

# Обратная матрица

## Обратная матрица: определение, необходимые условия существования

**Определение 1.** Матрица  $B$  называется *обратной* для матрицы  $A$ , если  
$$A \cdot B = B \cdot A = E,$$
 где  $E$  – единичная матрица.

**Теорема 1** (необходимые условия существования обратной матрицы).  
Для того, чтобы матрица  $A$  имела обратную она должна быть квадратной и невырожденной.

Доказательство.

Ограничение на размерность матрицы следует из необходимого условия существования операции умножения матриц: количество столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строк второго

Необходимость выполнения второго условия докажем методом от противного

Предположим, что нашлась матрица  $A$ , являющаяся вырожденной, т.е.  $\det A = 0$ , у которой существует обратная матрица  $B$ .

$$\det(A \cdot B) = \det E = 1,$$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 0 \cdot \det B = 0$$

Получаем противоречие.

## Условия существования и единственность обратной матрицы

Замечание. Таким образом, если у матрицы  $A$  существует обратная матрица, то она является квадратной матрицей того же размера, причем невырожденной.

**Теорема 2** (единственность существования обратной матрицы). Если у матрицы существует обратная матрица, то она является единственной.

Доказательство. Применим метод от противного.

Предположим, что нашлась матрица  $A$  для которой существуют две различные обратные матрицы  $B$  и  $C$ :

$$A \cdot B = B \cdot A = E, \quad A \cdot C = C \cdot A = E, \quad \boxed{B \neq C}$$

$$A \cdot B = E,$$

$$C \cdot A \cdot B = C \cdot E, \quad (C \cdot A) \cdot B = C, \quad E \cdot B = C, \quad \boxed{B = C}$$

## Формула для вычисления обратной матрицы

**Теорема 3** (формула для вычисления обратной матрицы). Если квадратная матрица  $A = (a_{ij})_n$  является невырожденной, т.е.  $\det A \neq 0$ , то обратная матрица  $A^{-1}$  может быть определена по правилу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \boxtimes & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \boxtimes & A_{n2} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ A_{1n} & A_{2n} & \boxtimes & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $A_{ij}$  - алгебраические дополнения к элементам  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  матрицы  $A = (a_{ij})_n$ .

**Доказательство.**

## Доказательство теоремы 4

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \boxtimes & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \boxtimes & A_{n2} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ A_{1n} & A_{2n} & \boxtimes & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} & \boxtimes & a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n} & \boxtimes & a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \dots + a_{2n}A_{nn} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \dots + a_{nn}A_{1n} & \boxtimes & a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & \det A & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 1 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & 1 \end{pmatrix} = E.$$

## Продолжение доказательства теоремы 4

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \boxtimes & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \boxtimes & A_{n2} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ A_{1n} & A_{2n} & \boxtimes & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix} = \\
 & = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1} & \boxtimes & A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \dots + A_{n1}a_{nn} \\ A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + \dots + A_{n2}a_{n1} & \boxtimes & A_{12}a_{1n} + A_{22}a_{2n} + \dots + A_{n2}a_{nn} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ A_{1n}a_{11} + A_{2n}a_{21} + \dots + A_{nn}a_{n1} & \boxtimes & A_{1n}a_{1n} + A_{2n}a_{2n} + \dots + A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} = \\
 & = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & \det A & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxtimes & 0 \\ 0 & 1 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & 1 \end{pmatrix} = E.
 \end{aligned}$$

## Вычисление обратной матрицы

Авторы некоторых учебников для облегчения запоминания формулы

вводят дополнительную матрицу  $A^*$ , которая состоит из алгебраических дополнений к элементам матрицы  $A$ :  $A^* = (A_{ij}^*)_n$  и называется *присоединенной матрицей* для матрицы  $A$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

**Пример 1.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$        $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot |4| = 1 \cdot 4 = 4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot |2| = (-1) \cdot 2 = -2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot |3| = (-1) \cdot 3 = -3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## Свойства обратной матрицы (теорема 4)

$$1) E^{-1} = E;$$

$$2) (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$3) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

$$4) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$$

$$5) \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

### Доказательство.

$$1) E \cdot E = E. \quad 2) A^{-1} \cdot A = E, \quad A \cdot A^{-1} = E.$$

$$3) A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E^T = E, \quad (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E^T = E.$$

$$4) (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E,$$
$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E.$$

$$5) \det(A \cdot A^{-1}) = 1, \quad \det A \cdot \det A^{-1} = 1, \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$