НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Направления обучения

«Архитектура»
«Реконструкция и реставрация архитектурного наследия»
«Дизайн архитектурной среды»
«Градостроительство»

Лекция 1

Солодухин Е.А.,
2017

Начертательная геометрия изучает методы построения изображений пространственных объектов на плоскости.

Базовые геометрические элементы начертательной геометрии

- **Точка** – абстрактное математическое понятие. Не имеет измерений - нульмерный объект .
- **Линия** – непрерывное одномерное множество точек (цепочка точек). Непрерывная последо-вательность положений точки, перемещаю-щейся в пространстве по определенному закону (траектории). Измерение : только длина. Толщины нет.
- **Поверхность** – непрерывное двумерное мно-жество точек. Непрерывная последователь-ность положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону. Измерения : длина,

Проективное пространство

Евклидово пространство, дополненное несобственными элементами, называют <u>проективным</u>.

Элемент, удаленный в бесконечность, называется несобственным.
Несобственными элементами пространства могут быть точки, прямые и плоскости

<u>Условно принято –</u>

параллельные между собой прямые

<u>пересекаются</u>

в бесконечно удаленной точке F^{∞} -

несобственной точке пространства.

$$(a \parallel b \parallel c\ldots) \Rightarrow (a \cap b \cap c\ldots = F^{\infty})$$

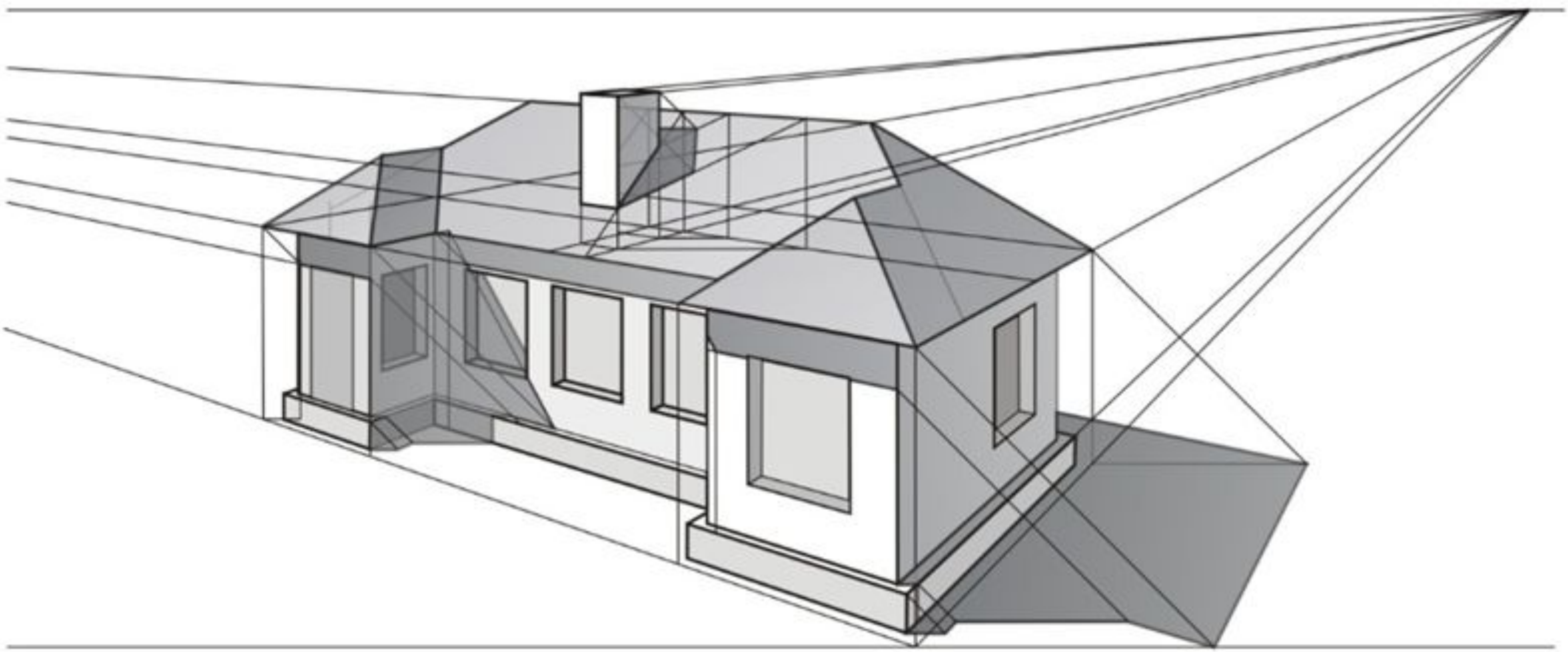
Изображение геометрических объектов

В зависимости от функционального назначения, изображения могут быть разделены на одно- и много-картинные.

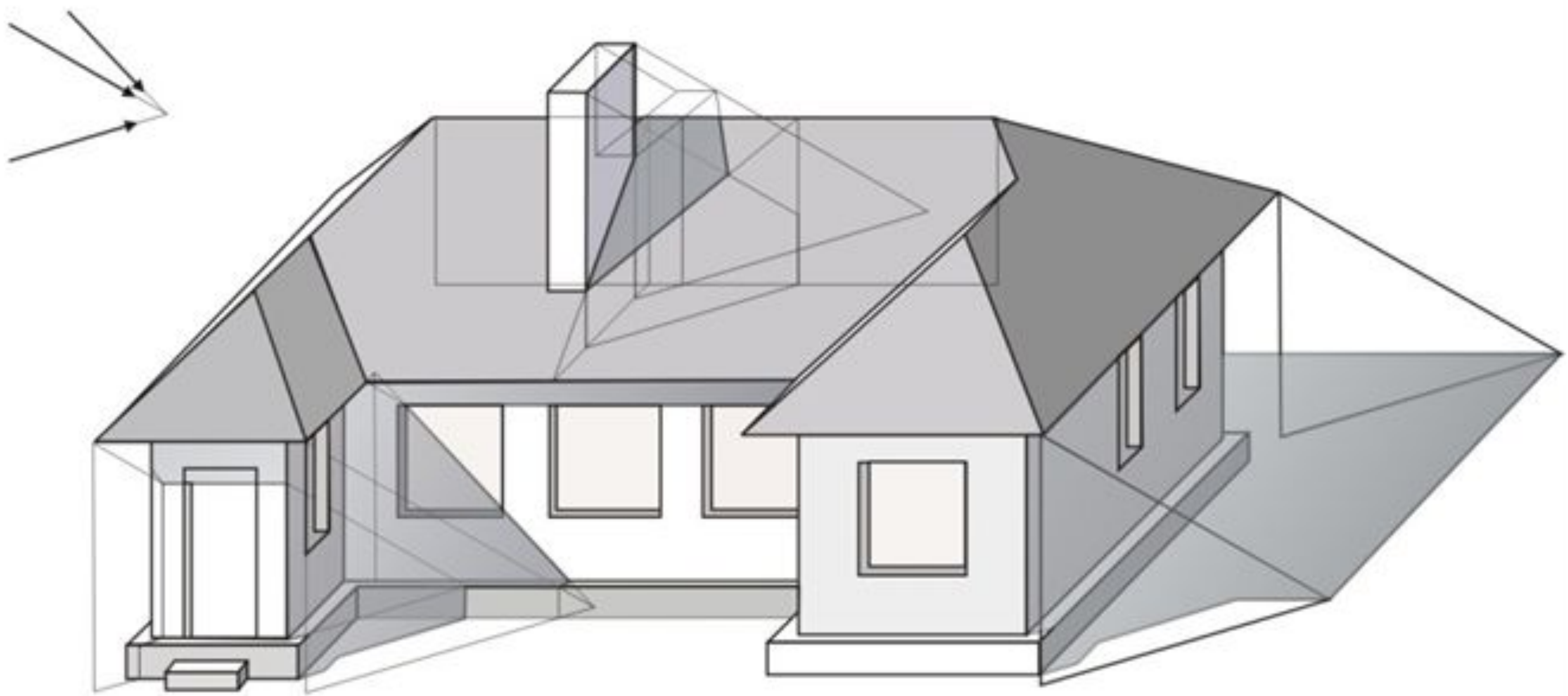
Одно-картинные изображения используются только как наглядные изображения (перспектива, аксонометрия).

Много-картинные изображения применяются для разработки проектной и рабочей документации (ортогональные проекции).

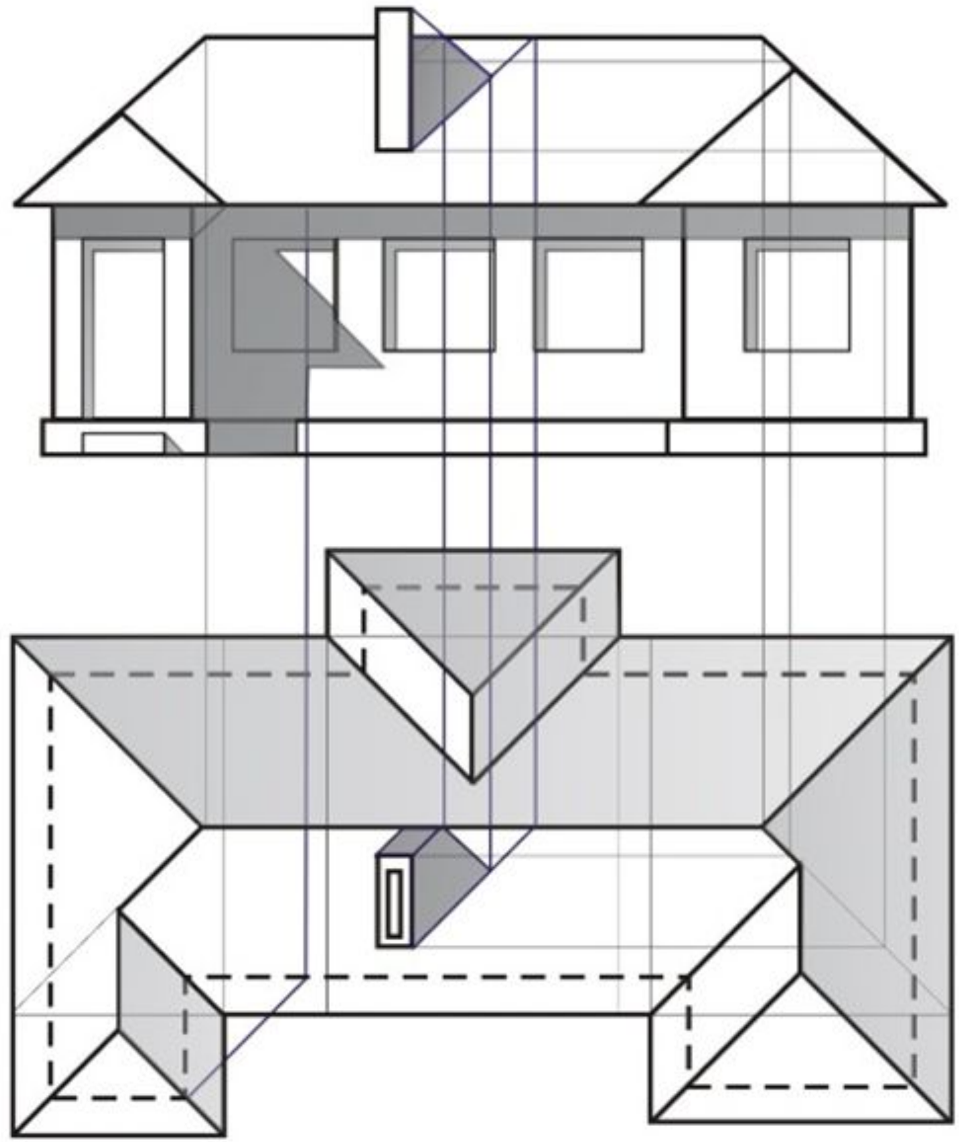
Перспектива



Аксонометрия



Ортогональные проекции



Метод проецирования

$\text{П}_\text{к}$ – плоскость проекций

S – центр проецирования

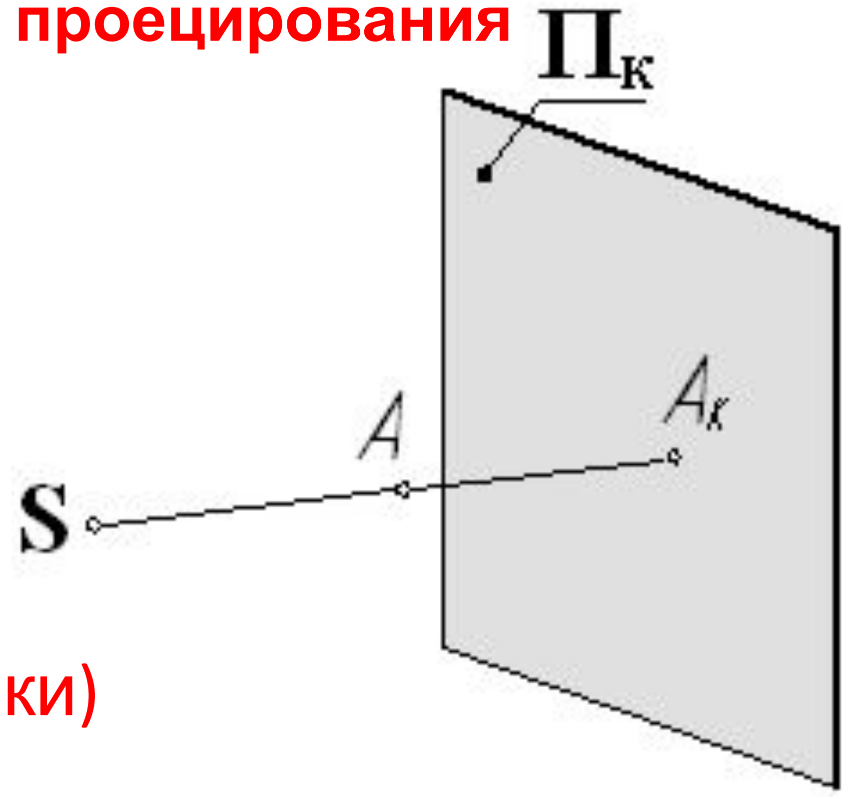
Аппарат проецирования

A – объект (точка)

SA – проецирующая прямая

Закон проецирования

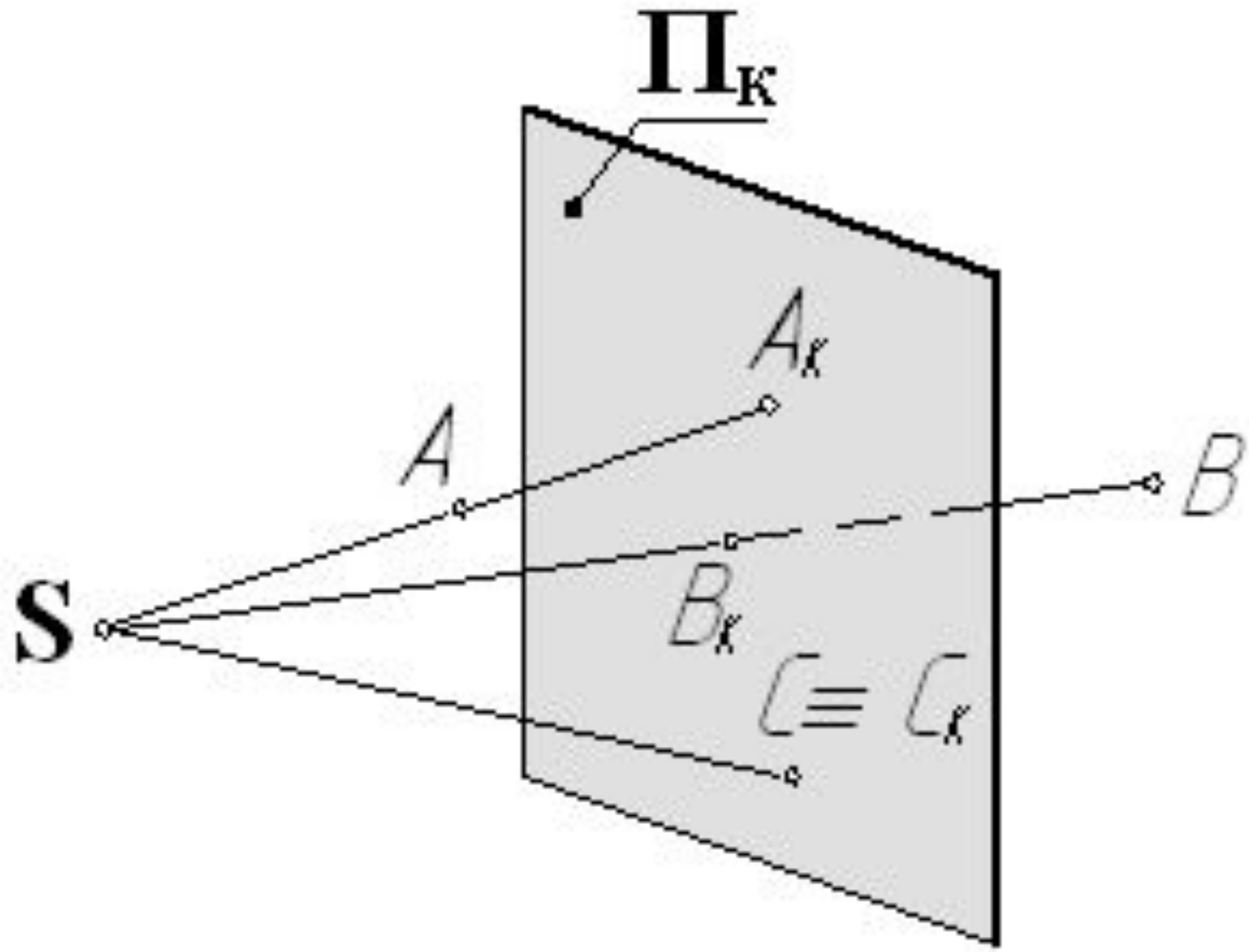
$$SA \cap \text{П}_\text{К} = A_К$$



$A_К$ – проекция объекта (точки) A

на плоскости проекций $\text{П}_\text{к}$

Все изображения, полученные на основе метода проецирования называются проекционными



Для любой точки пространства

$$SA \cap П_к = A_к \quad SB \cap П_к = B_к \quad SC \cap П_к = C_к$$

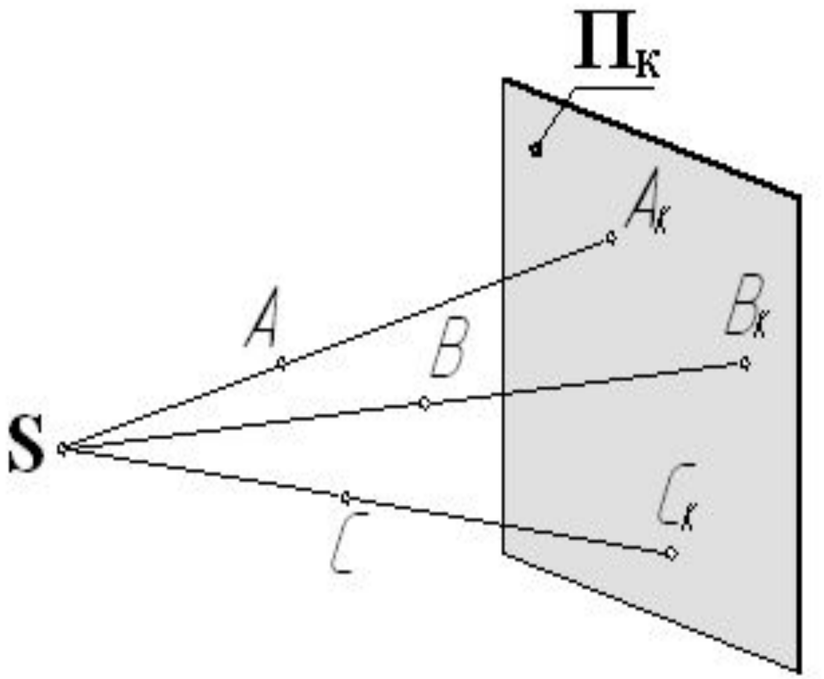
$$SA \cap SB \cap SC \cap \ldots = S$$

Варианты метода проецирования

Центральное проецирование

S (*центр проецирования*) -– **реальная точка**.

$$\mathbf{S}\boldsymbol{A} \cap \mathbf{S}\boldsymbol{B} \cap \mathbf{S}\boldsymbol{C} \ldots = \mathbf{S}$$

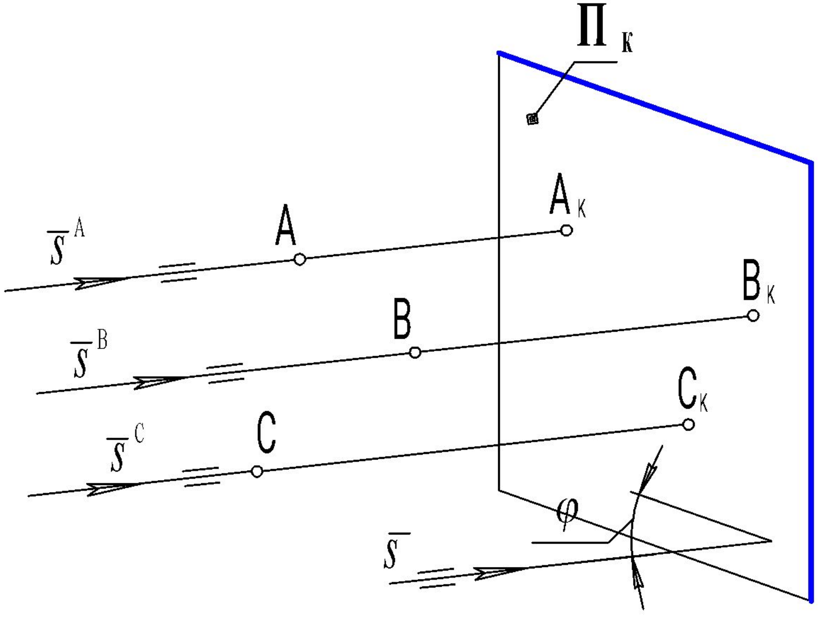


Параллельное проецирование

S *(центр проецирования)* – **<u>несобственная точка</u>**

$$\mathbf{S \equiv S^{\infty}}$$

$$\mathbf{S}\boldsymbol{A} \cap \mathbf{S}\boldsymbol{B} \cap \mathbf{S}\boldsymbol{C} \ldots = \mathbf{S}^{\infty}$$

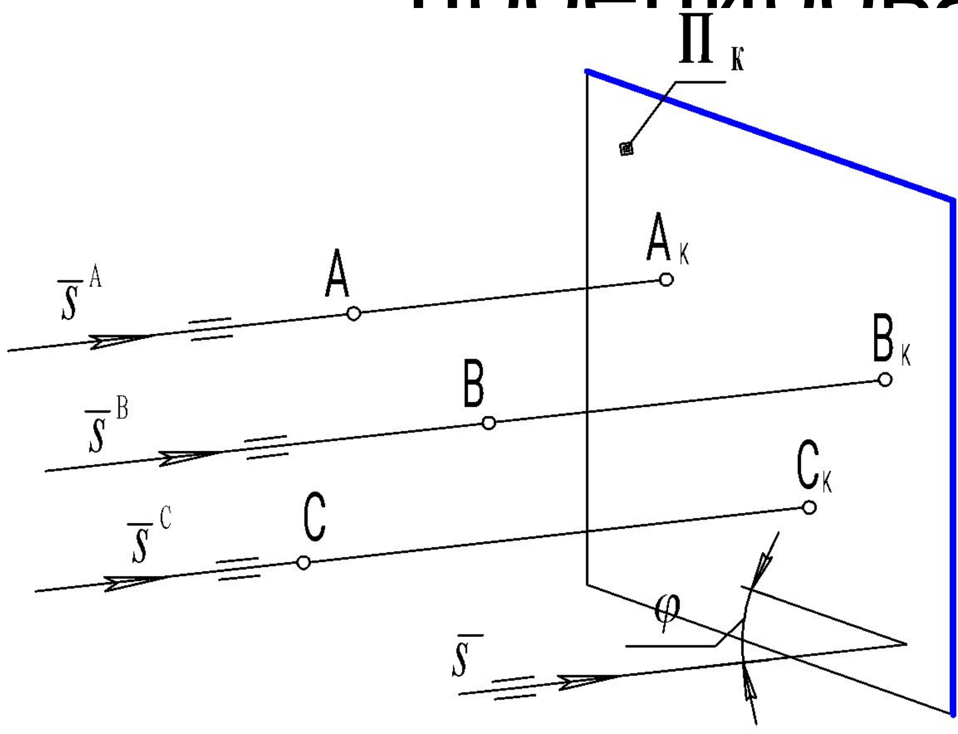


следовательно

$$\mathbf{S}^{\infty}\boldsymbol{A} \parallel \mathbf{S}^{\infty}\boldsymbol{B} \parallel \mathbf{S}^{\infty}\boldsymbol{C} \parallel \ldots \parallel \overline{\mathrm{s}}$$

$\overline{\boldsymbol{s}}$ – *направление проецирования;* $\quad \mathbf{S}^{\infty} \in \boldsymbol{s}$

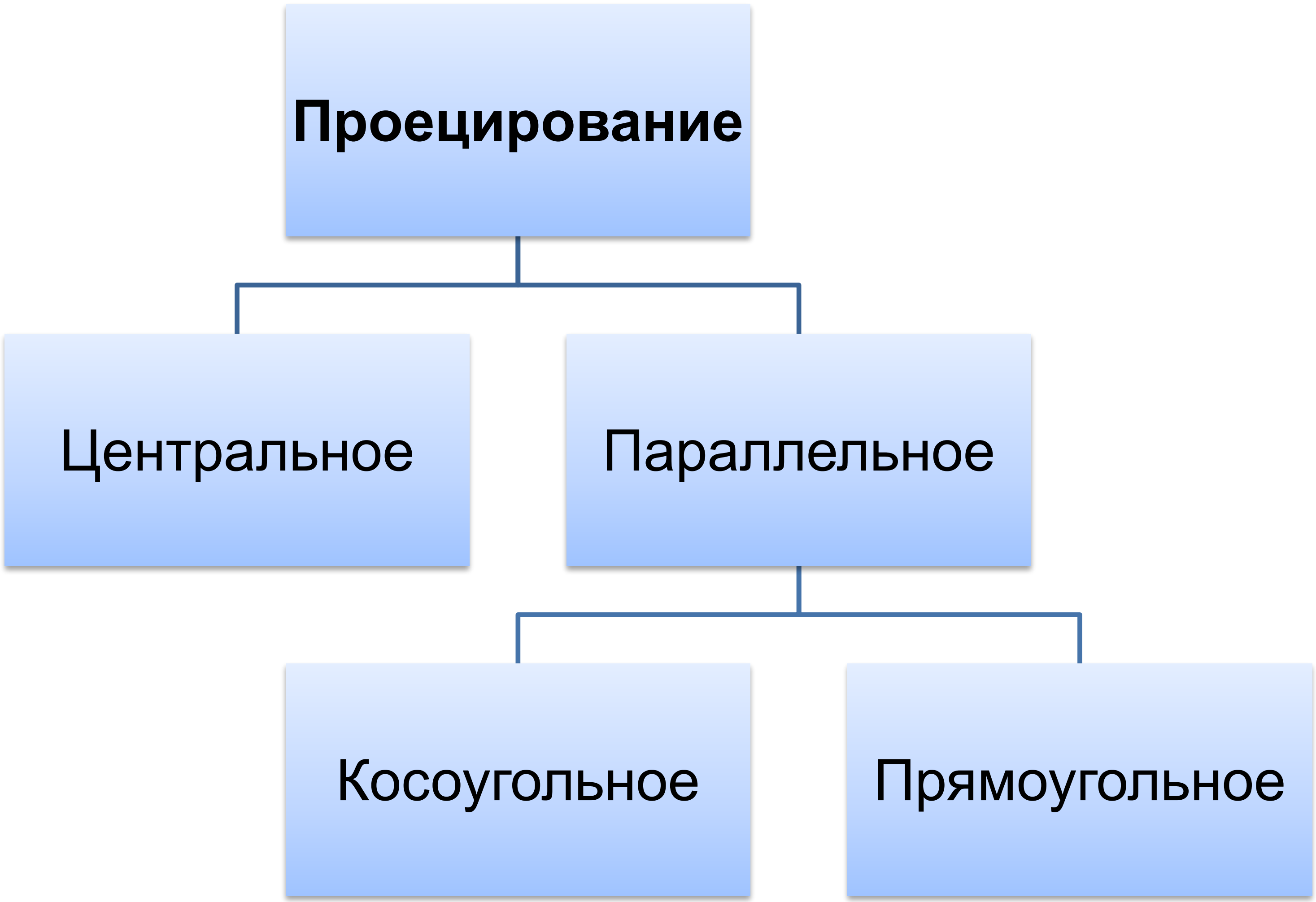
Виды параллельного проецирования



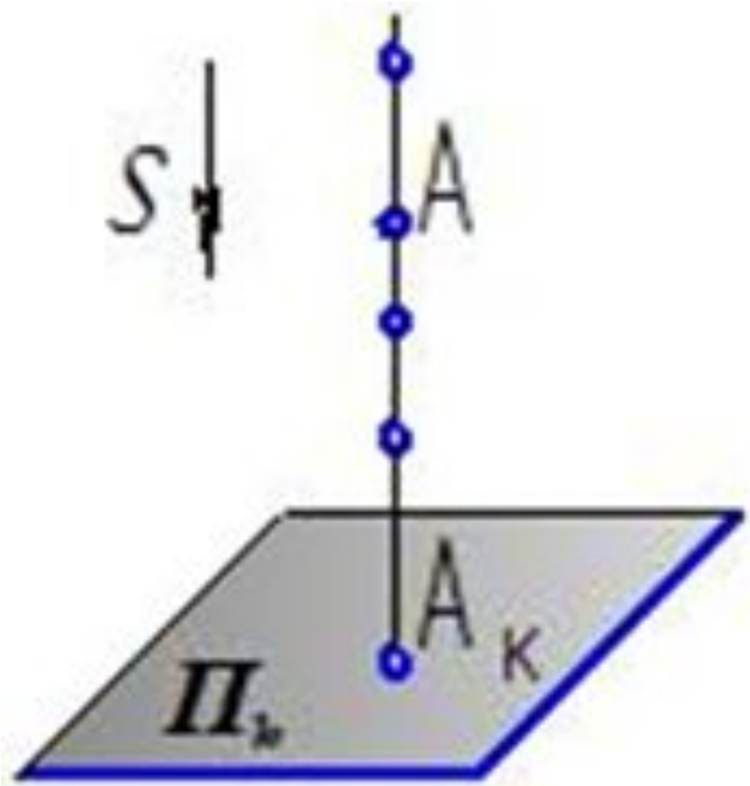
$(\bar{s} \wedge \Pi_к) = \angle\ \varphi$

$\angle\varphi = 90^\circ \vee (\bar{s} \perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование прямоугольное (ортогональное)

$\angle\varphi \neq 90^\circ \vee (\bar{s} \not\perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование косоугольное


Проецирование
Центральное
Параллельное
Косоугольное
Прямоугольное

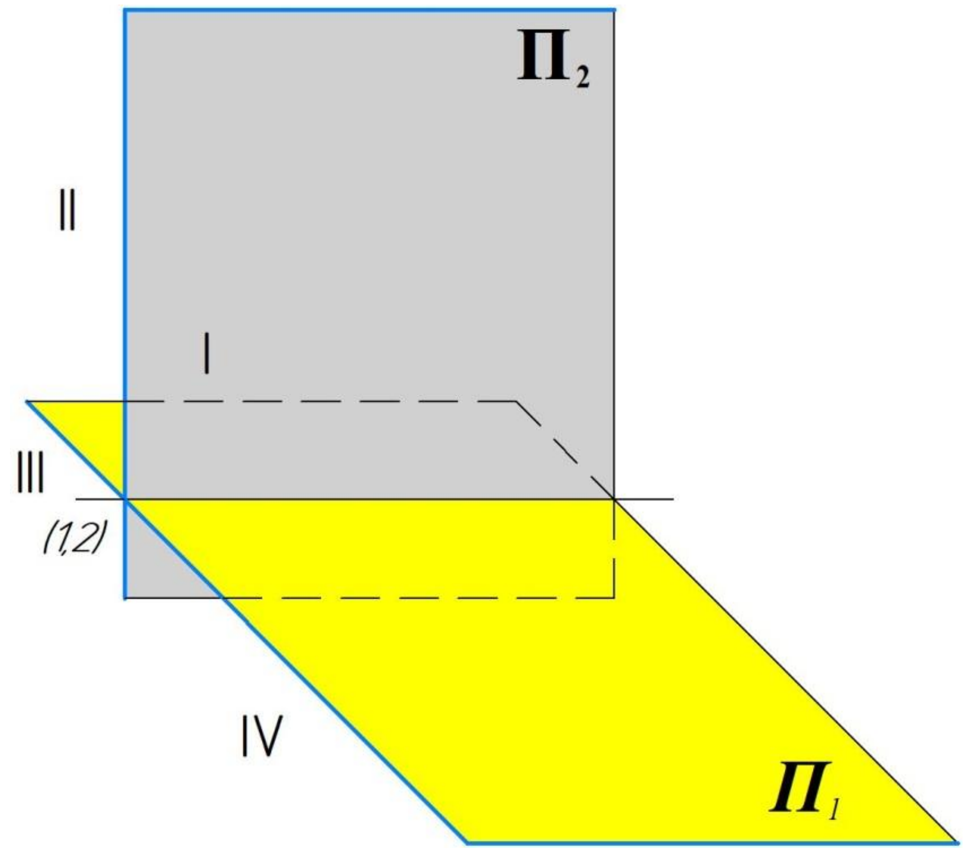
Все проекционные изображения должны обладать свойством обратимости – способностью по изображению получить реальные размеры и форму изображенного объекта, а также положение объекта в пространстве.



Проекции $\boldsymbol{A_к}$ соответствует любая точка на проецирующей прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{A}$.

Одна проекция точки без каких-либо дополнительных условий однозначно не определяет ее положение в пространстве, т. е. изображение не обратимо.

Метод Монжа



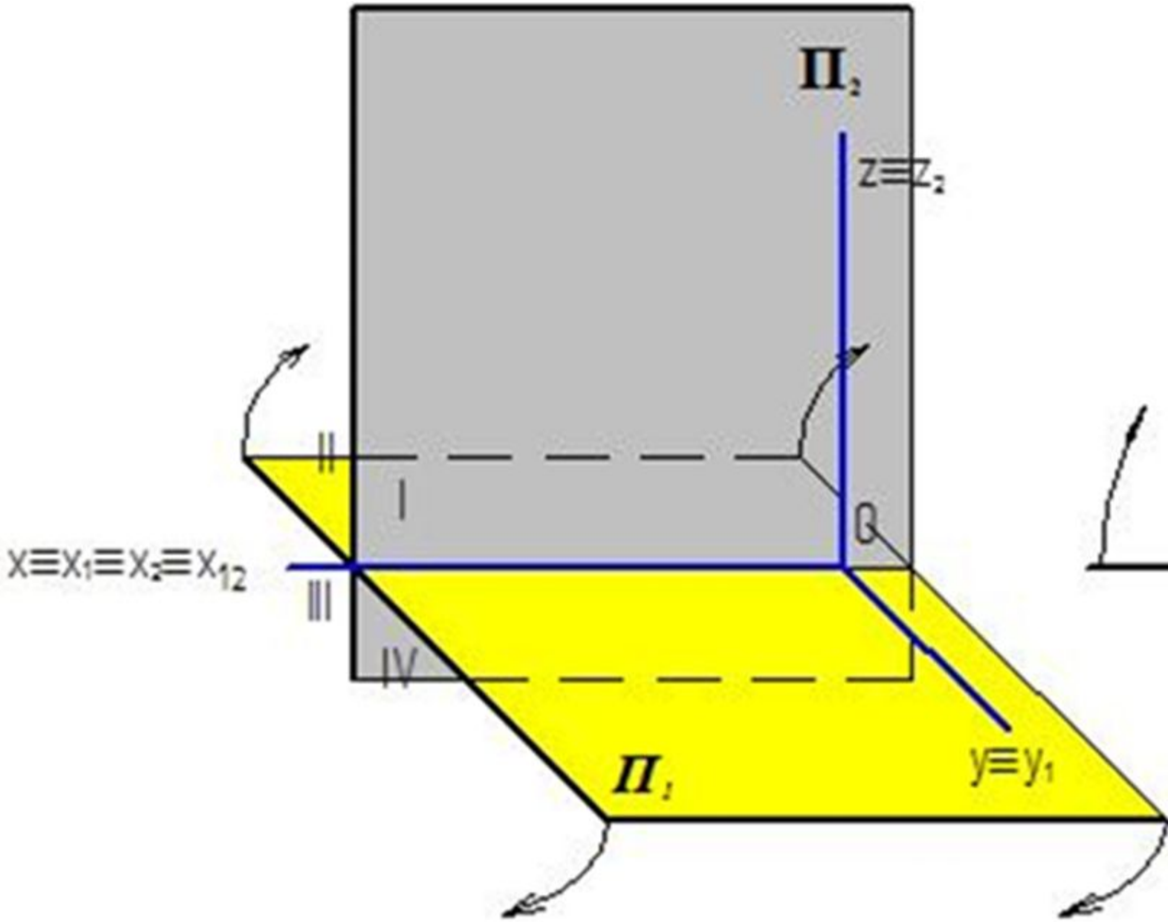
$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$

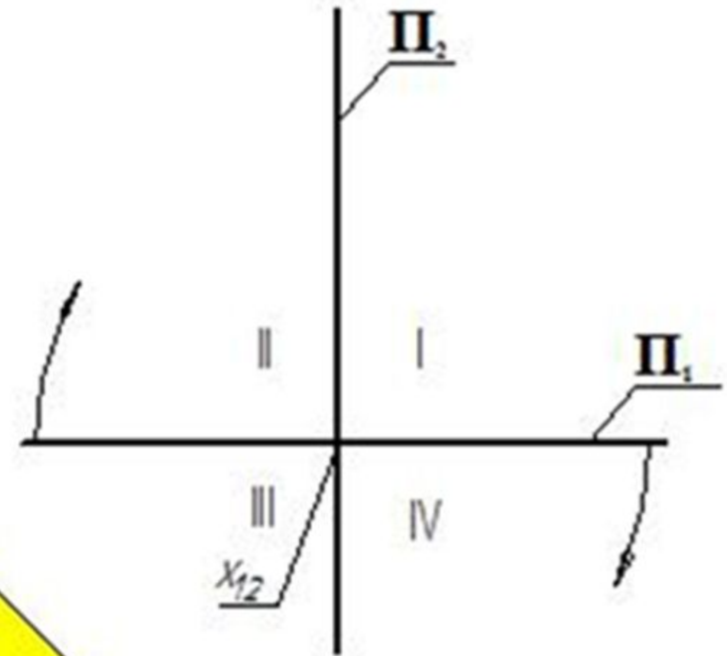
$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = (1,2)$$

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций

Π_2 – фронтальная плоскость проекций

I, II, III, IV – четверти пространства





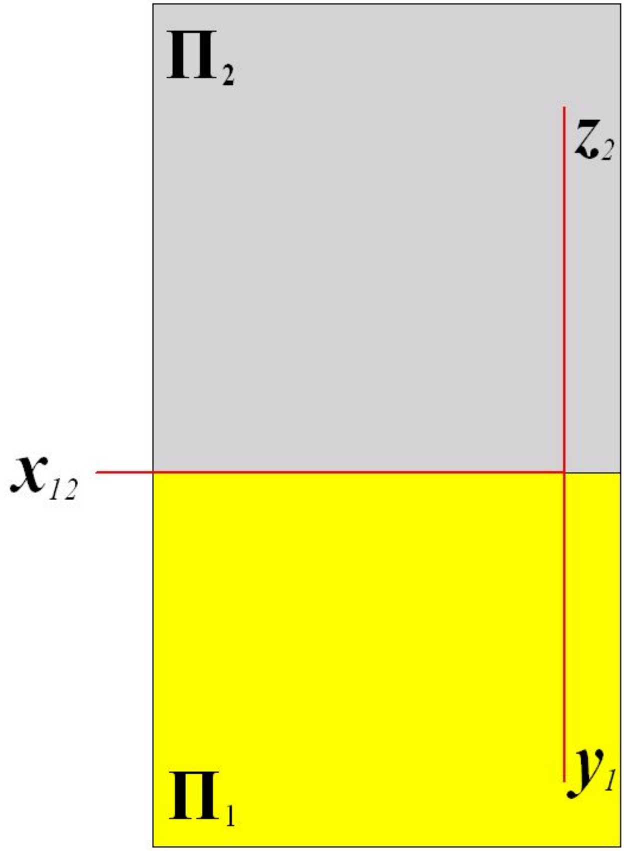
Систему координат **Oxyz** совмещают с плоскостями проекций: **Oxz≡П$_2$**, **Oxy≡П$_1$**, **Ox≡(1,2)**

Плоскость **П$_2$** неподвижна.

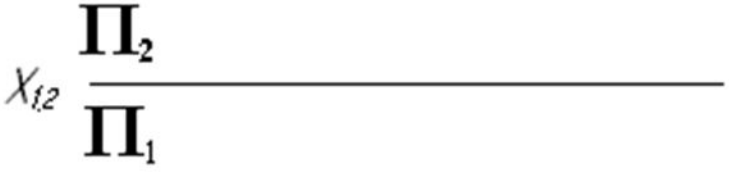
Плоскость **П$_1$** вращается вокруг линии (**1,2**) пересечения плоскостей до совмещения

с плоскостью **П$_2$**.

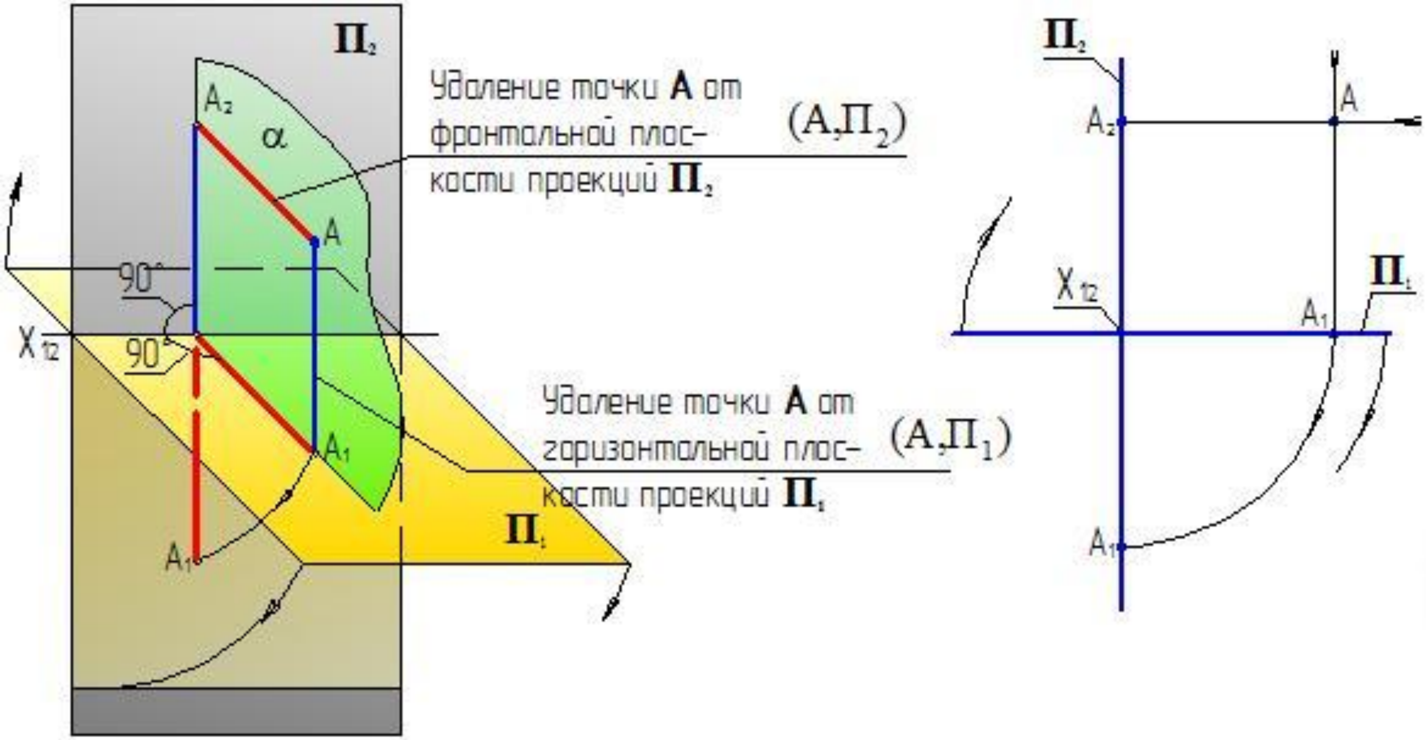
Плоскости проекций Π_1 и Π_2 совмещены в одну общую плоскость.



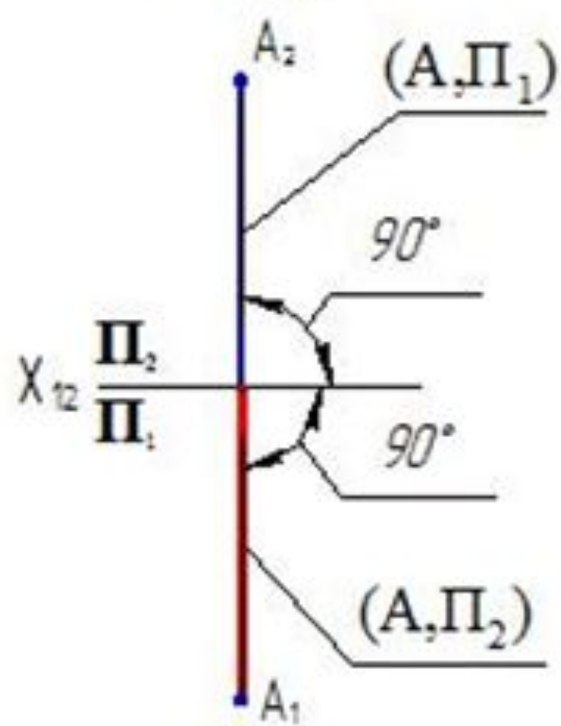
Так как плоскости проекций бесконечны, то их границы не показывают и координатные оси *y* и *z* также не показывают.



Проецирование точки



Эпюр



Горизонтальная и фронтальная проекции точки располагаются на одной прямой, перпендикулярной оси x_{12}

$$A_1A_2 \perp x_{12}$$

Расстояние от оси x_{12} до горизонтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до фронтальной плоскости проекций.

$$(x_{12}, A_1) = (A, \Pi_2) \text{ - } \underline{\textit{глубина}}$$

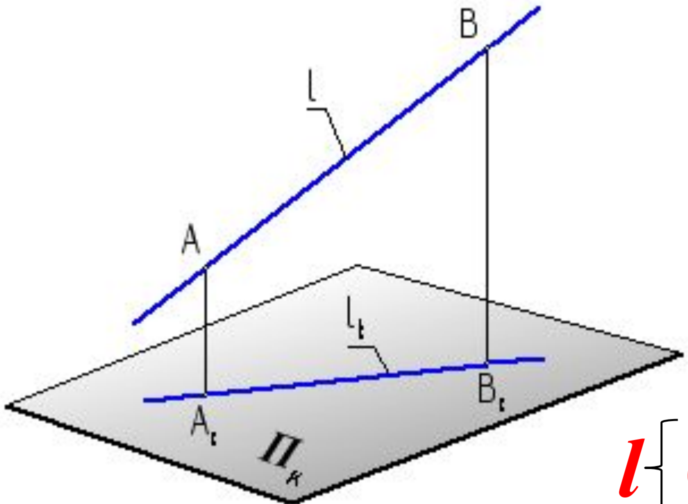
Расстояние от оси x_{12} до фронтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до горизонтальной плоскости проекций.

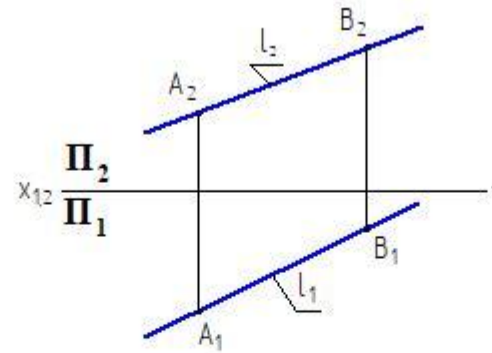
$$(x_{12}, A_2) = (A, \Pi_1) \text{ - } \underline{\textit{высота}}$$

Ортогональные проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости однозначно определяют положение точки в пространстве и делают изображения обратимыми.

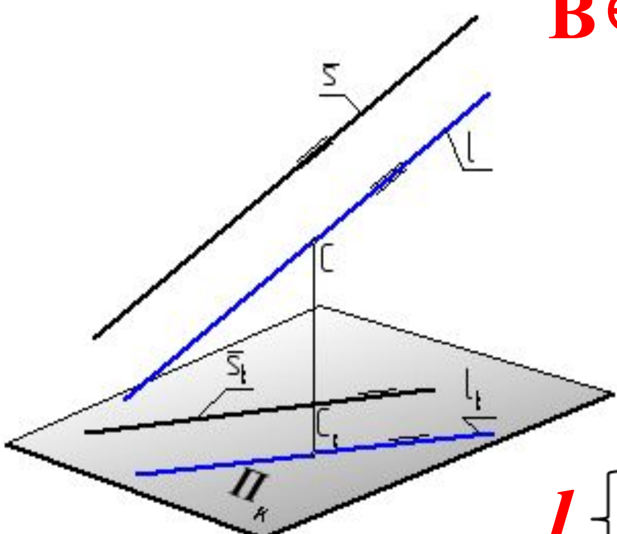
Проецирование прямой линии

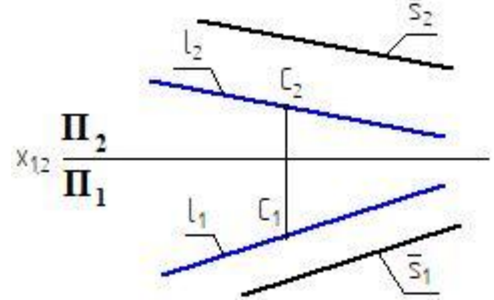
Способы задания прямой на эпюре





$$l\left\{(A,B)(A\in l;\ B\in l)\right\}$$



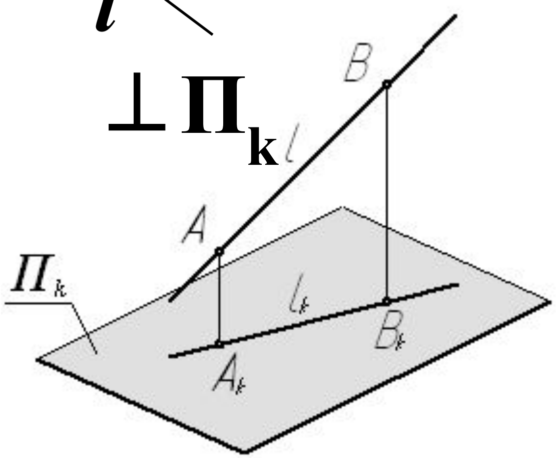


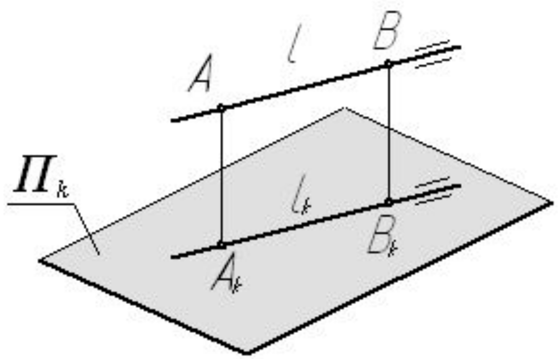
$$l\left\{(C,\bar{s})(C\in l;\ l \parallel \bar{s})\right\}$$

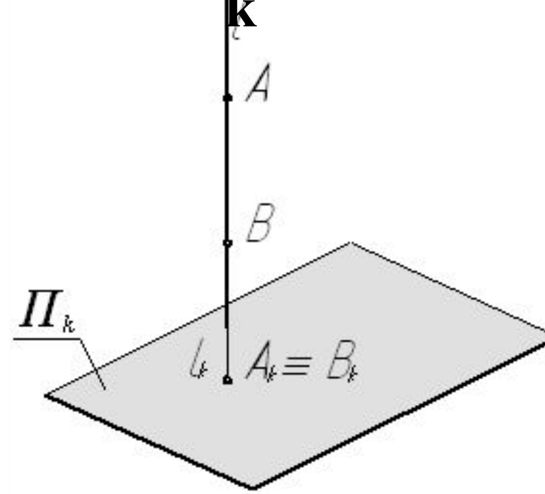
Положение прямой относительно плоскости проекций

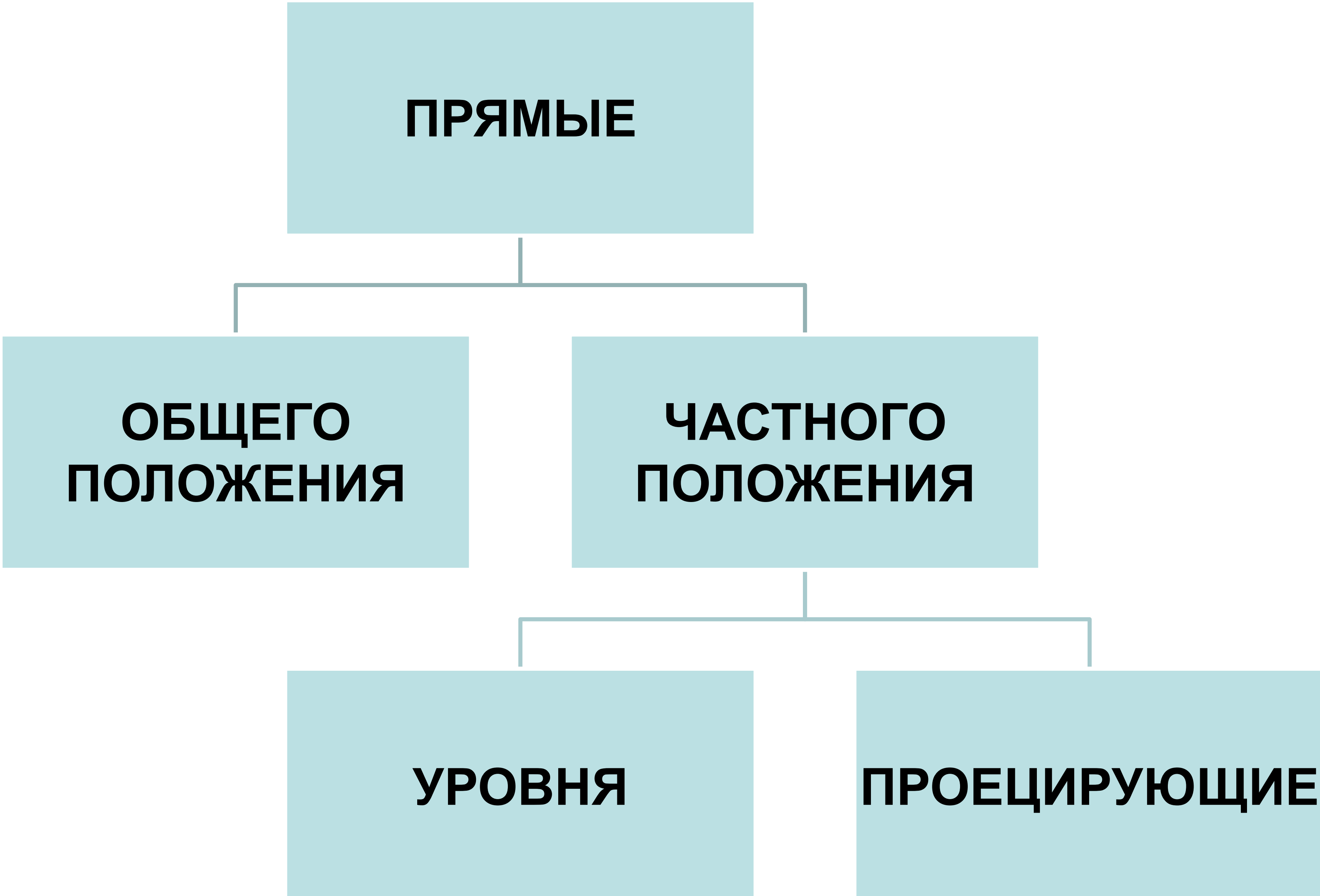
Прямые частного положения

Прямая общего положения	Прямая уровня	Проецирующая прямая
$l \nparallel \Pi_k$	$l \parallel \Pi_k$	$l \perp \Pi_k$
$l \not\perp \Pi_k$		



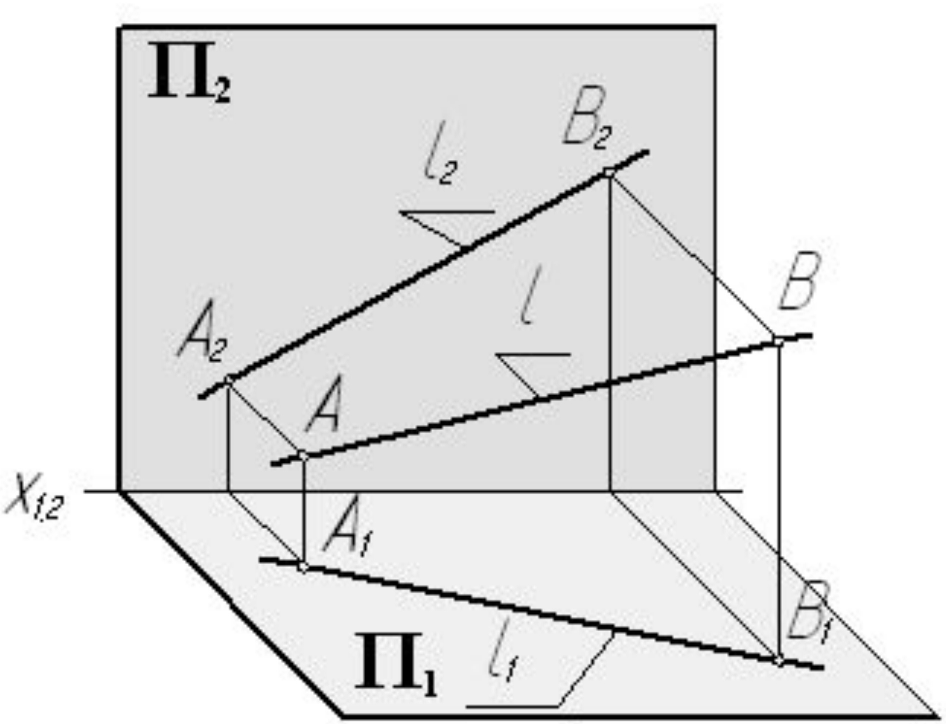


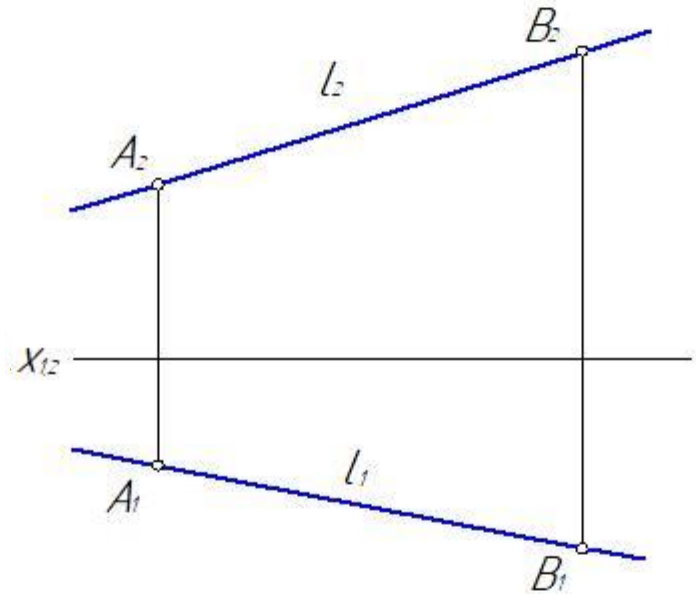



ПРЯМЫЕ
ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ
ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ
УРОВНЯ
ПРОЕЦИРУЮЩИЕ

Прямая общего положения

Это прямая не параллельная
ни одной из плоскостей проекций





$l \nparallel \Pi_1$ и $l \nparallel \Pi_2$

$l \not\perp \Pi_1$ и $l \not\perp \Pi_2$

$l_1 \nparallel x_{1,2}$ и $l_2 \nparallel x_{1,2}$

$l_1 \not\perp x_{1,2}$ и $l_2 \not\perp x$

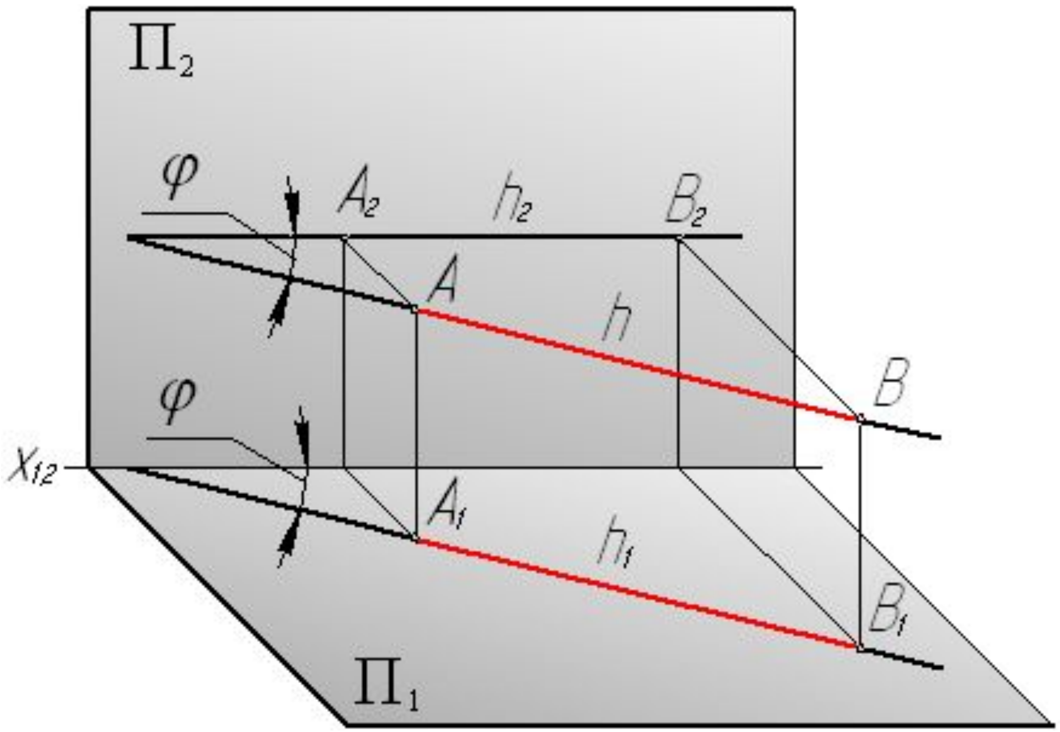
Прямые уровня

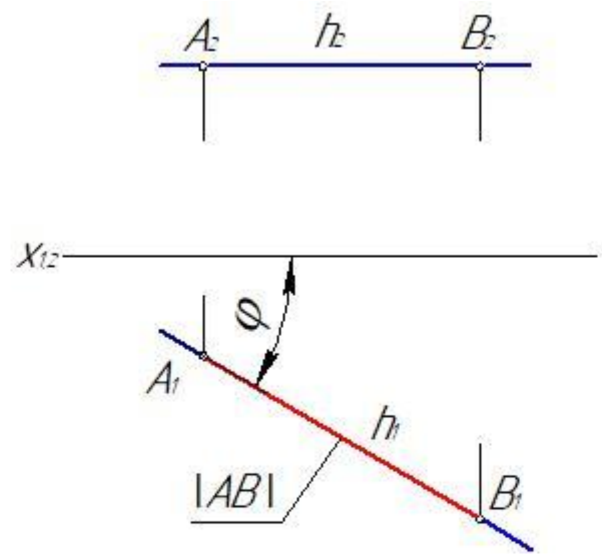
Это прямые параллельные какой-либо одной плоскости проекций

$$l \parallel \Pi_к$$

Горизонталь – *h*

Это прямая параллельная горизонтальной плоскости проекций





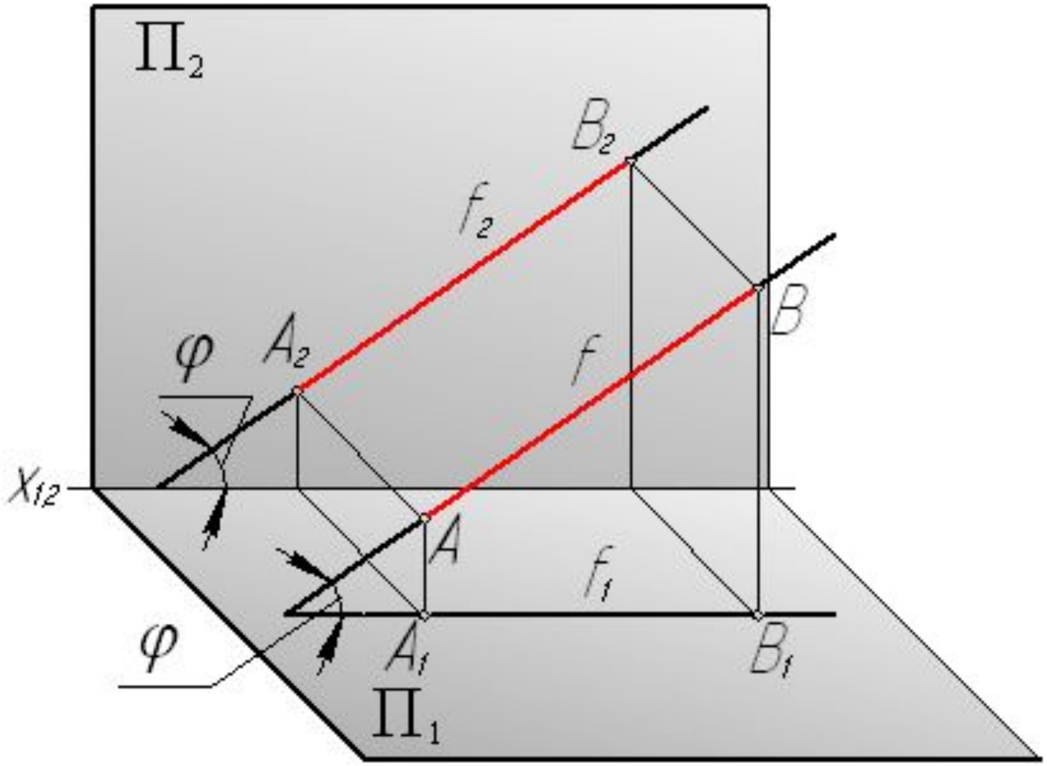
$h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$

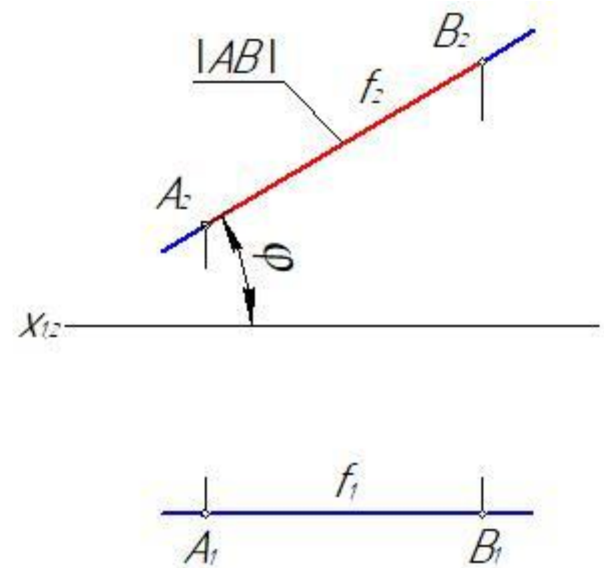
$AB \subset h \Rightarrow AB \parallel \Pi_1 \Rightarrow A_1B_1 \cong |AB|$

$\angle\phi = h_1(A_1B_1)$ ^

Фронталь – f

Это прямая параллельная фронтальной плоскости проекций





$$f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{1,2}$$

$$AB \subset f \Rightarrow AB \parallel \Pi_2 \Rightarrow A_2B_2 \cong |AB|$$

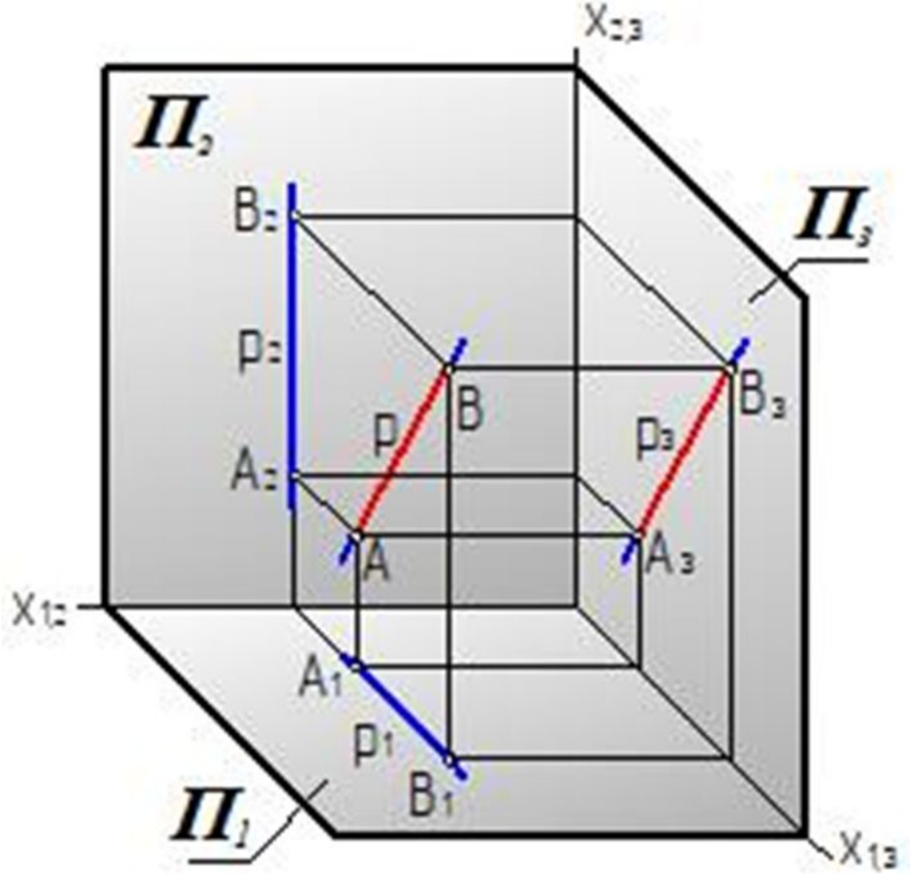
$$\angle\phi = f(AB)\wedge\Pi_1 \quad \angle\phi = f_2(A_2B_2)\wedge x_{1,2}$$

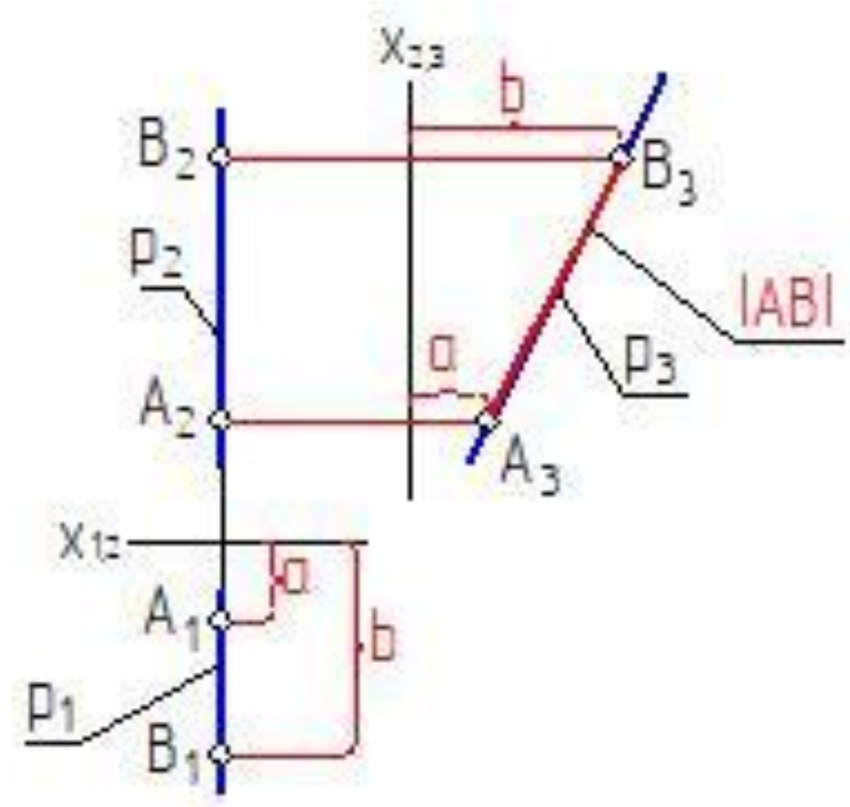
Характерная особенность эпюра горизонтали и фронтали в системе двух плоскостей проекций–

одна из проекций параллельна координатной оси $x_{1,2}$

Профильная прямая - *p*

Это прямая параллельная профильной плоскости проекций Π_3





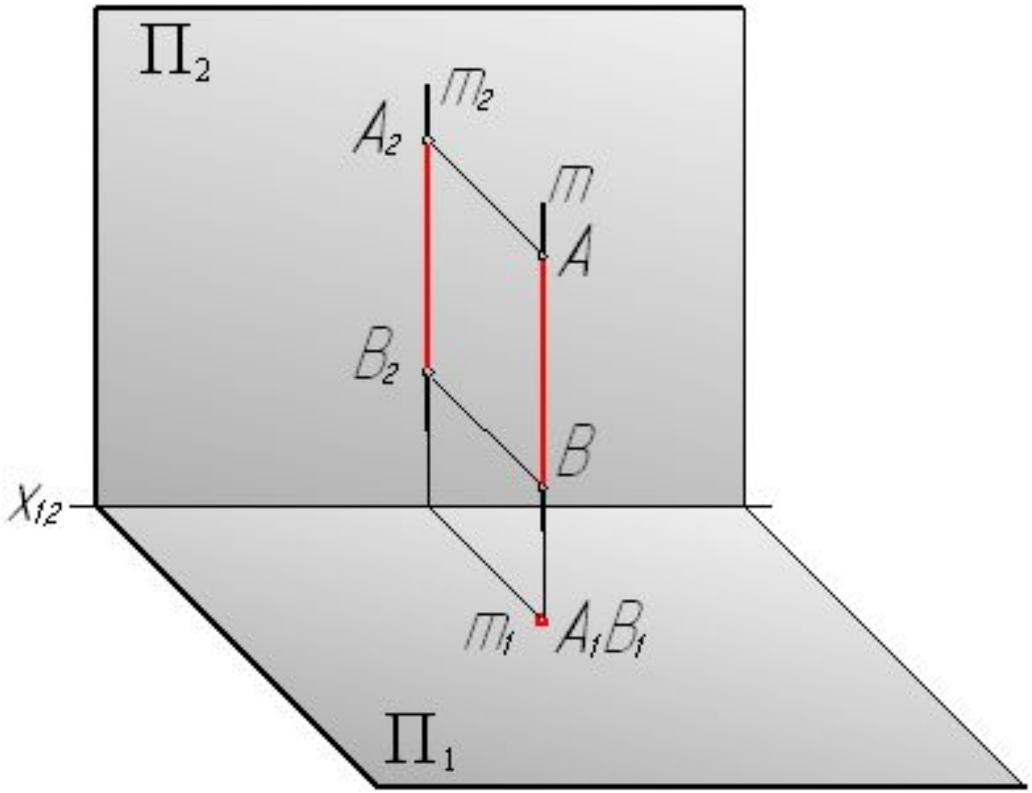
Проецирующие прямые

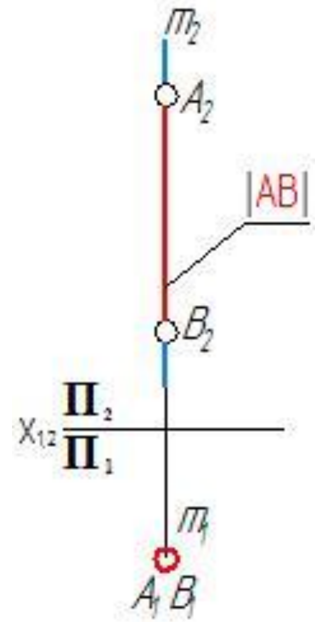
Это прямые перпендикулярные какой-либо одной плоскости проекций

$l \perp \Pi_к$

Горизонтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций





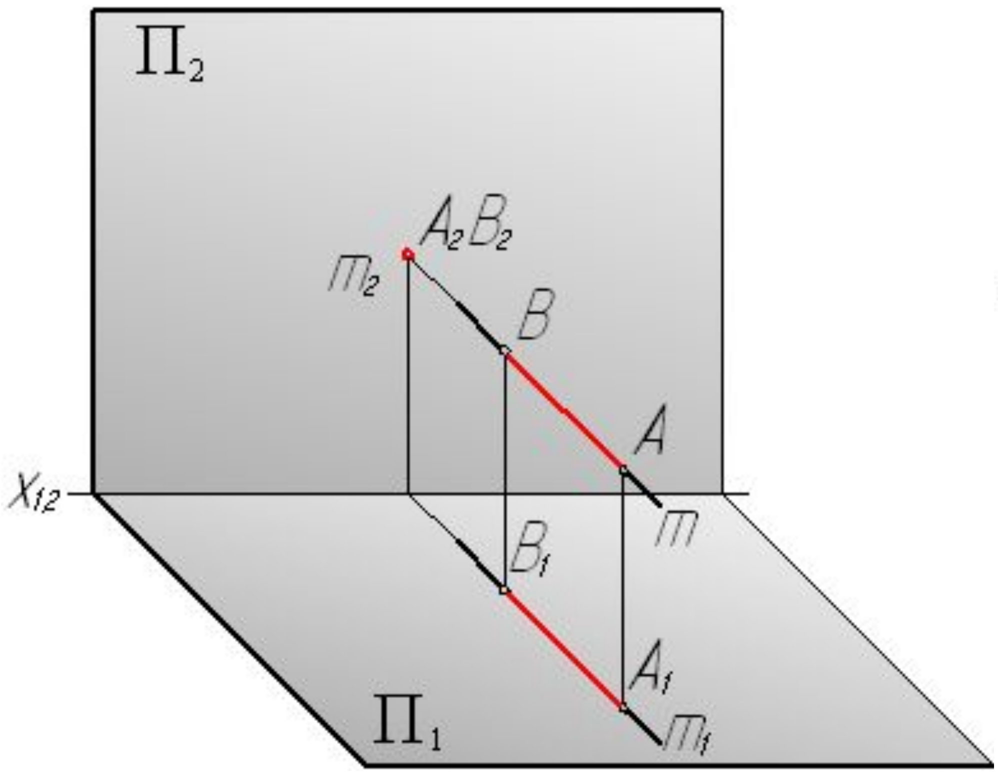
$m \perp \Pi_1 \wedge m \parallel \Pi_2 \quad \Rightarrow m_1$ – точка $\wedge$ $m_2 \perp x_{1,2}$

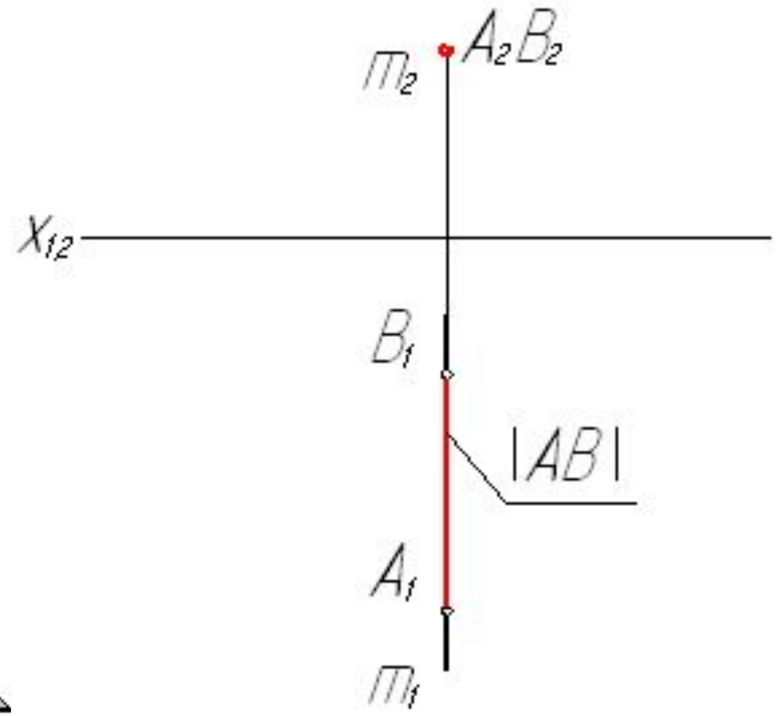
$AB \subset m \quad \Rightarrow A_1B_1$ - точка $\wedge$

$AB \parallel \Pi_2 \quad \Rightarrow A_2B_2 \cong |AB|$

Фронтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная фронтальной плоскости проекций





$m \perp \Pi_2 \wedge m \parallel \Pi_1 \Rightarrow m_2$ – точка $\wedge\ m_1 \perp x_{1,2}$

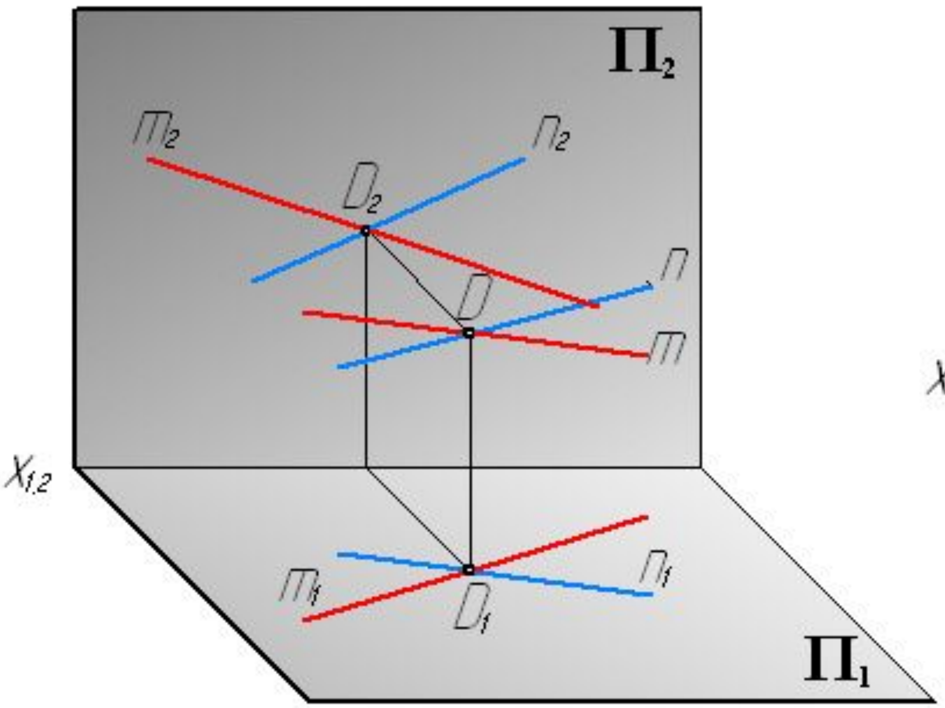
$AB \subset m \Rightarrow A_2B_2$ - точка

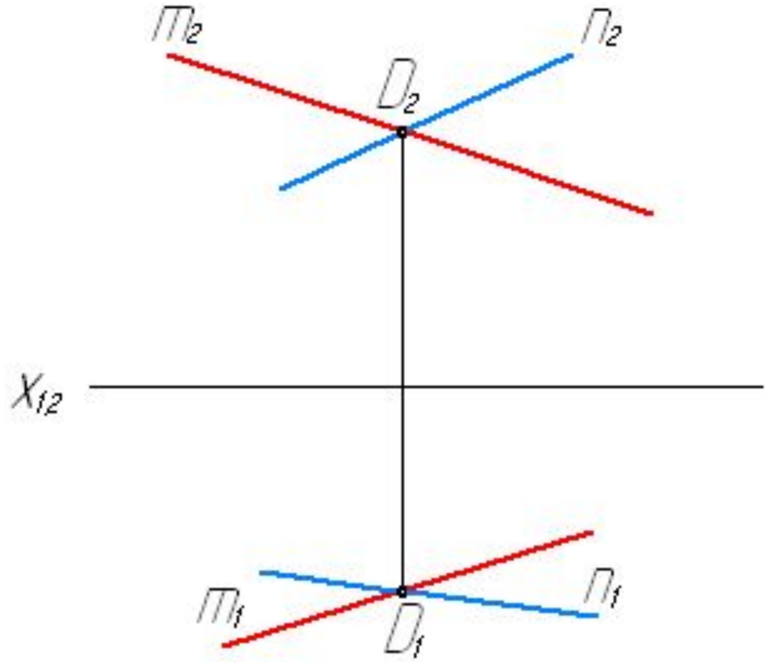
$AB \parallel \Pi_1 \Rightarrow A_1B_1 \cong |AB|$

Характерная особенность эпюра проецирующей прямой – **одна из проекций прямой точка**

Взаимное положение двух прямых

Пересекающиеся прямые





$m \cap n = D \Rightarrow$

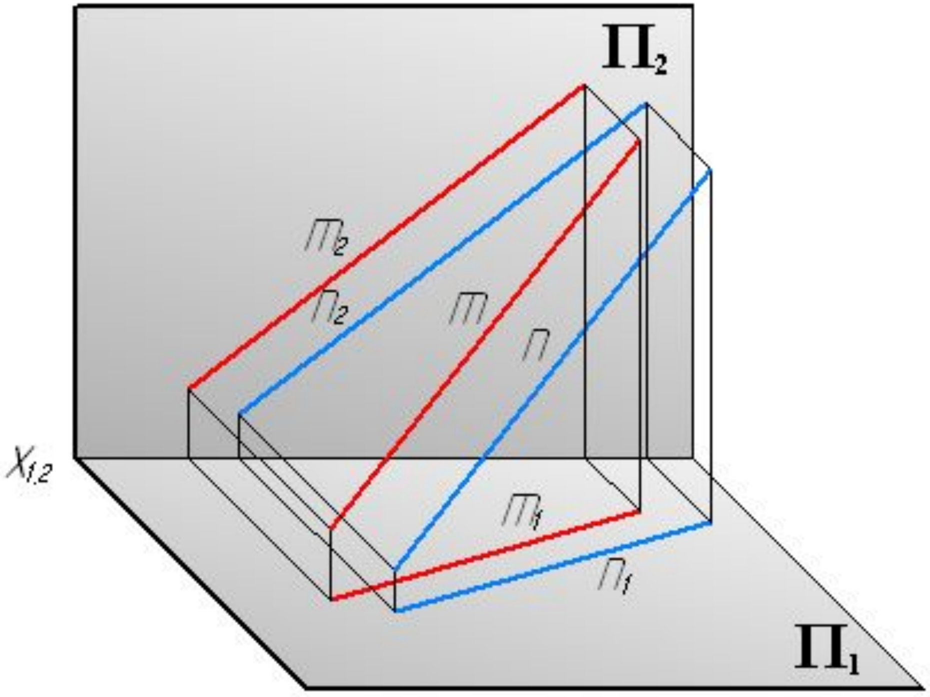
$\Rightarrow m_k \cap n_k = D_k$

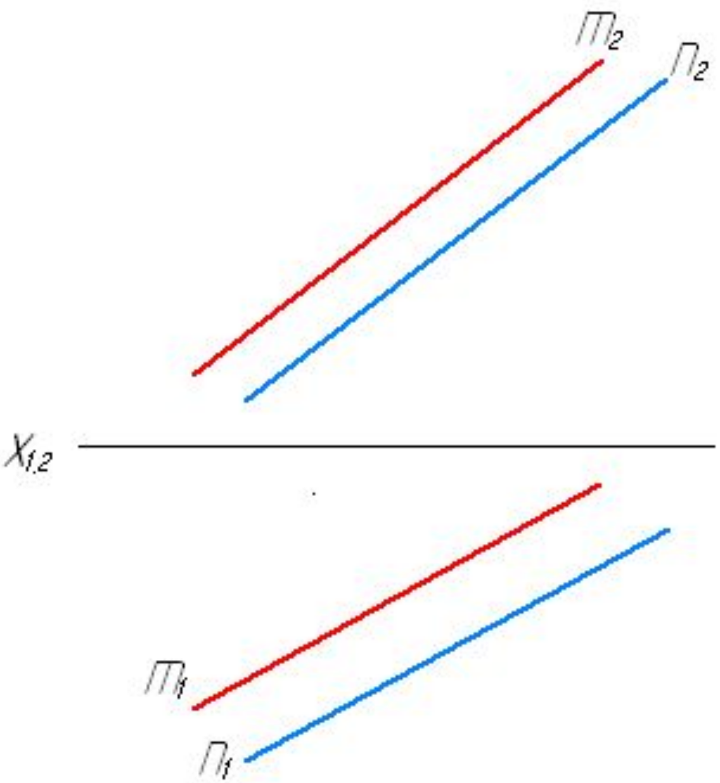
$m_1 \cap n_1 = D_1$

$m_2 \cap n_2 = D_2$

$D_1 D_2 \perp x_{1,2}$

Параллельные прямые

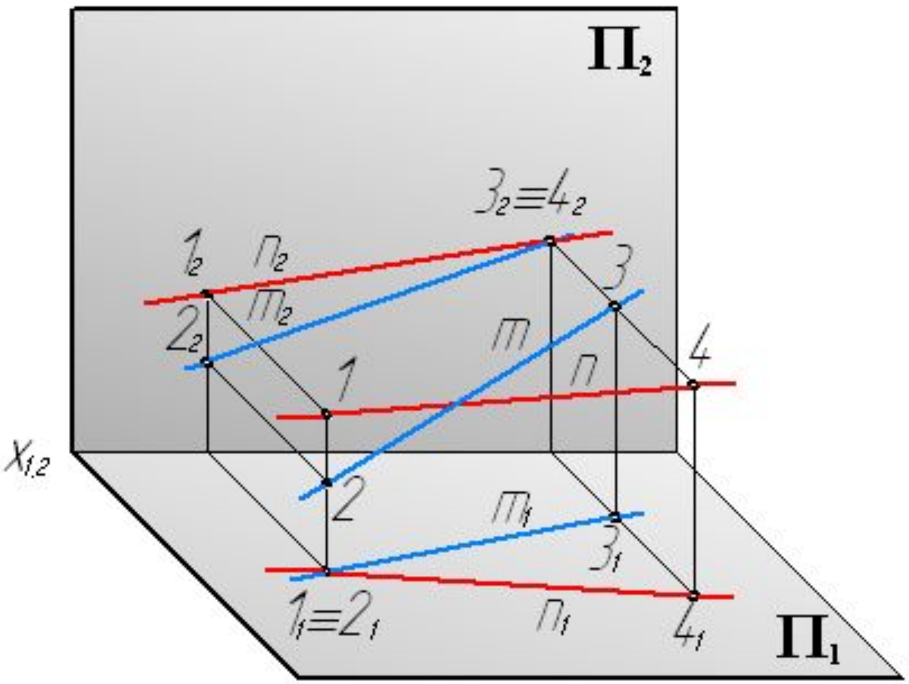


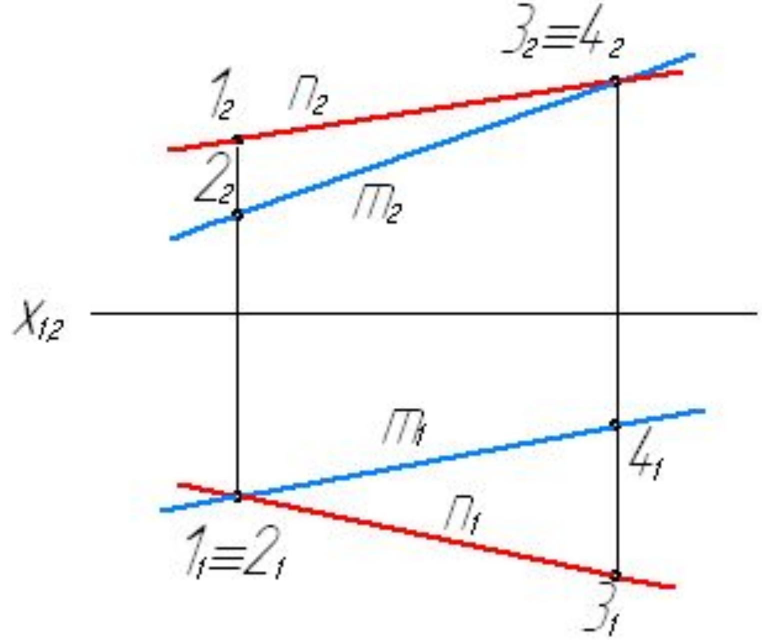


$m \parallel n \Rightarrow$
$\Rightarrow m_k \parallel n_k$

$m_1 \parallel n_1$
$m_2 \parallel n_2$

Скрещивающиеся прямые





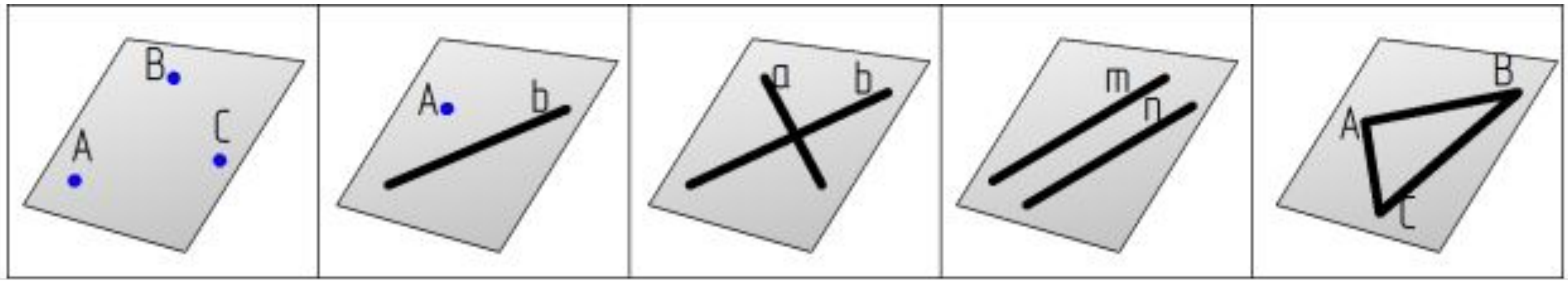
$$m \mathbin{\dot{\underline{\ }}} n \Rightarrow m \nparallel n \wedge m \not\cap n$$

Пары точек (1,2) и (3,4) – конкурирующие точки

Плоскость

Плоскость - это один из видов поверхности (плоская поверхность).

Способы задания плоскости



Три точки
$\alpha(A,B,C)$

Точка и прямая
$\beta(A,b)$

Две пересекающиеся прямые
$\gamma(a \cap b)$

Две параллельные прямые
$\delta(m \parallel n)$

Плоская фигура
$\varepsilon(\triangle ABC)$

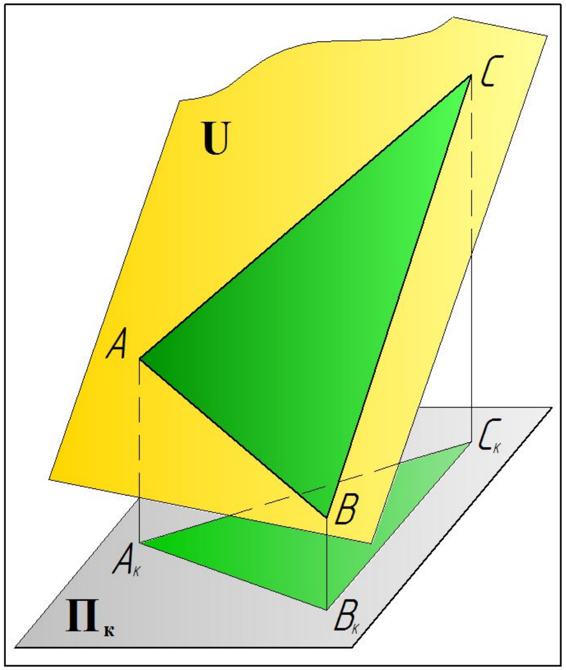
Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Частное положение

Общее положение

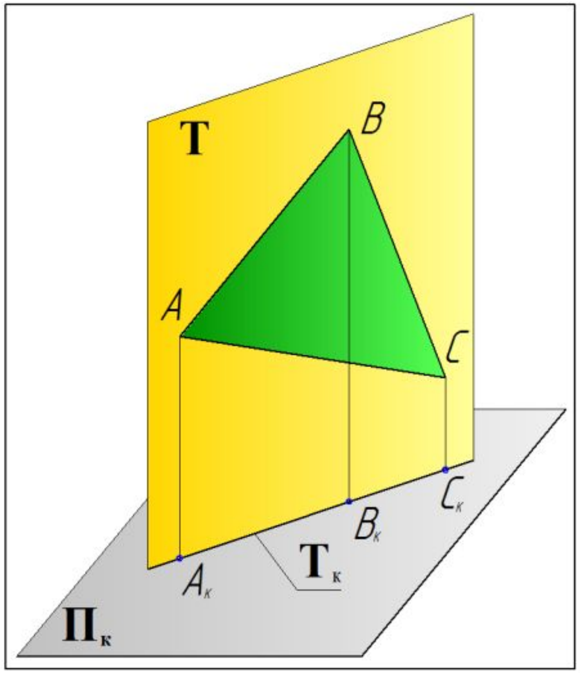
Проецирующая плоскость

Плоскость уровня

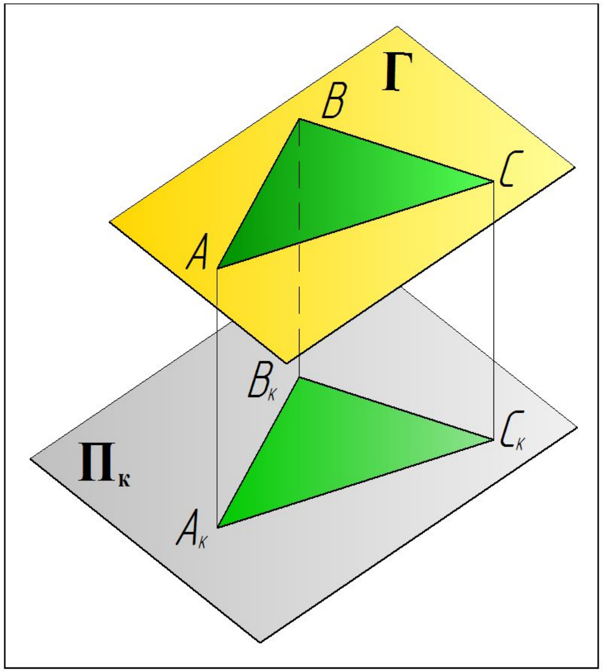


$U \nparallel П_к$

$U \not\perp П_к$



$T \perp П_к$

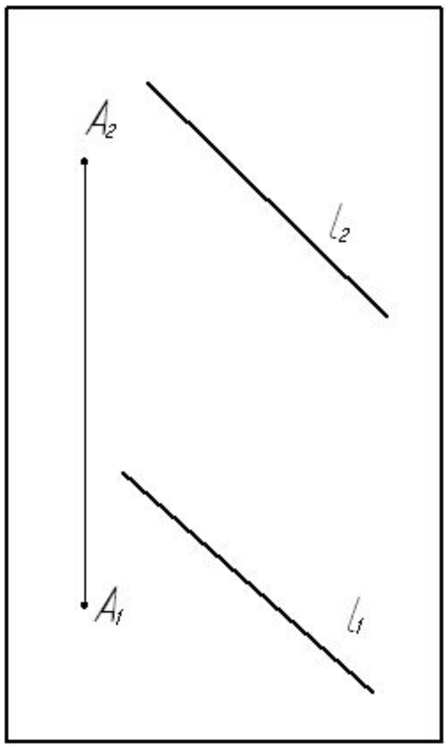


$Г \parallel П_к$

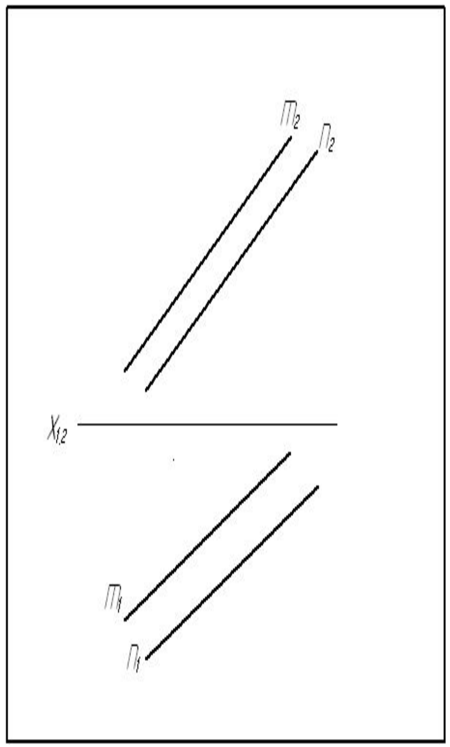
- ПЛОСКОСТИ
  - ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ
  - ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ
    - УРОВНЯ
    - ПРОЕЦИРУЮЩИЕ

Плоскость общего положения

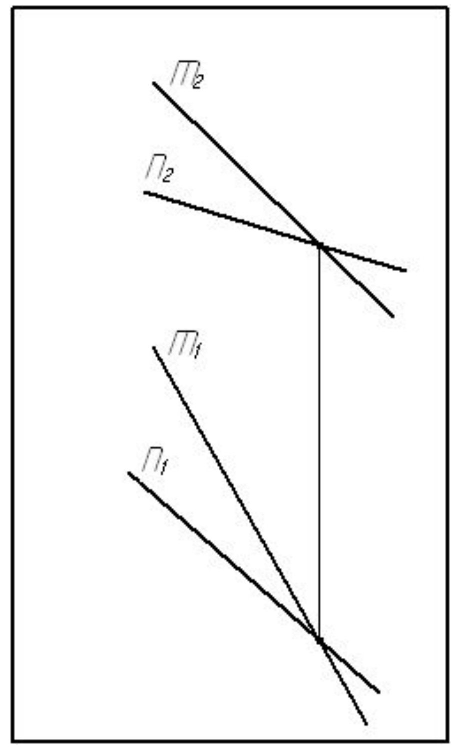
$\beta(A,l)$



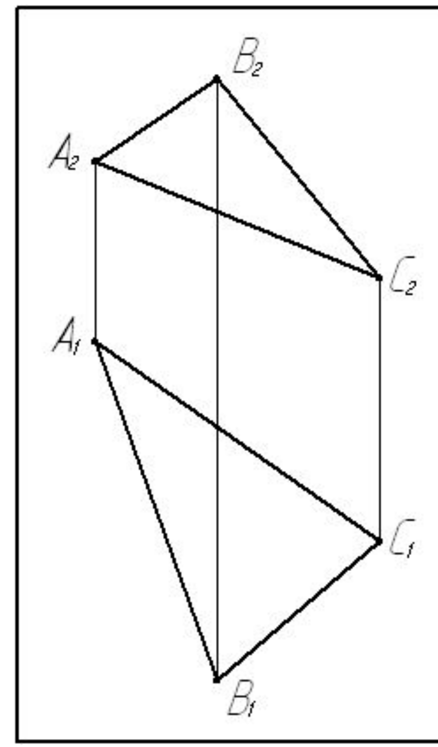
$\delta(m \parallel n)$



$\gamma(m \cap n)$



$\varepsilon(\triangle ABC)$



Вывод: Ни одна из проекций плоскости не имеет форму прямой линии

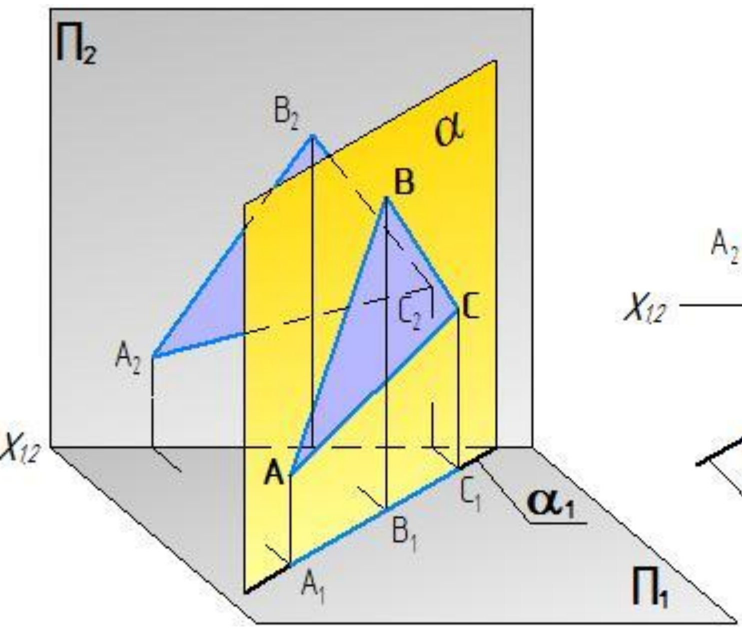
Плоскости частного положения

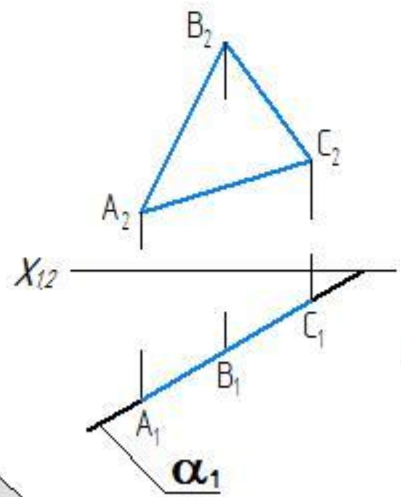
Проецирующие плоскости

Это плоскости перпендикулярные одной из плоскостей проекций

Горизонтально-проецирующая

$\alpha \perp$

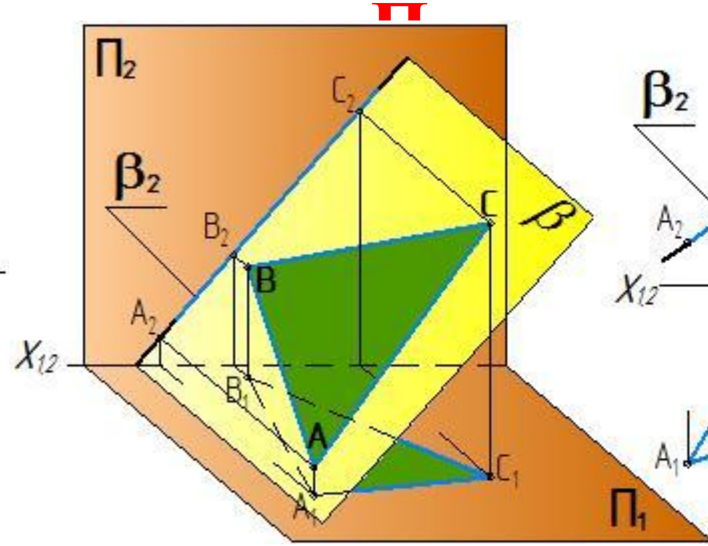


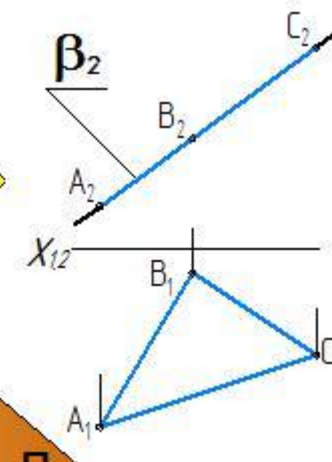


α_1 – прямая

Фронтально-проецирующая

$\beta \perp$





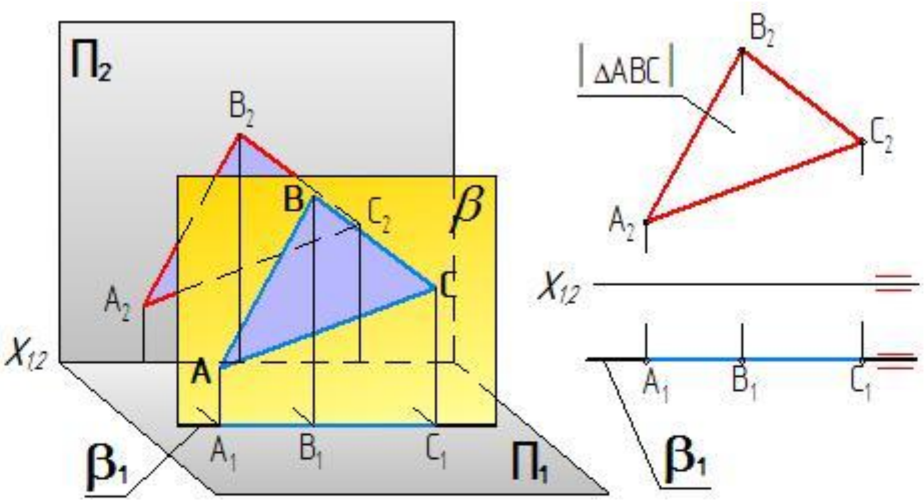
β_2 – прямая

Плоскости уровня

Это плоскости параллельные одной из плоскостей проекций

Фронтальная плоскость

$\beta \parallel \Pi_2$

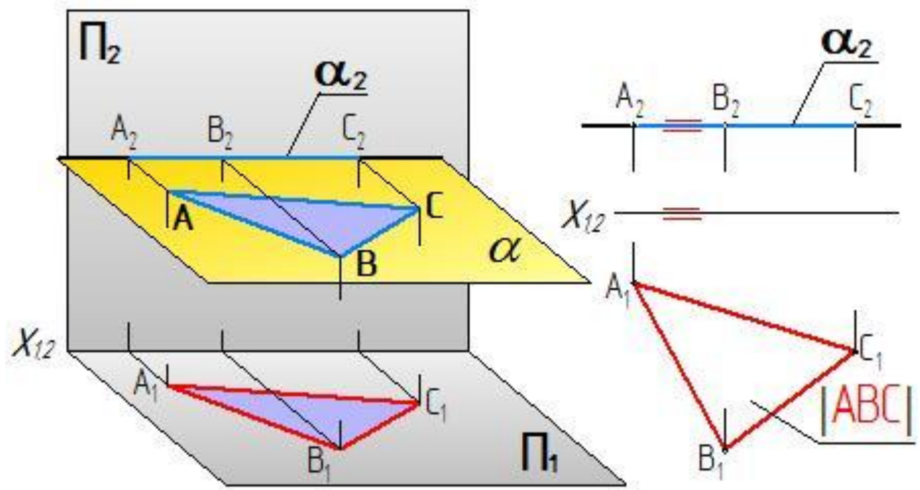


β_1 – **прямая и** $\beta_1 \parallel x_{1,2}$

$\Delta ABC \subset \beta \Rightarrow \Delta ABC \parallel \Pi_2 \Rightarrow A_2B_2C_2 \cong ABC$

Горизонтальная плоскость

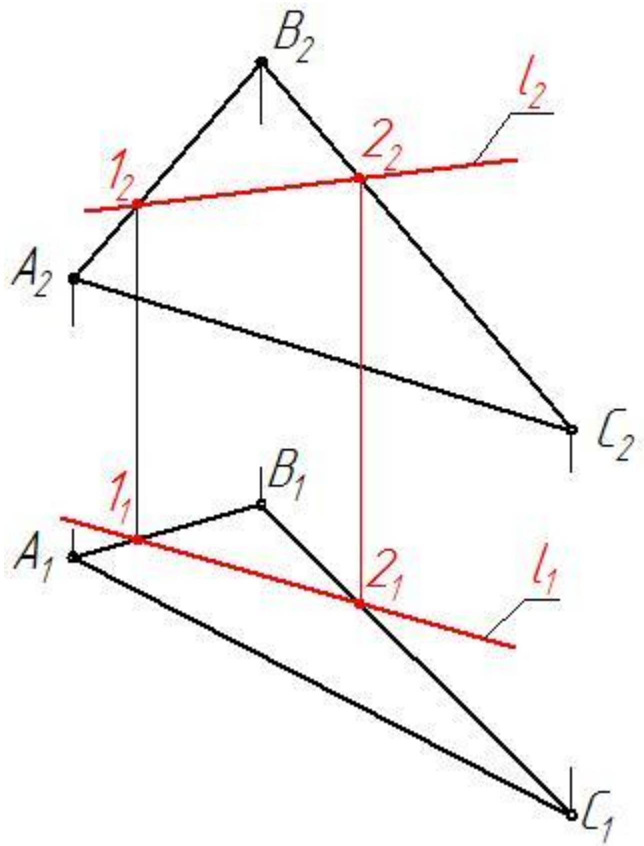
$\alpha \parallel \Pi_1$



α_2 – **прямая и** $\alpha_2 \parallel x_{1,2}$

$\Delta ABC \subset \alpha \Rightarrow \Delta ABC \parallel \Pi_1 \Rightarrow A_1B_1C_1 \cong ABC$

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПЛОСКОСТИ



Дано: плоскость $\boldsymbol{\alpha}(\Delta ABC)$.

Построить: $\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{\alpha}$.

Прямая принадлежит плоскости, если две точки прямой принадлежат этой плоскости.

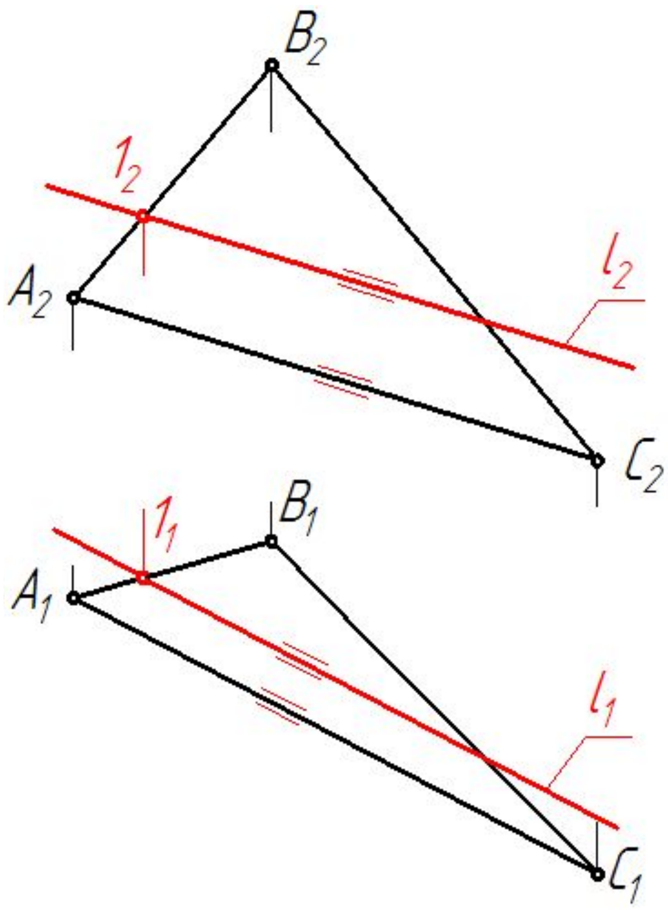
$$\forall \boldsymbol{l};\ \boldsymbol{l}\,(1,2),\ (1 \in \boldsymbol{\alpha}),\ (2 \in \boldsymbol{\alpha}) \Rightarrow \boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{\alpha}$$

Первый вариант построения

Точка 1 принадлежит стороне AB ($1 \in AB$).

Точка 2 принадлежит стороне BC ($2 \in BC$).

Строим $\boldsymbol{l}\,(1,2)$



Дано: плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.

Построить: $l \subset \alpha$.

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую этой плоскости, и параллельна какой-либо прямой, также принадлежащей этой плоскости

$$\forall l;\ l\,(1,b),\ 1\in\alpha,\ l\parallel b,\ b\in\alpha \Rightarrow l\subset\alpha$$

Второй вариант построения

Точка 1 принадлежит стороне AB ($1\in AB$).

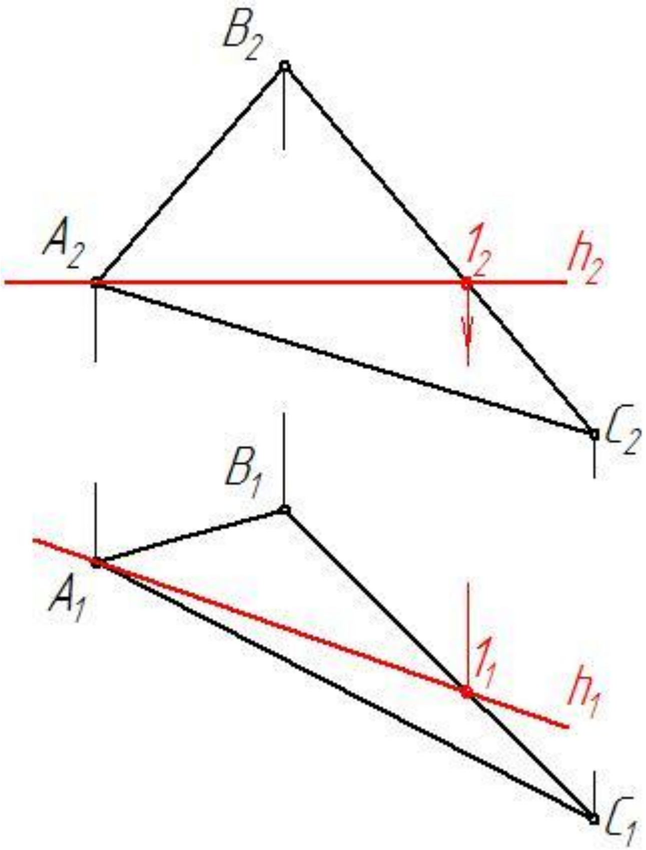
В качестве прямой "***b***" принимаем сторону AC, т.е. $b\equiv AC$

Через точку 1 проводим прямую l параллельно стороне AC ($l\parallel AC$).

Прямые уровня плоскости

Горизонталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная горизонтальной плоскости проекций



<u>Дано</u>: Плоскость α (ΔABC)

<u>Построить</u>: $h \subset \alpha$

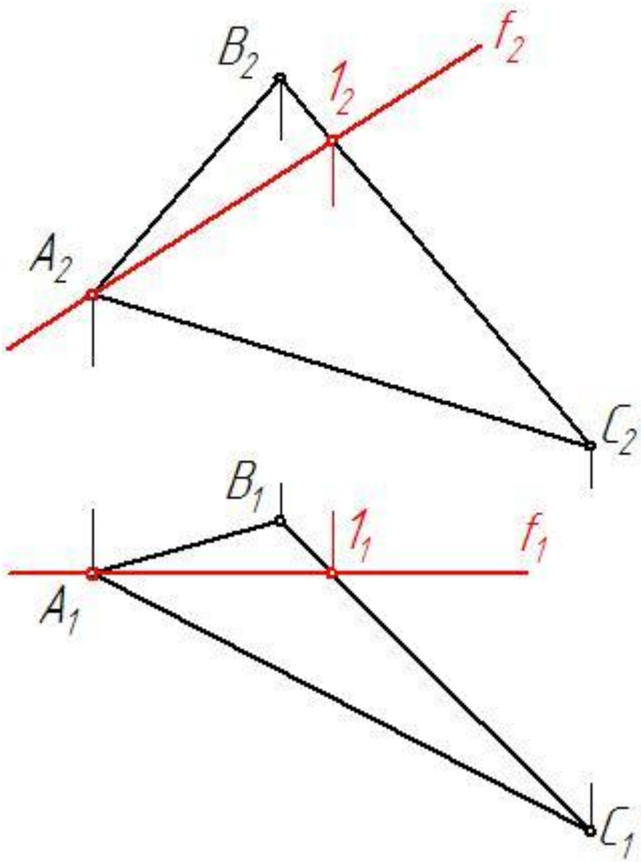
$h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$

Задаем $h\ (A,1);\ 1 \in BC$

Строим $h_1\ (A_1,1_1)$

Фронталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная фронтальной плоскости проекций



Дано: Плоскость α (ΔABC)

Построить: $f \subset \alpha$

$f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{1,2}$

Задаем $f\,(A,1)$; $1 \in BC$

Строим $f_2(A_2,1_2)$

ТОЧКА В ПЛОСКОСТИ

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей этой плоскости

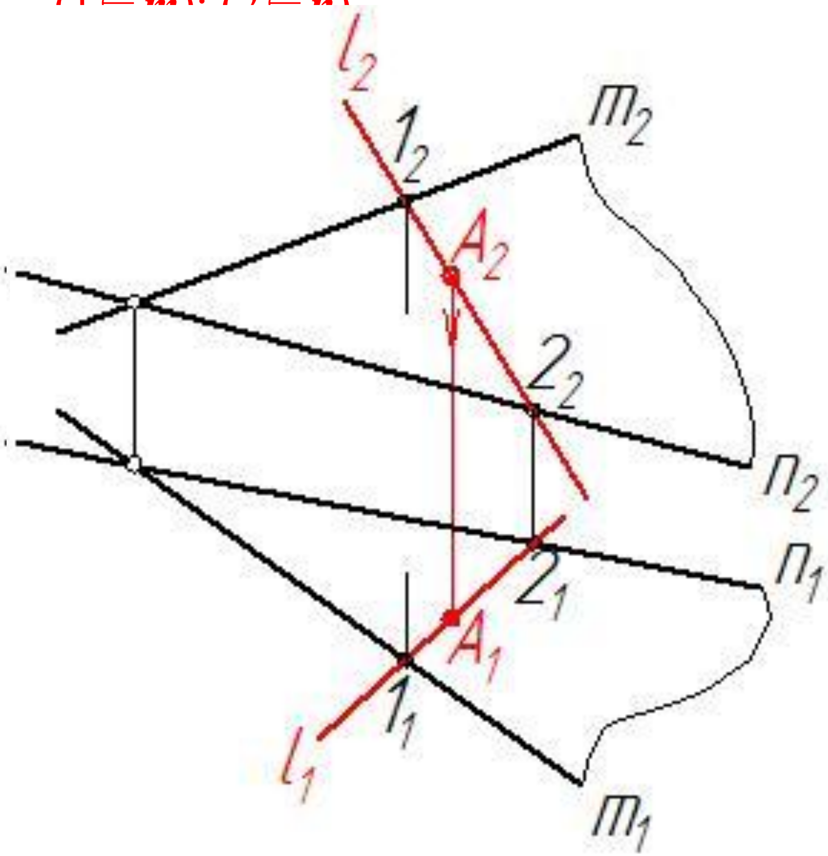
$$\mathbf{A} \in \alpha \Leftrightarrow \mathbf{A} \in l\,, l \subset \alpha$$

Дано: плоскость $\alpha(m,n)$; точка $A(A_2) \in \alpha$.

Построить: A_1.

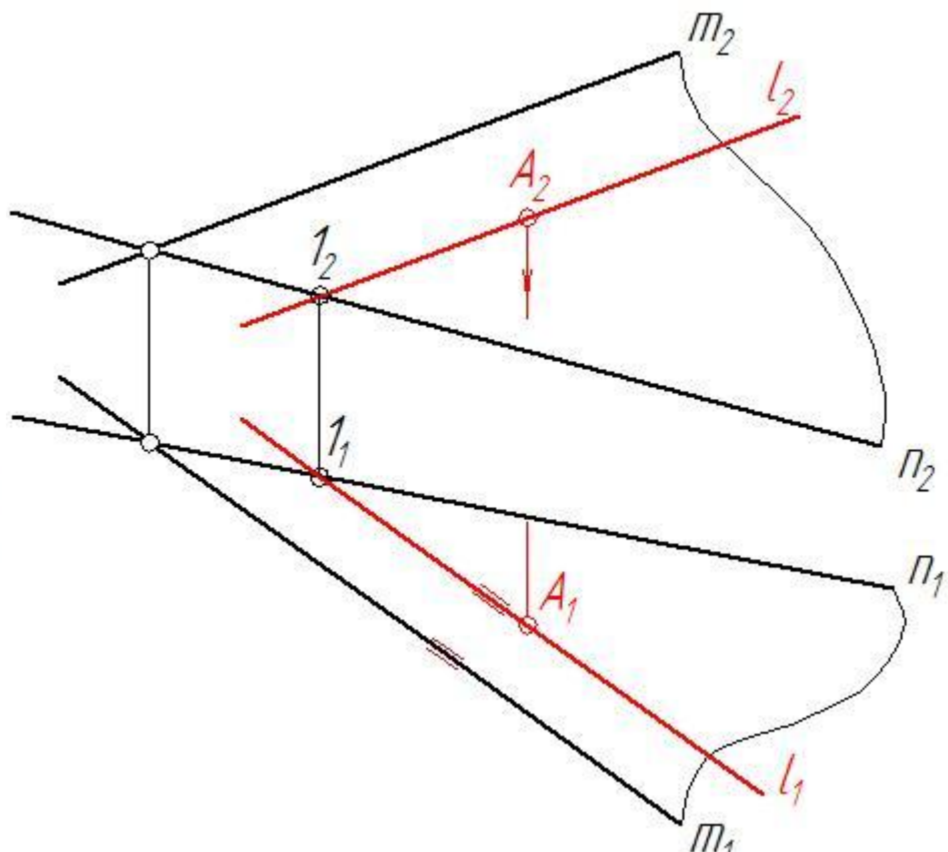
Первый вариант построения

$A \in l$; $l \subset \alpha$; $l(1,2)$;
$(1 \in \alpha)$; $(2 \in \alpha)$;
$(1 \in m)$; $(2 \in n)$



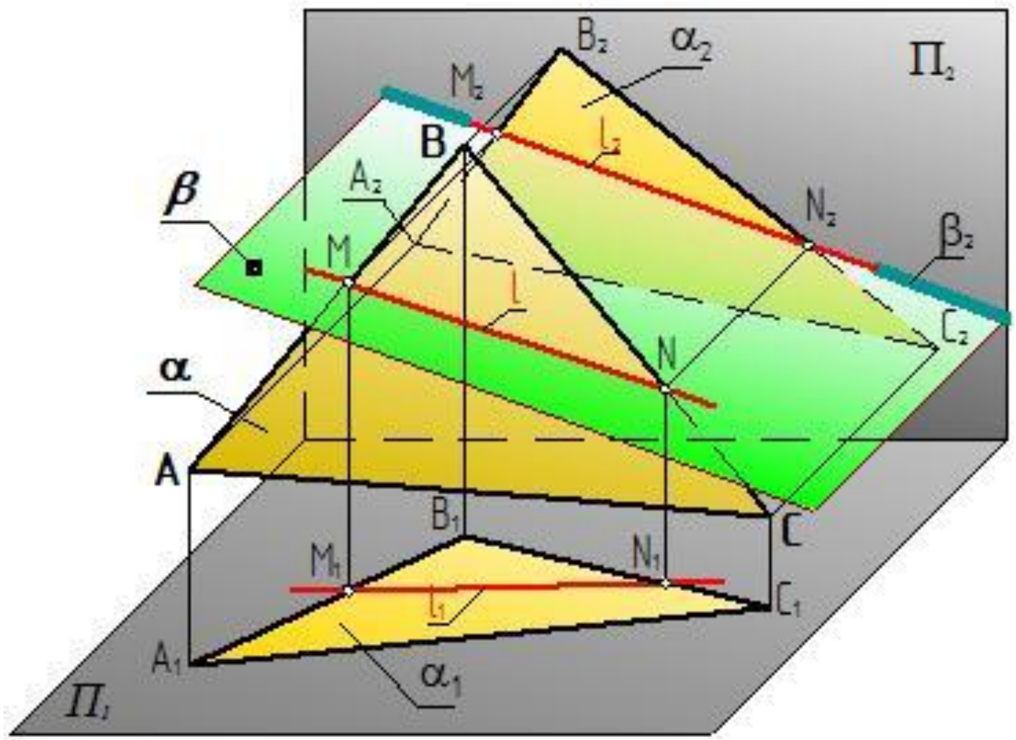
Второй вариант построения

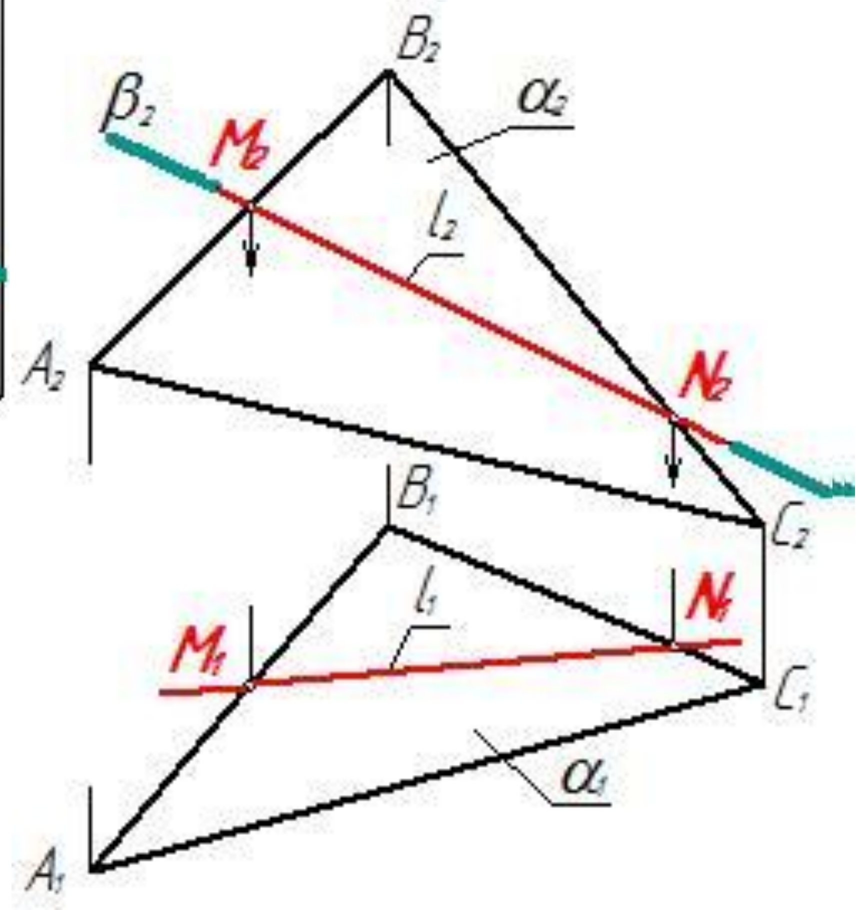
$A \in l$; $l \subset \alpha$; $l(1,m)$; $(l \parallel m)$
$(1 \in n)$;



Пересечение плоскостей

Если одна из двух пересекающихся плоскостей является плоскостью частного положения, то задача на построение линии их пересечения значительно упрощается.





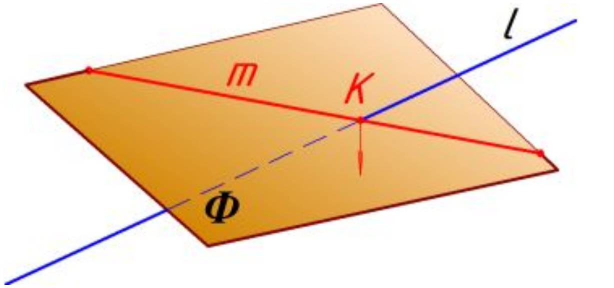
$$\beta \cap \alpha\ (\triangle ABC) = l$$

$$\beta \perp \Pi_2 \Rightarrow \beta_2 \text{ – прямая;}$$

$$l \subset \beta \Rightarrow l_2 \equiv \beta_2$$

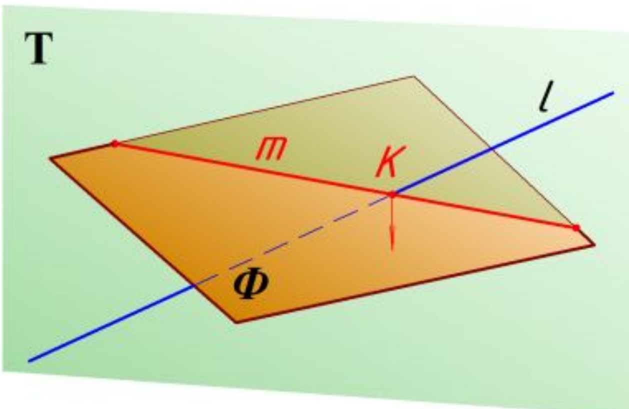
$$l \subset \alpha(\triangle ABC) \Rightarrow l(M,N),\ M = \beta \cap AB;\ N = \beta \cap BC$$

Пересечение прямой линии с плоскостью



Прямая пересекает плоскость, если она пересекает какую-либо прямую, принадлежащую этой плоскости.

$$l \cap Ф \Leftrightarrow l \cap m\ ;\ m \subset Ф$$



Если $l \cap m$, то $l \subset T$ и $m \subset T$

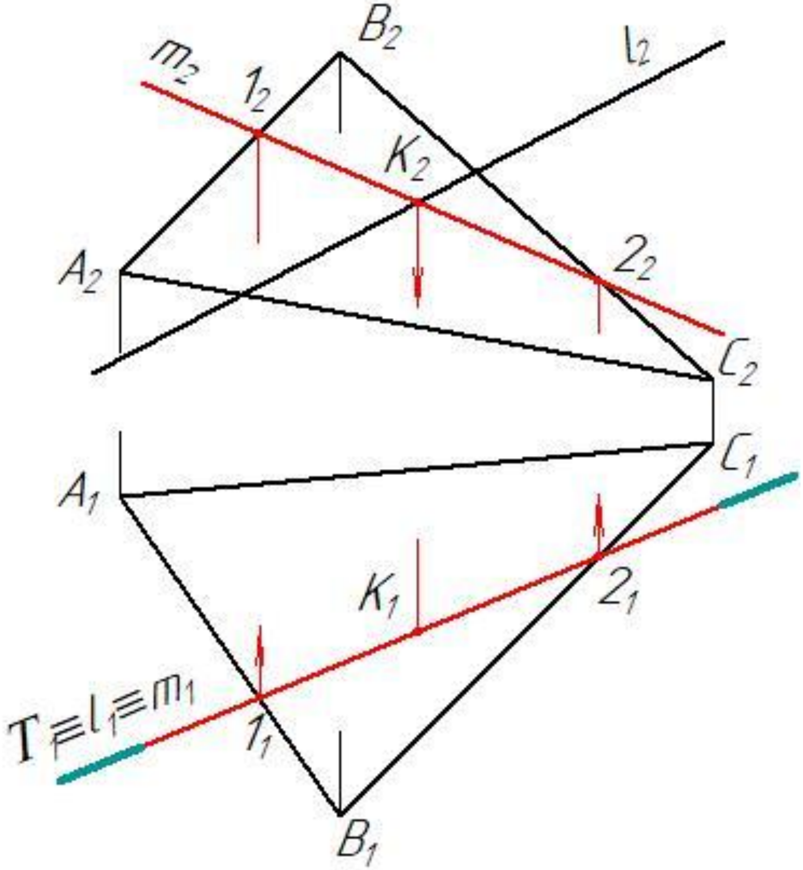
Т. е. прямые l и m принадлежат какой-то другой плоскости, например T.

T – вспомогательная секущая плоскость

Но $m \subset Ф$ $m \subset T$. Следовательно, $m = Ф \cap T$

При определении взаимного положения прямой линии и плоскости вспомогательная секущая плоскость всегда выбирается проецирующей.

Тогда, если $T \perp П_к$, то на эпюре $T_к \equiv l_к \equiv m_к$



<u>Дано</u>: прямая *l* и плоскость *α(∆ABC)*.
<u>Определить:</u> взаимное положение прямая *l* и плоскость *α*

1. $l \cup T;\ T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \equiv l_1$
2. $m = \alpha \cap T \Rightarrow m \subset T \Rightarrow$ $m_1 \equiv T_1 \equiv l_1$;
3. $m \subset \alpha\ (\Delta\ ABC) \Rightarrow$ $m(1,2)$; $1 = m \cap AB$; $2 = m \cap BC$;
4. $l_2 \cap m_2 = K_2 \Rightarrow l \cap m = K,$ $\Rightarrow K = l \cap \alpha$