§2.2. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Теорема 2.2. *Вероятность суммы совместных (произвольных) событий определяется через вероятность произведений этих событий, взятых по одному, по два, по три и т.д. по формуле:*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i A_j A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Доказательство. Рассмотрим два совместных события A_1 и A_2 (рис.4.). Представим сумму A_1 и A_2 суммой двух совместных событий $A_1+A_2 = A_1+A_2-(A_1A_2)$. Применяя теорему сложения вероятностей для совместных событий, получим:

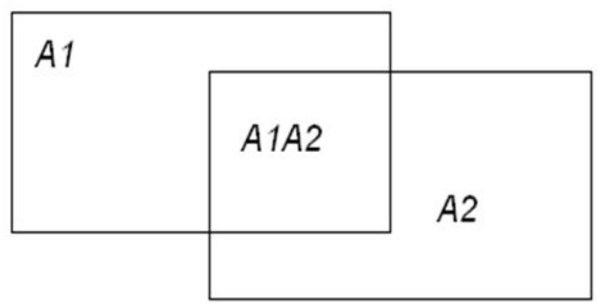


Рис.4

$P(A_1 + A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$,

Аналогично вероятность суммы трех совместных событий равна:

$P(A_1 + A_2+ A_3)= P((A_1 + A_2)+ A_3)= P(A_1 + +A_2)+P(A_3)- P((A_1 + A_2) A_3)$.

Определим (рис. 5.) вероятность

$P((A_1 + A_2)A_3)$:

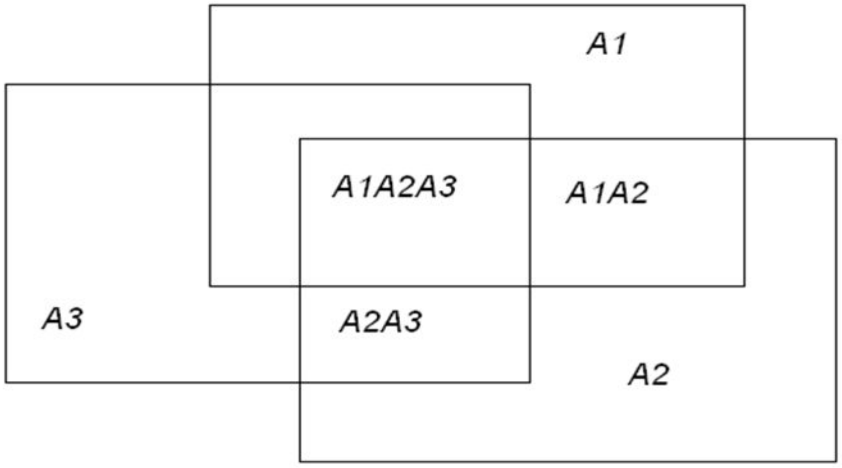


Рис.5

$P((A_1 + A_2) A_3)= P((A_1 A_3)+(A_2 A_3))= P(A_1 A_3)+ (A_2 A_3)$ $- P((A_1 A_3)(A_2 A_3))= P(A_1 A_3)+P(A_2A_3)-P(A_1 A_2 A_3)$.

Следовательно, $P(A_1 + A_2+ A_3)= P(A_1) +$

$+P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) +$ $+P(A_1 A_2 A_3)$.

Следствие 1. *Если* A_1 , $A_2,\ldots,$ A_n *произвольные события, то имеет место неравенство*

$P(A_1 + A_2+\ldots+ A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Для двух событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \le P(A_1) + P(A_2).$$

Для трех событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P((A_1 + A_2) + A_3) = P(A_1 + A_2) + P(A_3) - P((A_1 + A_2) A_3) \le P(A_1 + A_2) + P(A_3) \le P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Теорема 2.3. *Вероятность произведения произвольного числа событий определяется через вероятности суммы этих событий, взятых по одному, по два, по три и т.д. по формуле*

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i + A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i + A_j + A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Доказательство. Из рис.4 видно, что

$P(A_1A_2)=P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 + A_2)$.

Из рис.5 следует, что

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 + A_2) -$
$-P(A_1 + A_3) - P(A_2 + A_3)+ P(A_1 +A_2+A_3)$.

Пример: Рассмотрим техническое устройство, состоящее из трех агрегатов (рис.6.), двух агрегатов первого типа A_1, A_2 и одного агрегата второго типа B. Агрегаты A_1, A_2 дублируют друг друга.

При отказе одного из них происходит автоматическое переключение на другой. Агрегат В не дублирован. Отказ устройства происходит, если отказали оба агрегата A_1, A_2 или отказал агрегат В. Т.о., событие С, при котором происходит отказ устройства представляется в виде $C=A_1A_2+B$, где A_1 – отказ агрегата A_1, A_2 – отказ агрегата A_2, В – отказ агрегата В. Требуется выразить вероятность события С через вероятности событий, содержащих только суммы, а не произведения элементарных событий A_1, A_2 и В.

Решение: По формуле теоремы 2.2.

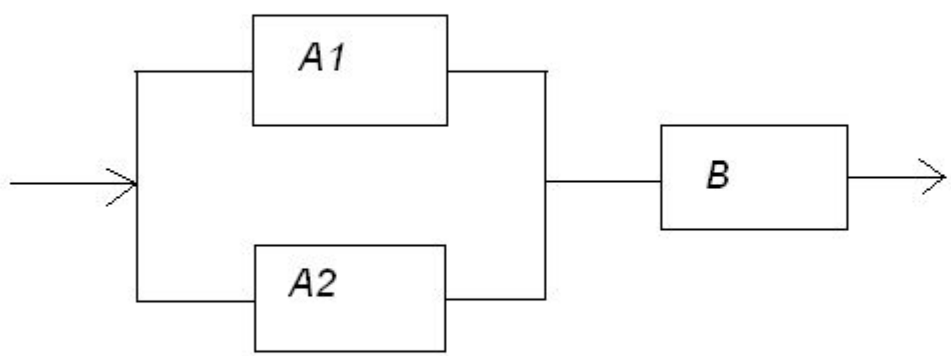
$P(C)=P(A_1A_2)+P(B)-P(A_1A_2B)$.

Определим по формуле теоремы 2.3. вероятности $P(A_1A_2)$, $P(A_1A_2B)$:

$P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1+A_2)$,

$P(A_1A_2B)=P(A_1)+P(A_2)+P(B)-P(A_1+A_2)-$
$-P(A_1+B)-P(A_2+B)+P(A_1+A_2+B)$.

Тогда $P(C)=P(A_1+B)+P(A_2+B)-P(A_1+A_2+B)$.



§2.3. Теорема умножения вероятностей

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место событие B, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A|B)$.

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Условие независимости события A от B записывается в виде $P(A|B)=P(A)$.

Событие А называется *зависимым* от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет. Условие зависимости события А от В записывается в виде $P(A|B) \neq P(A)$.

Теорема 2.4. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:*

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

Доказательство:

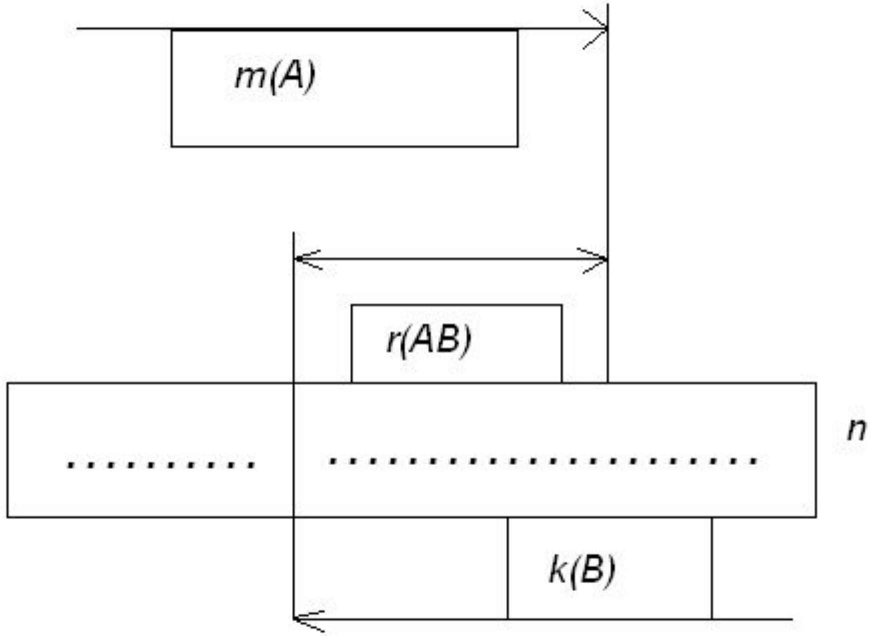


Рис.7

$P(A)=m/n$, $P(AB)=r/n$, $P(B|A)=r/m$

Следствие 1. *Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.*

Доказательство: $P(A)= P(A|B)$

$P(AB)=P(A)\,P(B|A)=P(B)\,P(A|B)$

Т.к. $P(A)= P(A|B)$, то $P(B)= P(B|A)$.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Несколько событий называются независимыми, если вероятность любого из них не зависит от появления любой совокупности остальных.

Следствие 2. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:* $P(AB)=P(A)P(B)$.

Т.о. $P(AB)=P(A)\,P(B|A)=P(B)\,P(A|B)$

Теорема 2.5. *Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность следующего по порядку события вычисляется при условии , что все предыдущие имели место:*

$$P(A_1 A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\,P(A_3|\,A_1A_2)\ldots$$
$$\ldots P(A_n|\,A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Доказательство:

$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)$,

$P(A_1\ A_2\ A_3)=P(A_1\ A_2)\ P(A_3|\ A_1A_2)=\ =P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|\ A_1A_2)$ и т.д.

Теорема 2.6. *Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1\ A_2\ldots\ A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Доказательство:

$P(A_1\ A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\ P(A_1)\ P(A_2)$,

$P(A_1\ A_2\ A_3)=P(A_1)\ P(A_2\ A_3|\ A_1)=\ =P(A_1)P(A_2A_3)=\ P(A_1)\ P(A_2)\ P(A_3)$ и т.д.

Пример 1: В урне (рис.8) 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение: Событие А – появление 2 белых шаров (А – произведение двух событий $A=A_1A_2$, где A_1 – появление белого шара при первом вынимании, A_2 – появление белого шара при втором вынимании). По теореме умножения вероятностей $P(A)=P(A_1)P(A_2|A_1)=2/5\ 1/4=0{,}1$.

Пример 2: Те же условия, что и в предыдущем примере, но после первого вынимания шар возвращается обратно в урну и шары перемешиваются.

Решение: В данном случае события A_1 и A_2, независимы и $P(A)= P(A_1)\ P(A_2)=2/5\ 2/5=0,16$.

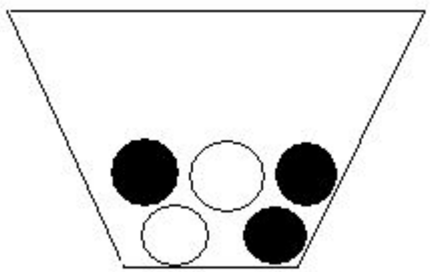


Рис.8

Пример 3: Три стрелка независимо один от другого стреляют по некоторой цели. Вероятность попадания в цель 1-го, 2-го и 3-го стрелка равны соответственно: 0.2,0.5,0.3.Найти вероятность того, что все три стрелка попадут в цель.

Решение: A – попадание всех 3 стрелков

A_1 – попадание 1-го стрелка, A_2 – попадание 2-го стрелка, A_3 – попадание 3-го стрелка.

$A=A_1A_2A_3$, $P(A)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.2\ 0.5\ 0.3= =0.03$

Пример 4: Производится 3 выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при 1-ом, 2-ом и 3-ем выстрелах равны соответственно: 0.4, 0.5, 0.7. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени будет ровно одна пробоина.

Решение: $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$

A_1, A_2, A_3 – попадание при 1, 2, 3 выстрелах

$\overline{A}_1 , \overline{A}_2 , A$ – промахи при 1, 2, 3 выстрелах

$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3)$ =0.4 0.5 0.3+0.6 0.5 0.3+0.6 0.5 0.7=0.36

Пример 5: Те же условия, что и в Примере 4. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Решение:

$$B = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

или $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

$P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$ = 0.6 0.5 0.3=0.09

P(B)=1- $P(\overline{B})$ =1-0.09=0.91