

ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

ЛЕКЦИЯ 14

**Математический факультет. Кафедра математического
моделирования**

Цель лекции – исследование способов представления графов для анализа графовых отношений и их аналитического описания

Термины

Базовые понятия:

- множество
- граф
- бинарное отношение
- смежность
- инцидентность
- цикл
- матрица

Ключевые слова:

- матрица смежностей
- матрица инциденций
- матрица циклов
- алгебраическая форма представления графов (АФПГ)
- кубическая форма представления графов (КФПГ)

Литература

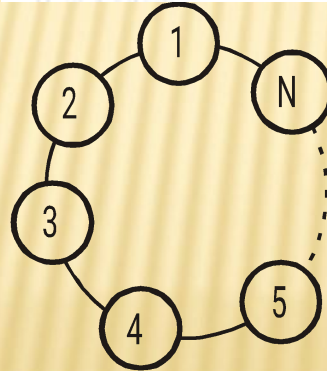
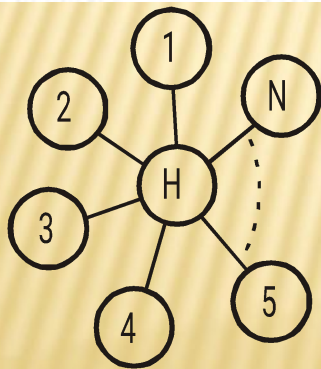
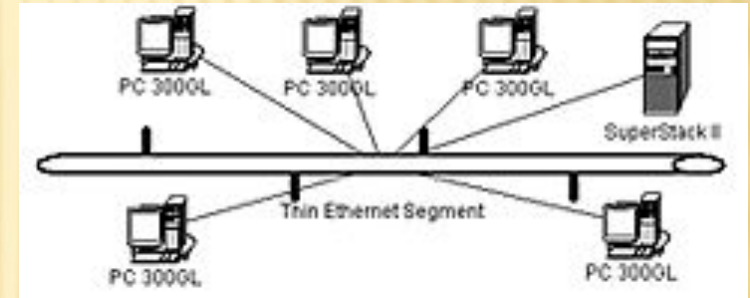
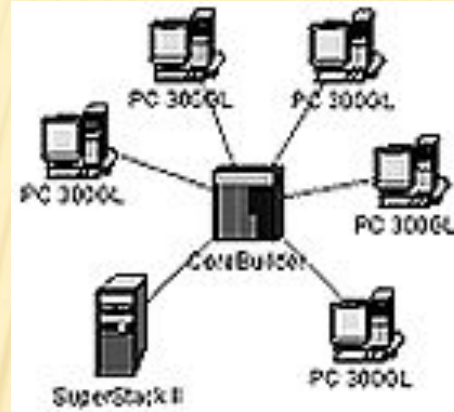
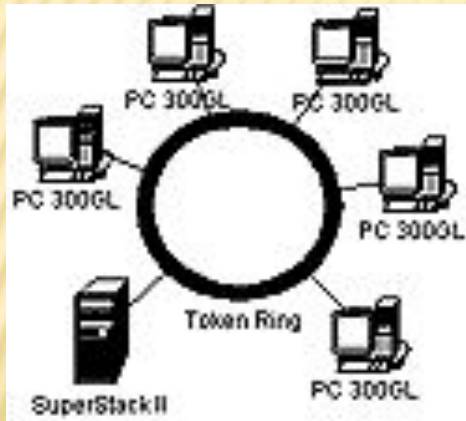
- ◆ **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. **С. 25-27.**
- ◆ **Харари Ф.** Теория графов: Пер. с англ. / под ред. Гаврилова. М.: Мир, 1973. **С. 54-57, 178-184.**
- ◆ **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. **С. 201-205.**
- ◆ **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу “Дискретна математика”. Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.
- ◆ **Свами М., Тхуласираман К.** Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. **С. 64-77, 100-102.**

Актуальность и практическая направленность. 1

- ▣ Основные принципы теории графов используются при построении математической модели для проектирования и анализа сетей ЭВМ
- ▣ Наиболее удобной моделью сети является графовая структура
- ▣ Описание графовой структуры должно быть технологичным для машины
- ▣ Матричная форма является удобной для представления графов
- ▣ Матрицы позволяют раскрыть структуру графа
- ▣ Матрицы инцидентий и циклов используются при исследовании электрических цепей, входят в качестве коэффициентов в уравнение Кирхгофа, описывающее цепь
- ▣ Матрицы смежностей служат основой подхода к описанию и анализу модели компьютерной сети

Актуальность и практическая направленность. 2

Базовые сетевые топологии типа «кольцо», «звезда», «шина» и соответствующие им графы

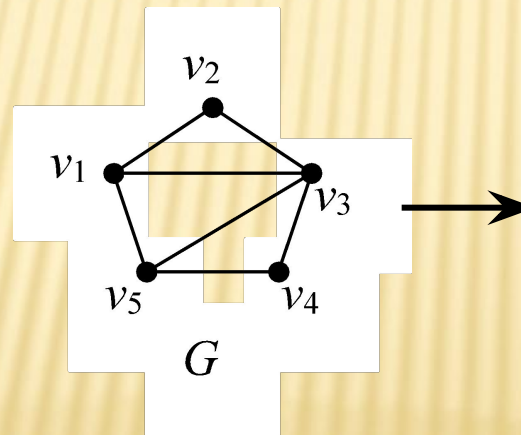


Матрица смежностей

- Матрица смежностей – двумерная таблица $C = \|c_{ij}\|$ размера $n \times n$, где n – число вершин, элемент которой определяется как

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ adj } v_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Пример



$$A = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Матрица смежностей: свойства

- Для неориентированного графа матрица смежностей является симметричной
- Для ориентированного свойство симметрии не обязательно. Элемент матрицы определяется как

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists (v_i, v_j); \\ 0, & \nexists (v_i, v_j). \end{cases} \quad (v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$$

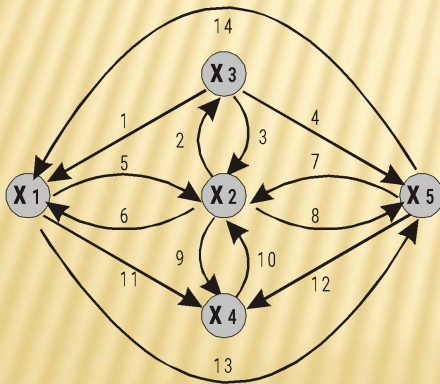
- Суммы элементов матрицы смежностей по строкам равны степеням соответствующих вершин графа

Матрица инциденций

- Матрица инциденций $B = \|b_{ij}\|$ ориентированного графа $G = \langle V, U \rangle$ без петель, где $|V| = p$, $|U| = q$, есть матрица размера $p \times q$, элемент которой определяется следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ — начало дуги } u_j; \\ -1, & \text{если } v_i \text{ — конец дуги } u_j; \\ 0, & \text{если } v_i \text{ — не инцидентна дуге } u_j. \end{cases}$$

- Пример



→ S =

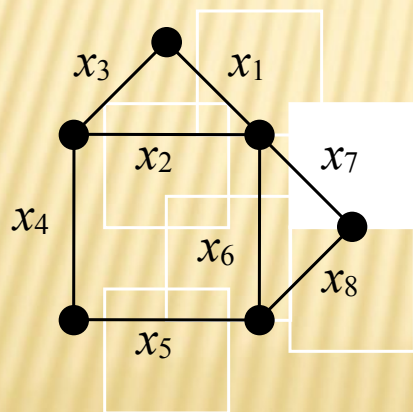
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x1	-1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	1	-1
x2	0	1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1	0	0	0	0
x3	1	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x4	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	-1	0	0
x5	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1	-1	1

Матрица циклов

- Матрица циклов $Z = \|z_{ij}\|$ графа – матрица размерности $m \times n$, m – количество циклов, n – число ребер, элемент z_{ij} которой определяется так

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й цикл содержит ребро } x_j; \\ 0, & \text{если } i\text{-й цикл не содержит ребро } x_j. \end{cases}$$

- Пример

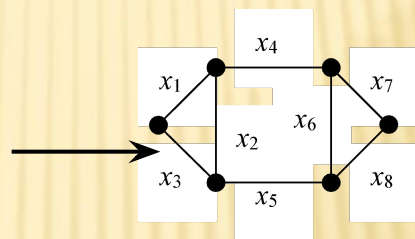


$$Z = \begin{array}{cccccccc|l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & Z_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & Z_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & Z_5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & Z_6 \end{array}$$

Неоднозначность представления графа матрицей циклов

Пример

$$Z = \begin{array}{cccccccc|l} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & Z_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & Z_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & Z_5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & Z_6 \\ \hline \end{array}$$



$$Z_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$Z_4 = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$Z_2 = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$$

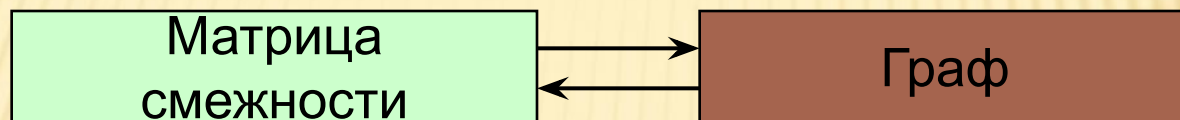
$$Z_5 = \{x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}$$

$$Z_3 = \{x_6, x_7, x_8\}$$

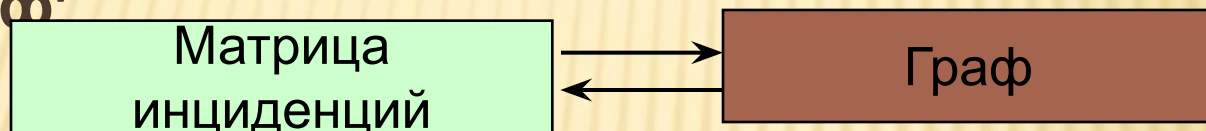
$$Z_6 = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8\}$$

Сравнение матричных способов представления графов

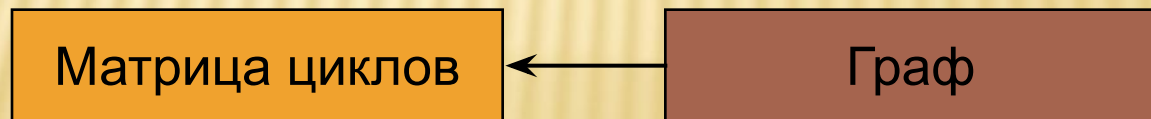
- По матрице смежностей можно однозначно восстановить граф:



- Матрица инциденций однозначно представляет граф:



- По матрице циклов нельзя однозначно восстановить граф: если ребро не принадлежит ни одному циклу, то по матрице циклов нельзя сказать, принадлежит ли оно графу



Сложность матричных способов представления графов

- Выбор наилучшего представления определяется требованиями конкретной задачи
- Используются комбинации или модификации известных представлений
- Способы представления графов в памяти компьютера различаются объемом занимаемой памяти и скоростью выполнения операций
- Для матрицы смежностей сложность представления определяется как $O(n^2)$, где n – количество вершин в графе
- Для матрицы инциденций сложность определяется как $O(nt)$, где n, t – число вершин и ребер соответственно

Time-Out



Алгебраическая форма представления графов (АФПГ)

Свойства модели:

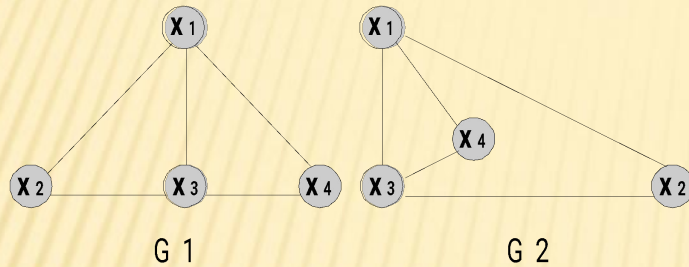
- компактность представления информации о графе;
- привязка к распространенному математическому аппарату;
- наличие эффективных методов анализа графовых отношений;
- возможность аналитического описания функций и структур.

Вершины графа и переменные в булевой алгебре связаны между собой системой отношений

Аппарат булевой алгебры может быть применен для описания графовых структур

Тест-вопросы

1. Являются ли графы равными:



2. Если две вершины соединены одной дугой, они называются
а) инцидентными
б) смежными