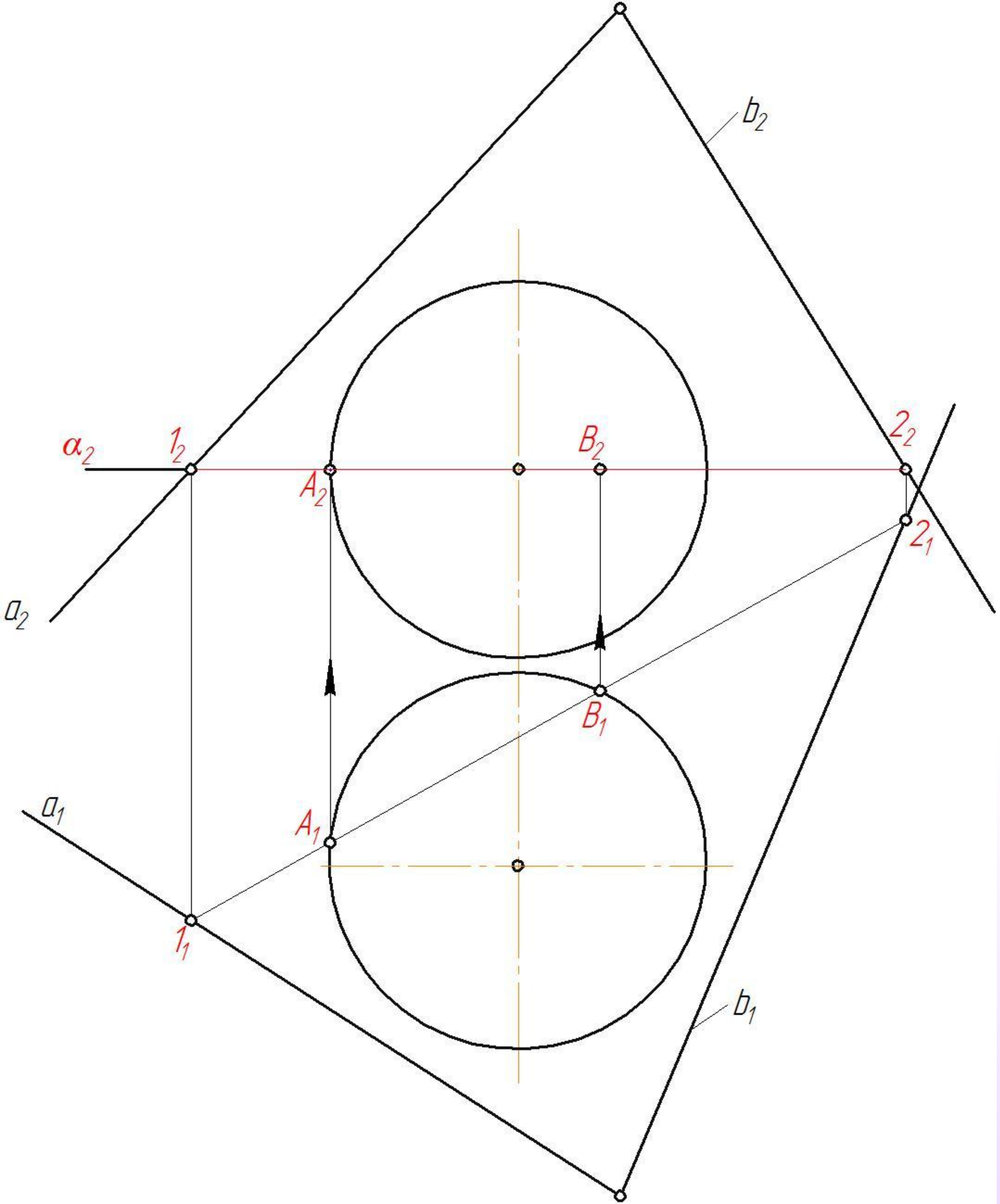
Плоскость пересекает сферу по окружности, проекции которой в общем случае на ортогональном чертеже изобразится эллипсами.



<u>Задача 4</u>

Сфера Ф и плоскость φ(a ∩ b)

***m*=Ф∩φ - ?**



Определяем опорные точки

Вводим вспомогательную плоскость – посредник α через экватор.

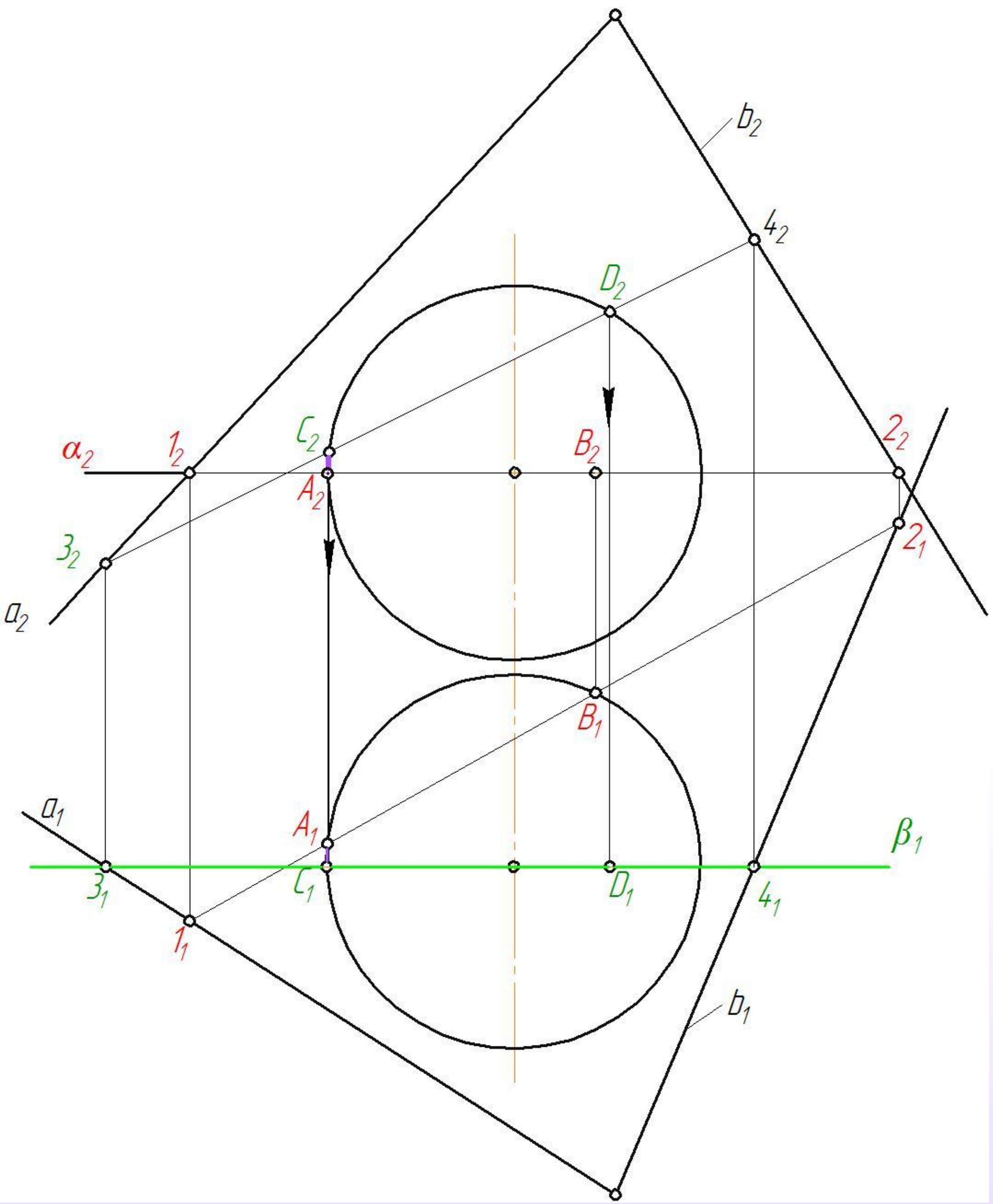
$\alpha \parallel \Pi_1$

Находим точки пересечения плоскости – посредника α с заданной плоскостью φ(a ∩b) :

1,2 = α ∩ φ.

Находим точки пересечения плоскости – посредника α с экватором сферы Φ:

A,B = α ∩ Φ.



Вводим вспомогательную плоскость – посредник β через главный меридиан.

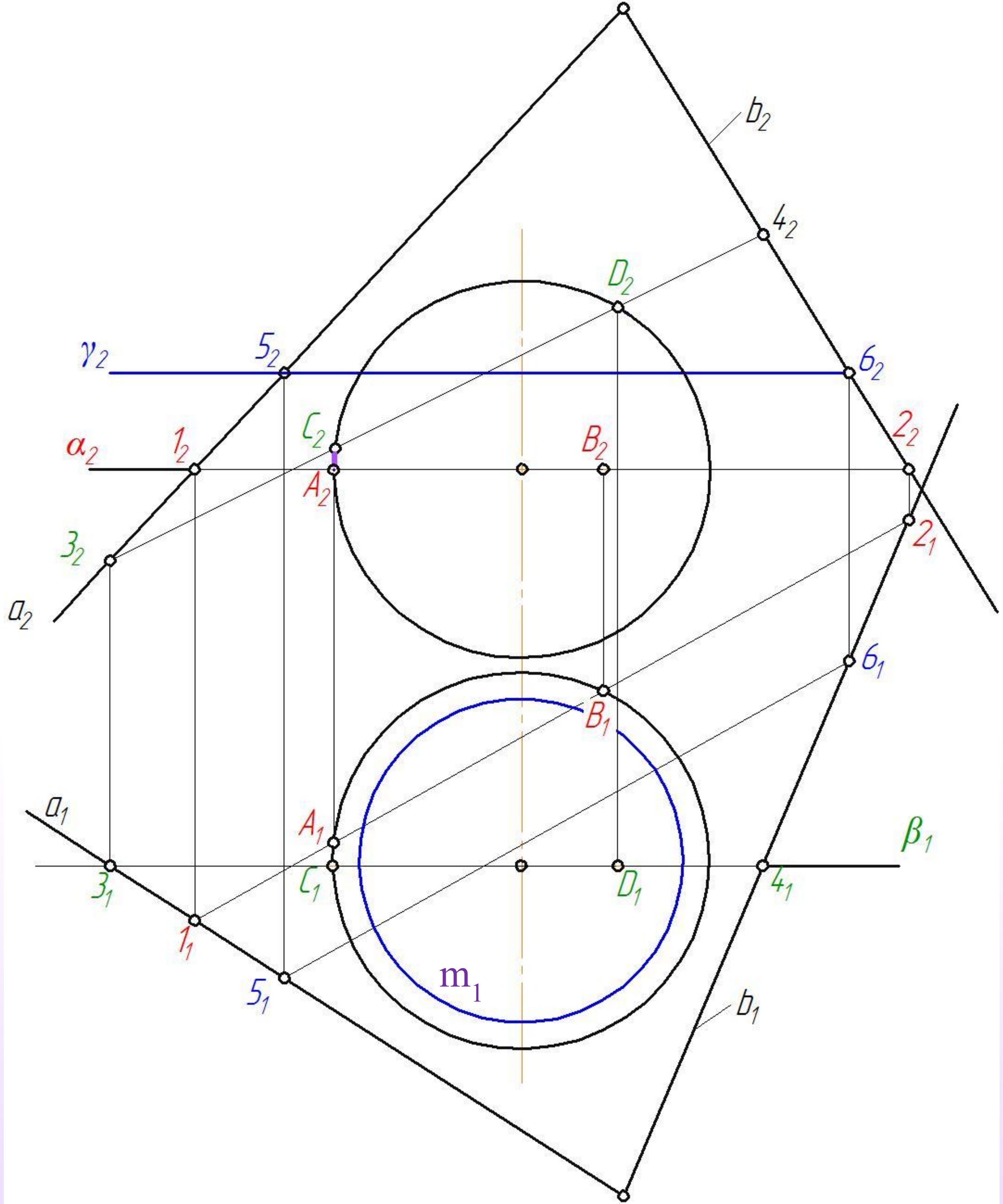
$\beta \parallel \Pi_2$

Находим точки пересечения плоскости – посредника β с заданной плоскостью φ(a ∩ b) :

3,4 = β ∩ φ.

Находим точки пересечения плоскости – посредника β с главным меридианом сферы Φ:

C,D = β ∩ Φ.



Для уточнения линии пересечения строим

промежуточные точки.

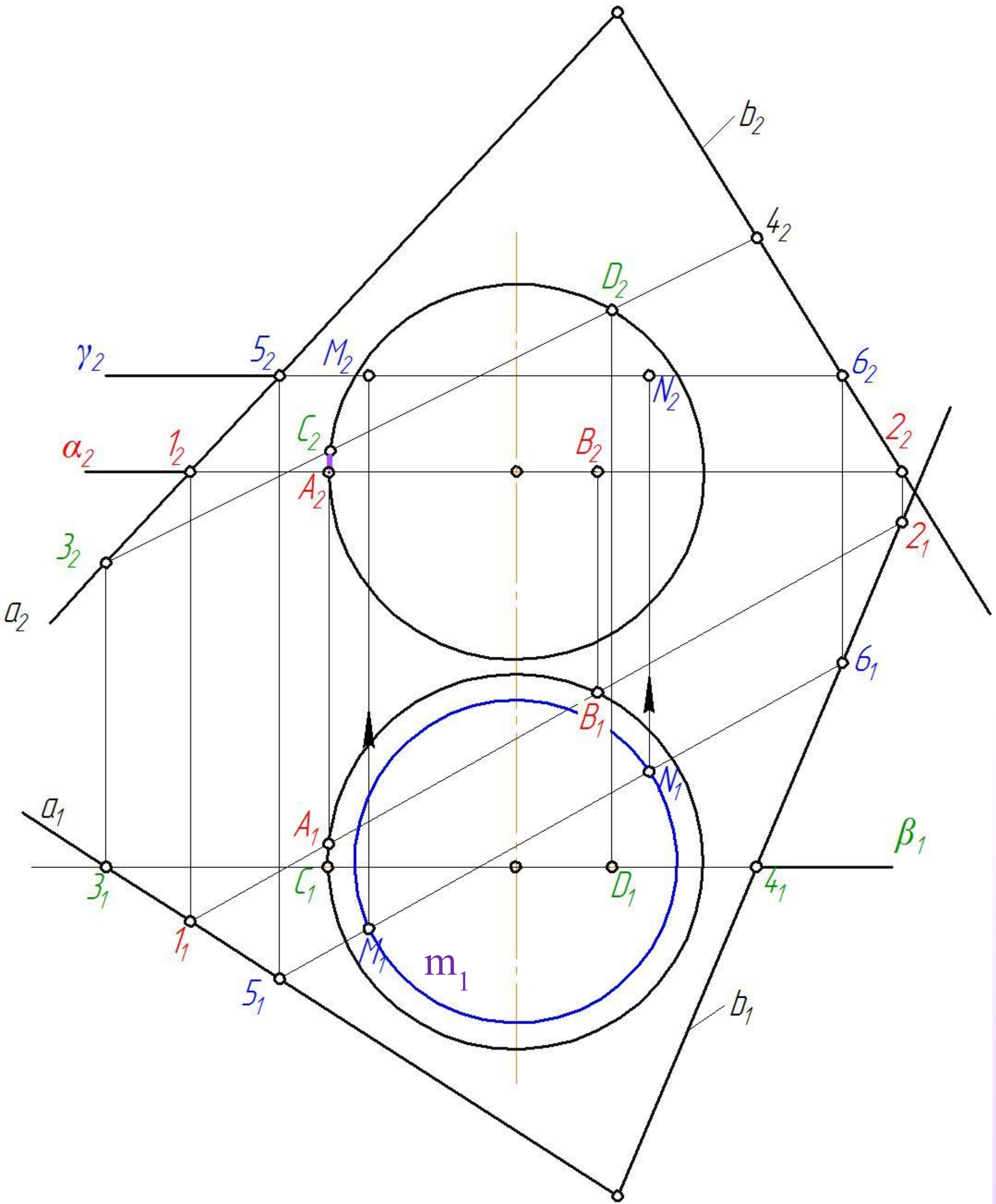
Вводим произвольно вспомогательную плоскость – посредник γ.

$$\gamma \parallel \Pi_1$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника γ с заданной плоскостью φ(a ∩ b) :

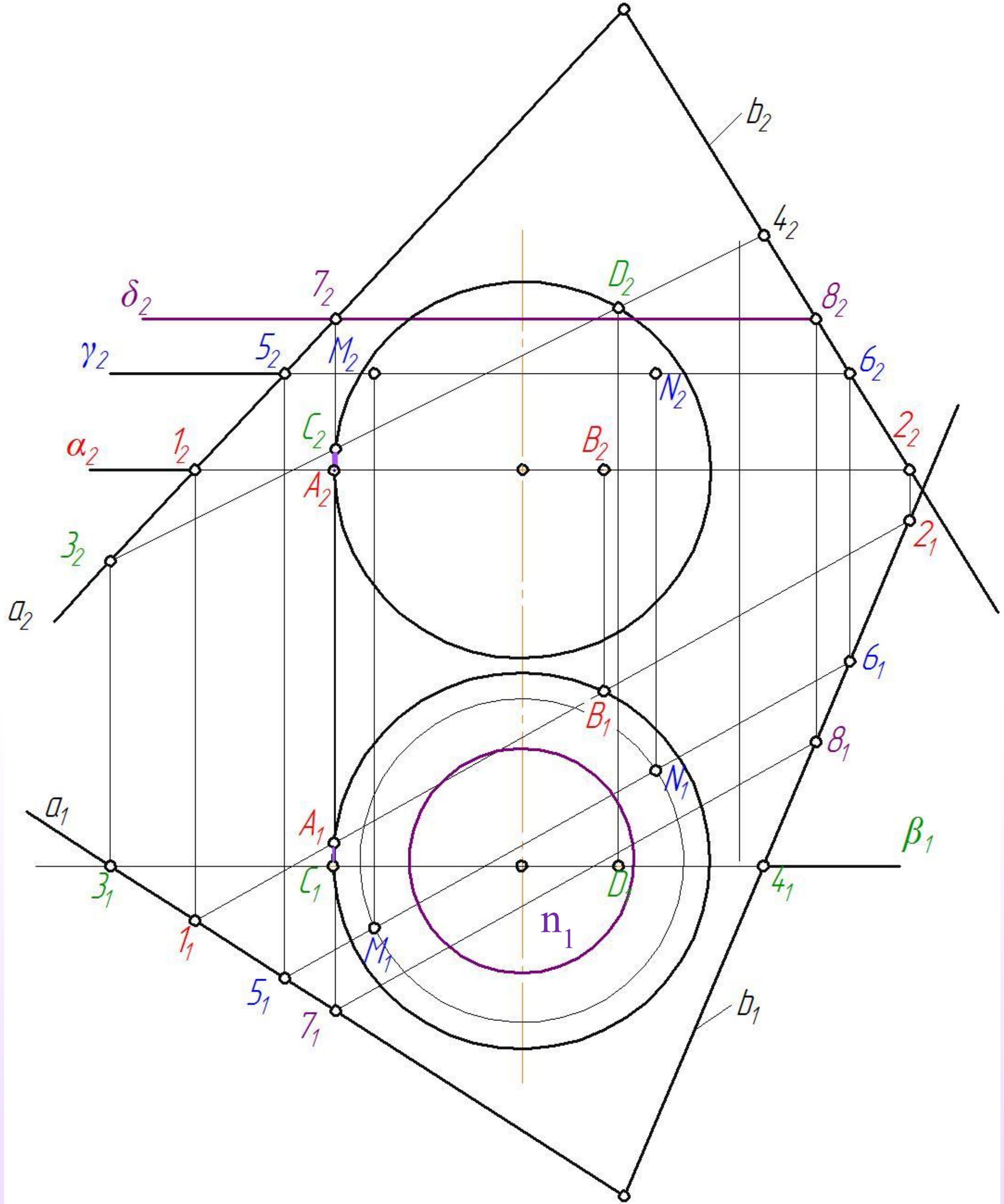
$$5{,}6 = \gamma \cap \varphi.$$

Находим окружность пересечения плоскости – посредника γ со сферой Φ - m



Находим точки пересечения построенной окружности сечения сферы **m** и горизонтали **5,6** плоскости φ:

M,N = (5,6) ∩ m.



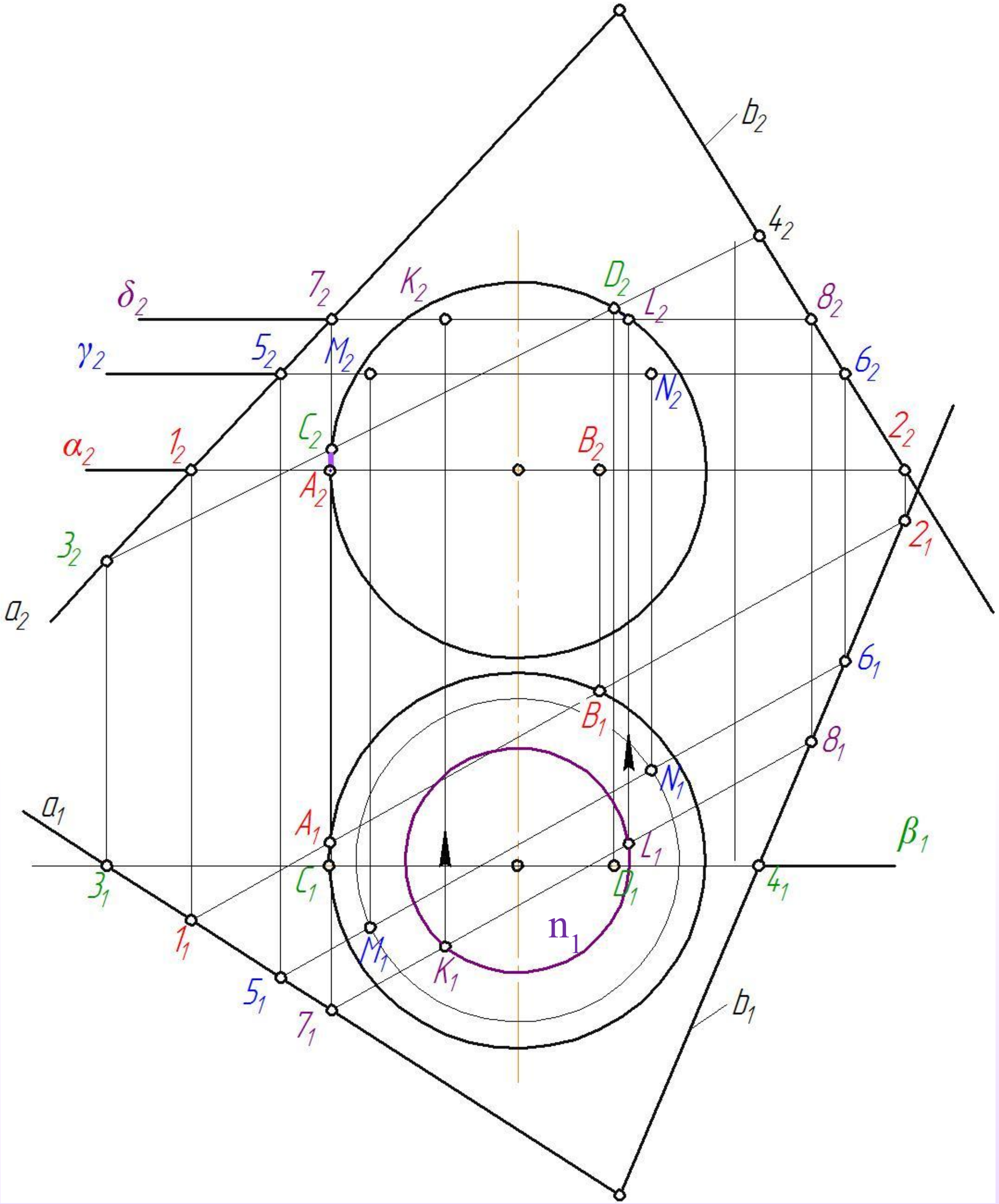
Вводим произвольно вспомогательную плоскость – посредник δ.

$\delta \parallel \Pi_1$

Находим точки пересечения плоскости – посредника δ с заданной плоскостью φ(a ∩ b) :

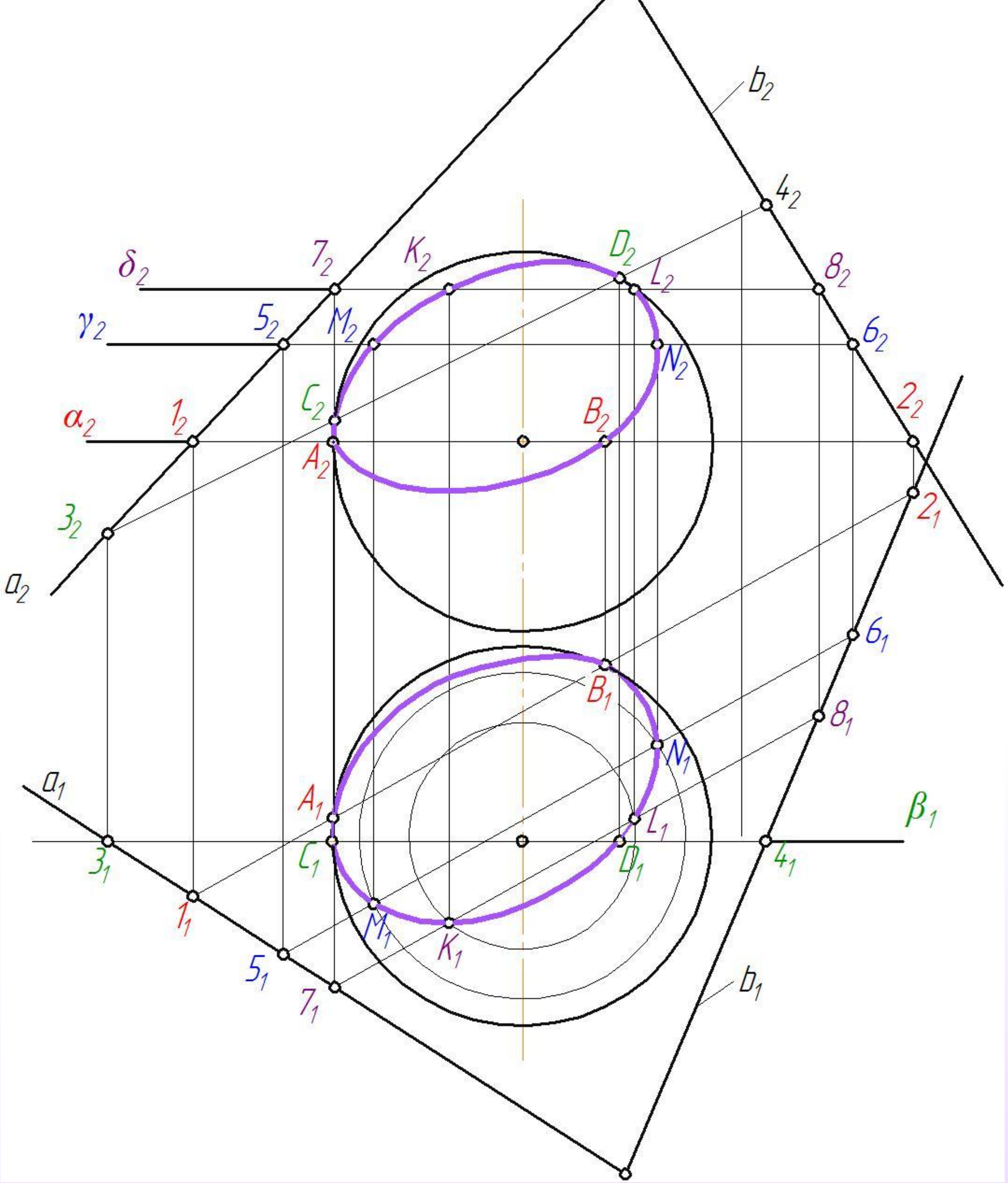
7,8 = δ ∩ φ.

Находим окружность пересечения плоскости – посредника δ со сферой Ф - n

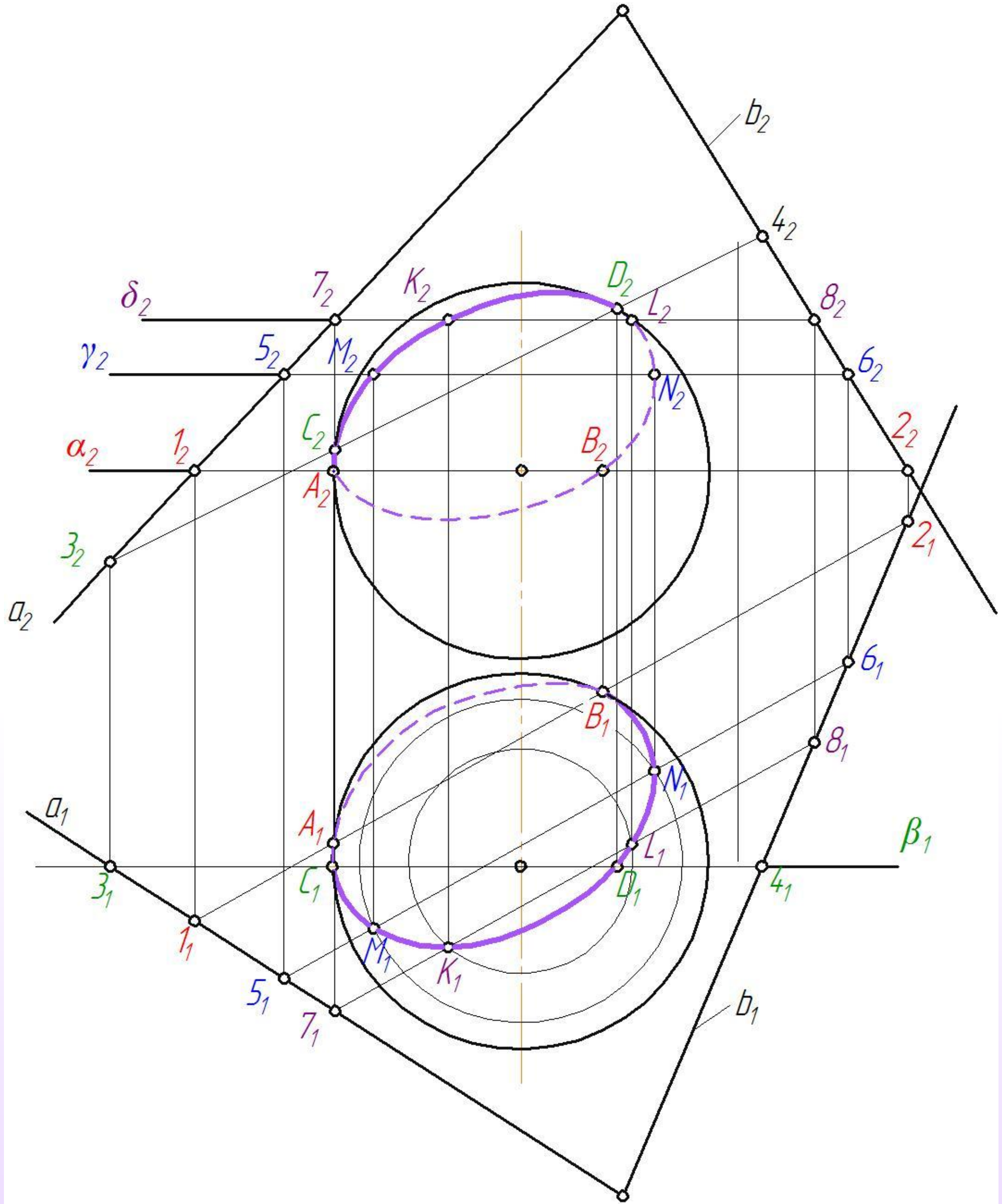


Находим точки пересечения построенной окружности сечения сферы и горизонтали сечения плоскости φ:

K,L = (7,8) ∩ n.



Точки A, B, C, D, M, N, K, L, являясь общими для данных поверхности и плоскости будут точками искомой линии пересечения.



Определяем видимость сечения.