

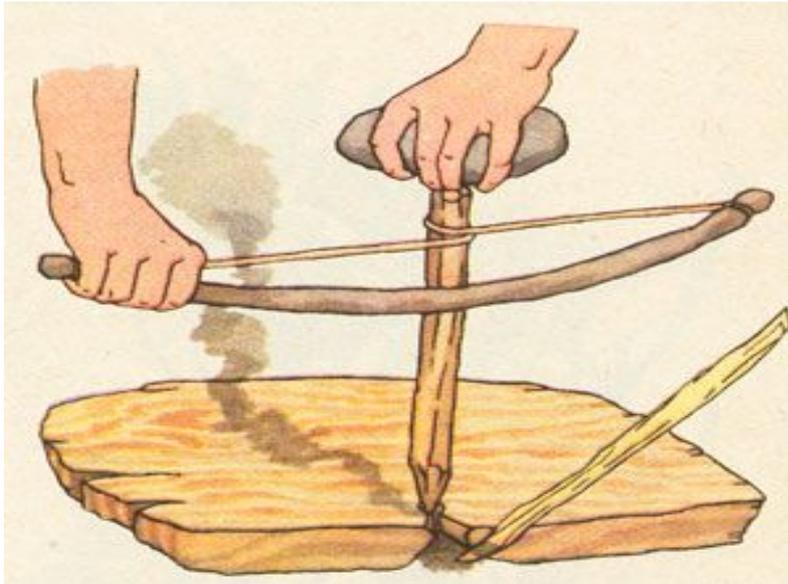
# РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

*ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.  
СТАТИКА*

ЛЕКЦИЯ 7

# ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ

РАЗОБРАТЬСЯ С РЕАКЦИЕЙ СВЯЗИ ШЕРОХОВАТОЙ (НЕ ГЛАДКОЙ) ПОВЕРХНОСТИ

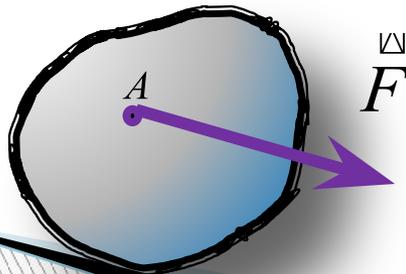


реакция связи должна быть направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться.

с шероховатой поверхностью не все так просто!

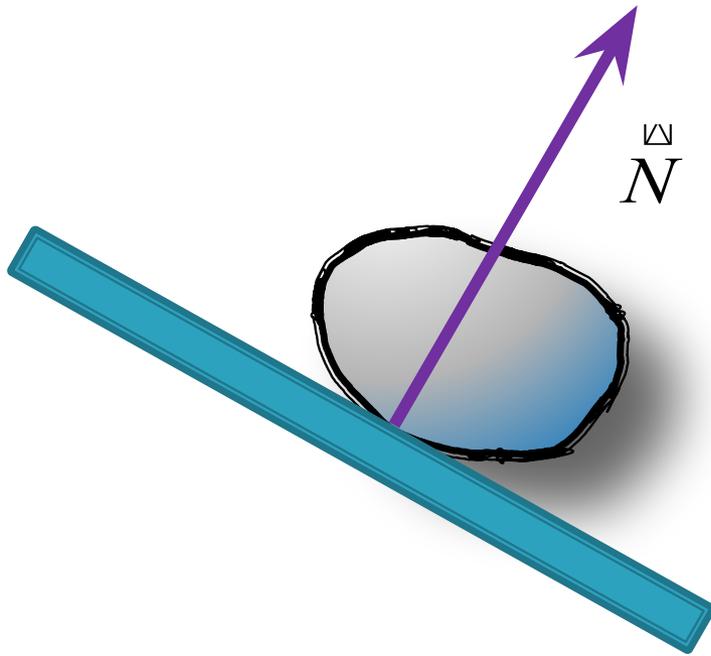
$$F > F_{\max} \Rightarrow$$

Тело начнет либо **скользить**, либо **катиться**.



Каким именно будет движение – в общем случае не очевидно !

# ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ. ГЛАДКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

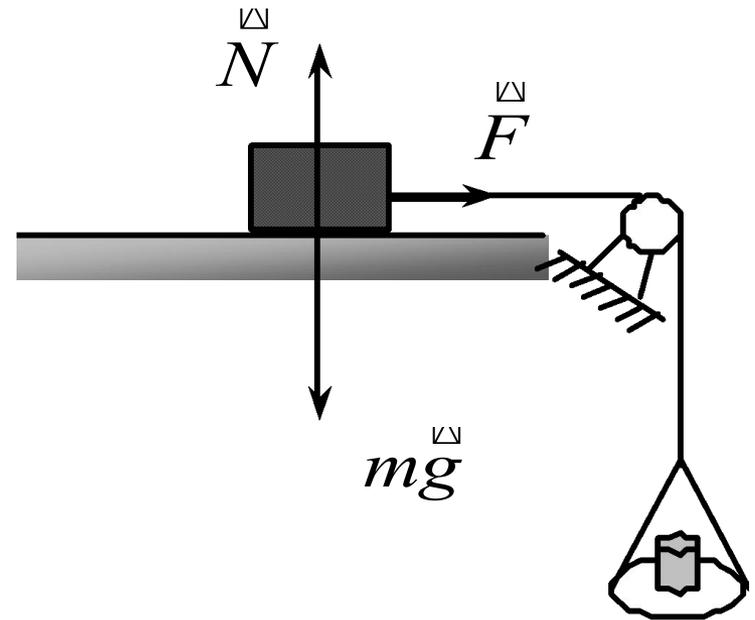


Гладкая поверхность не дает перемещаться телу по направлению внутренней к ней нормали.

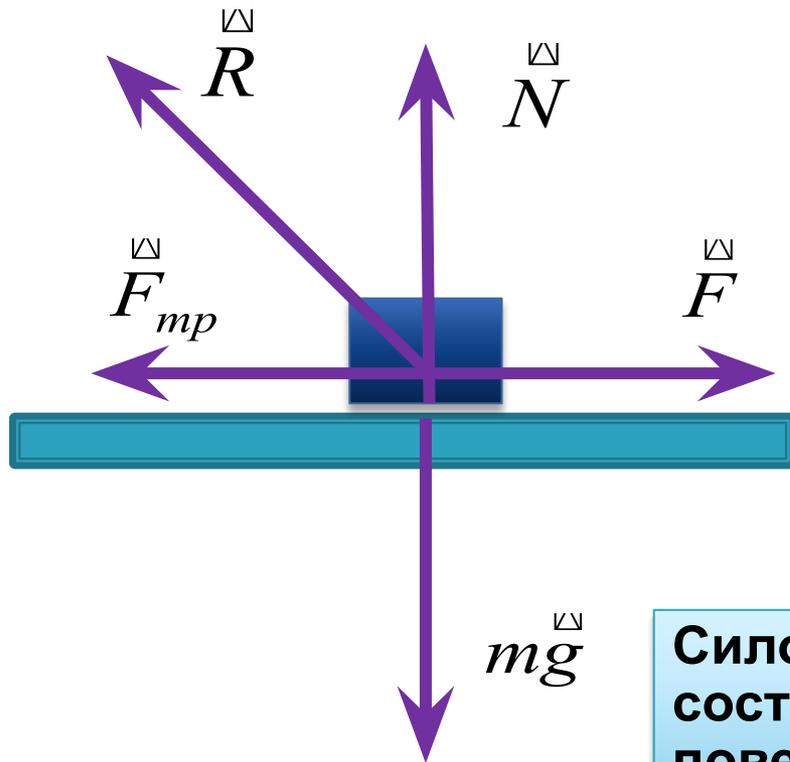
Следовательно, ее реакция направлена по внешней нормали к гладкой поверхности.

Условие равновесия тела:

$$F = 0$$



# ШЕРОХОВАТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ



$\mathbf{F} \leq \mathbf{F}_{\max}$  - тело будет в покое

$\mathbf{F} > \mathbf{F}_{\max}$  - тело начнет скользить

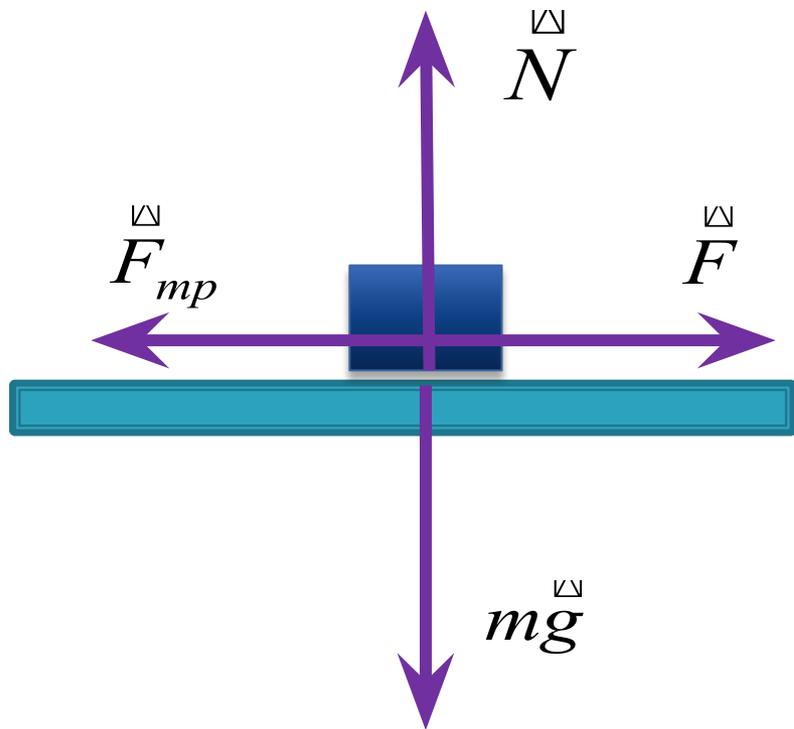
$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{mp}$$

Силой трения называется касательная составляющая реакции шероховатой поверхности

При равновесии

$$\mathbf{F}_{mp} = \mathbf{F}$$

# ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ (АМОНТОНА-КУЛОНА)



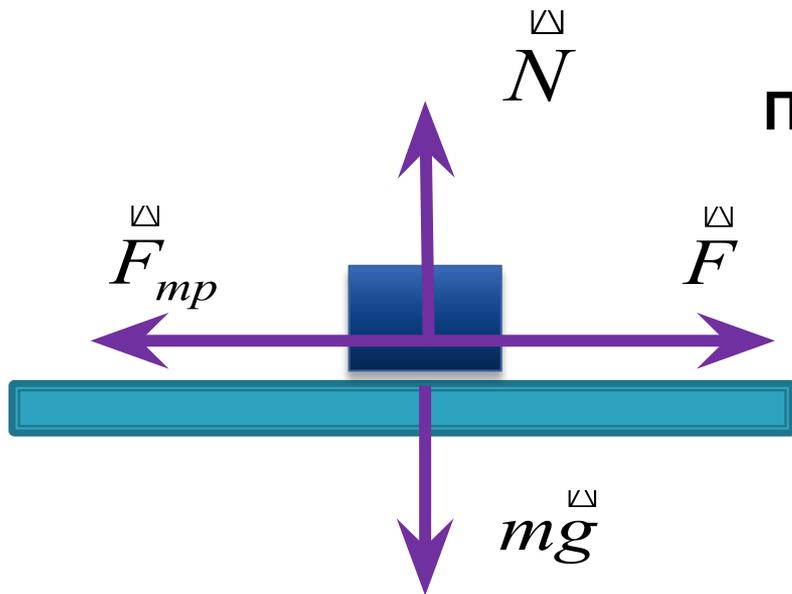
Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда активные силы стремятся сдвинуть тело.

$$0 \leq F_{mp} \leq F_{mp}^{np}$$

$$F_{mp}^{np} = f_s N$$

$f_s$  - статический коэффициент трения скольжения, зависит только от материалов соприкасающихся тел и не зависит от площади их соприкосновения.

# ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ (ЗАМЕЧАНИЯ)



При движении

$$F_{тр}^{np} = f_d N$$

$f_d$  - динамический коэффициент трения скольжения,

Как правило

$$f_d < f_s$$

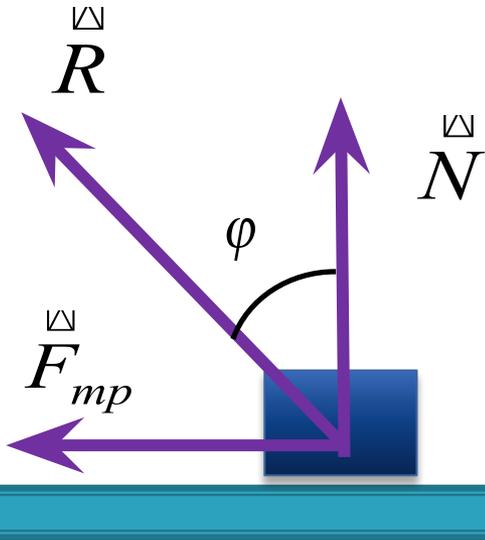
Равновесие

$$F_{тр} \leq F_{тр}^{np}$$

Предельное равновесие

$$F_{тр} = F_{тр}^{np} = f_s N$$

# УГОЛ ТРЕНИЯ



$$\operatorname{tg} \varphi = F_{mp} / N$$

$$\operatorname{tg} \varphi^{\text{пред}} = f_s$$

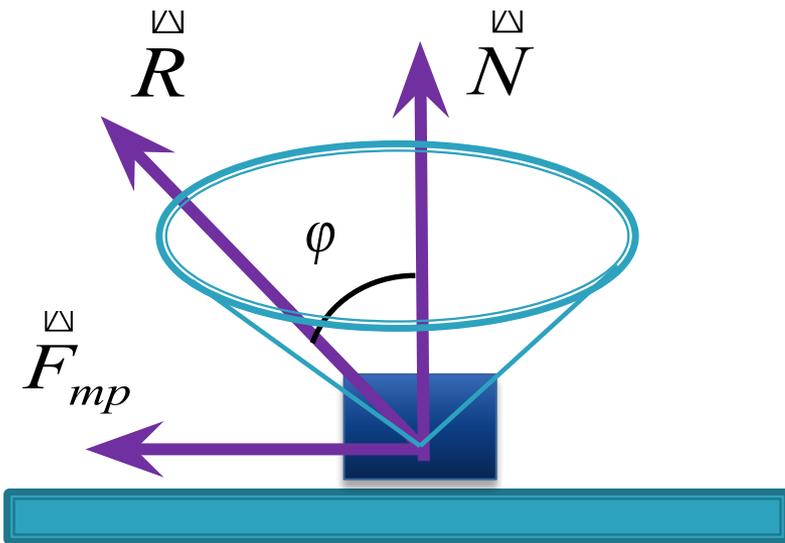
$\varphi^{\text{пред}}$  - **угол трения**

Углом трения называется угол между нормалью к поверхности и предельной реакцией поверхности

При равновесии  $0 \leq \varphi \leq \varphi^{\text{пред}}$

# КОНУС ТРЕНИЯ

Конусом трения называется фигура, образованная линиями направлений предельной реакции поверхности



Если равнодействующая активных сил лежит внутри конуса трения, то при любом ее увеличении увеличивай, тело не сдвинется (заклинится).

При равновесии

$$0 \leq \varphi \leq \varphi^{пред}$$

# ПРИЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

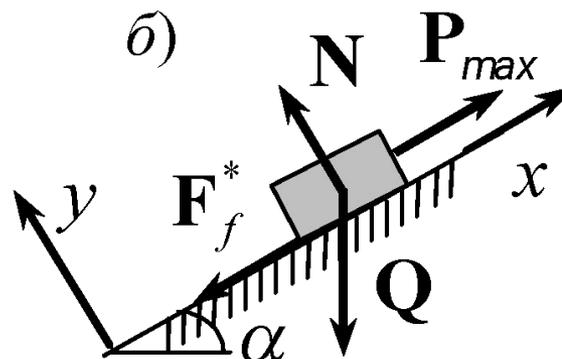
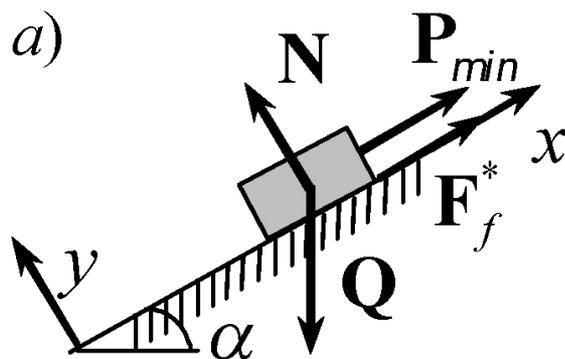
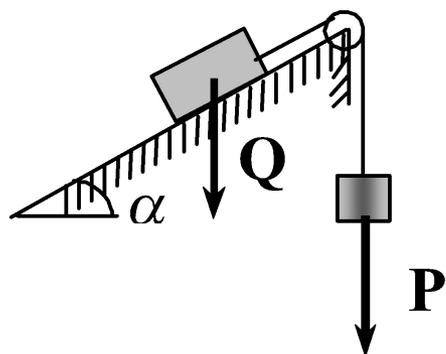
Дано:  $Q$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi^{пред} = \varphi^*$ ,  $\alpha > \varphi^*$

Определить  $P$  при равновесии

**Решение**

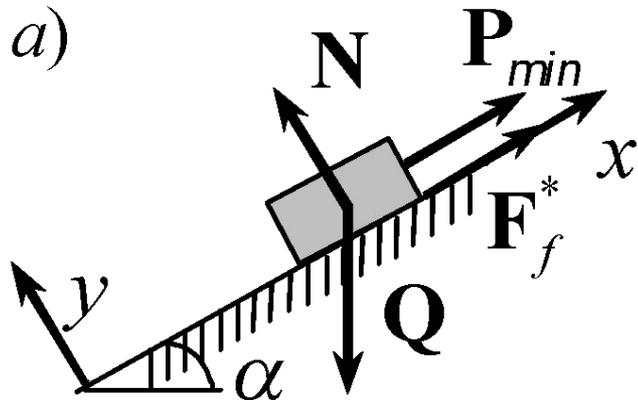
Очевидно, ответ будет иметь вид

$$P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$$



$F_f^*$  - предельное значение силы трения

# ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ



$$P = P_{\min}$$

уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad P_{\min} + fN - Q \sin \alpha = 0$$
$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad N - Q \cos \alpha = 0$$

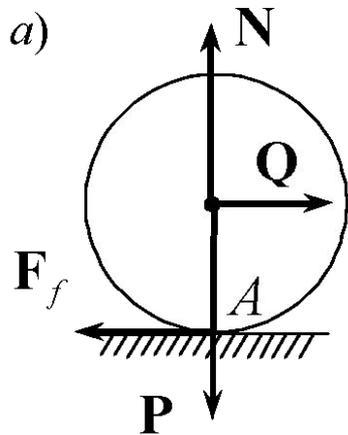
так как  $f = \operatorname{tg} \varphi^*$ , то

$$P_{\min} = Q \sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi^* Q \cos \alpha = \frac{Q}{\cos \varphi^*} (\sin \alpha \cos \varphi^* - \sin \varphi^* \cos \alpha) =$$
$$= Q \sin(\alpha - \varphi^*) / \cos \varphi^*$$

$$P_{\max} = Q \sin(\alpha + \varphi^*) / \cos \varphi^*$$

Трение придает устойчивость равновесию

# ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ



Опыт подсказывает, что диск покатится лишь при  $Q > Q_{\max}$

Из условий  
равновесия

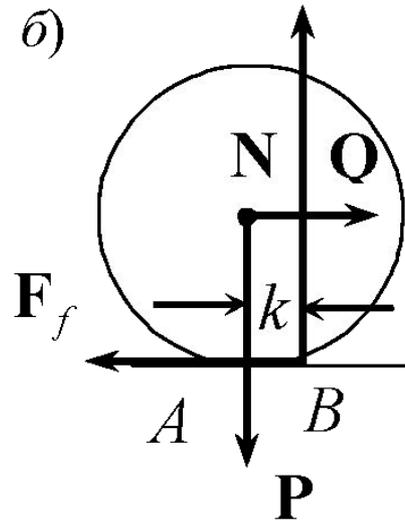
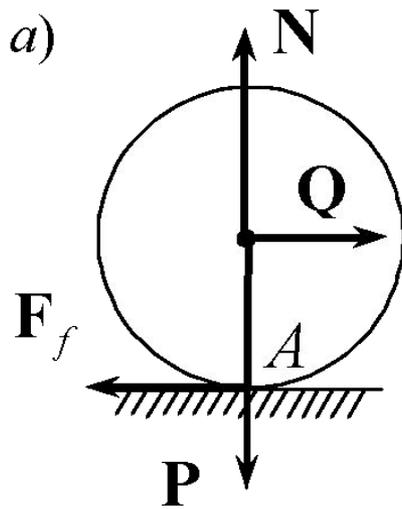
$$F_f = Q, \quad N = P$$

Вместе с тем  $\sum_i M_A(\mathbf{F}_i) = 0 \Rightarrow Q = 0$

Противоречие с  
опытом!

# ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

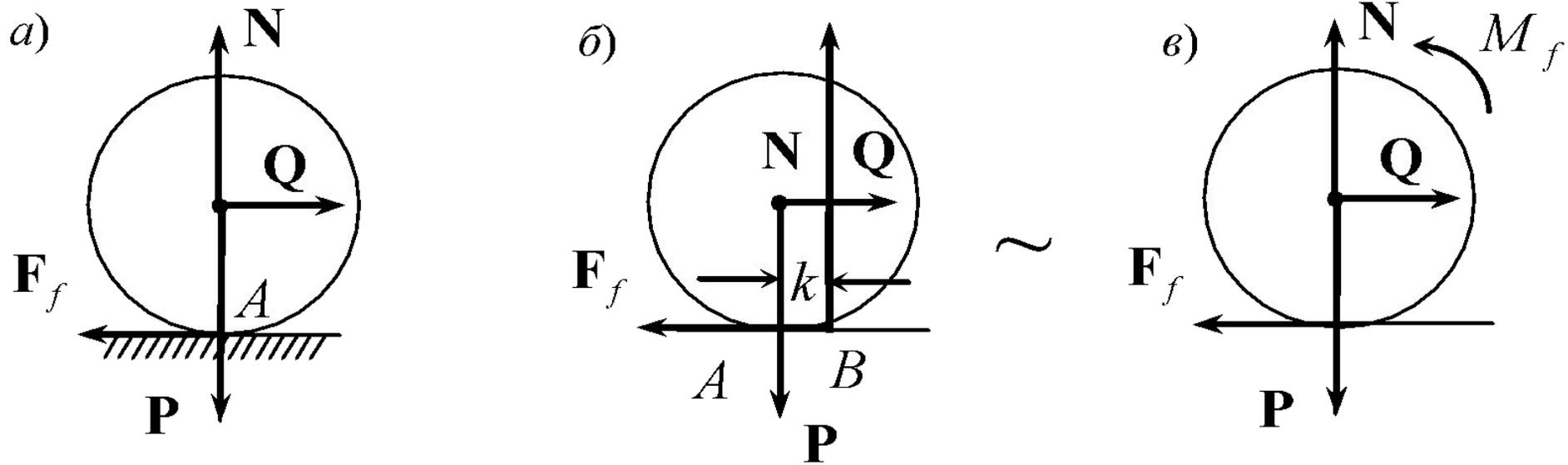
Причина: Реальные тела – не абсолютно твердые.



$$Q_{\max} R = Nk$$

***k*** – коэффициент трения  
качения

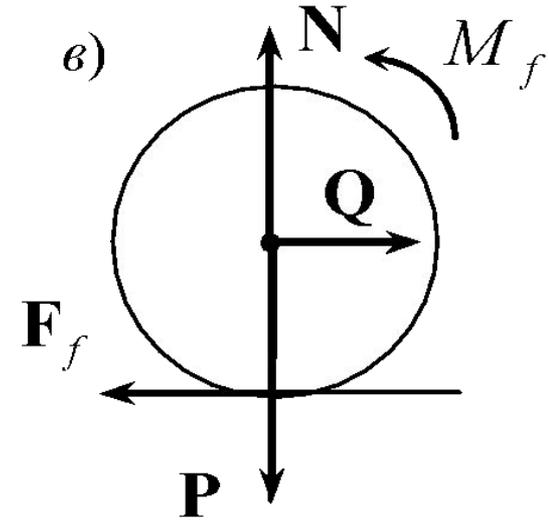
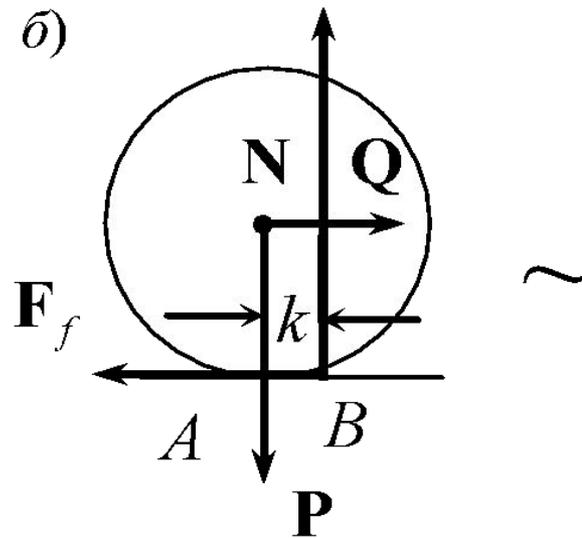
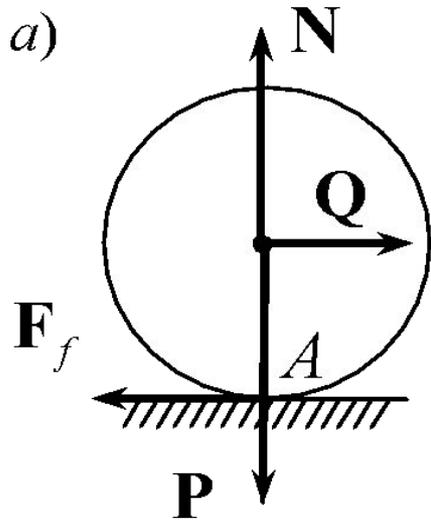
# ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ



Лемма о параллельном переносе силы

$M_f$  – **момент сопротивления качению**

# ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ



**1. Направление**  $M_f$  в сторону, противоположную той, куда активные силы стремятся повернуть тело.

**2. Величина**  $M_f$  :  $0 \leq M_f \leq M_f^{пред}$ ,  $M_f^{пред} = kN$

**3.**  $k$  – зависит лишь от свойств материалов соприкасающихся тел.