Математическая экономика

Тема 5. ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ

5.1. ВИДЫ И ОБЪЕКТЫ РАВНОВЕСНЫХ МОДЕЛЕЙ

Равновесные модели подразделяются на модели:
- частичного,
- полирынкового (англ. multi-market) - общего равновесия

Круговые потоки в двухсекторной экономике

5.2. ПРОСТОЙ ОБМЕН В ДВУХСУБЪЕКТНОЙ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ЭКОНОМИКЕ

Экономика состоит из двух субъектов, А и В, изначально имеющих два товара, *X* и *Y*, в количествах (X^0_A, Y^0_A) и (X^0_B, Y^0_B).

Кривая предложения из запаса

Бюджетное уравнение для одного из субъектов :

$$Y = \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} X \qquad (5.1)$$

где *I* – бюджет субъекта *A*;

p_x и p_y – цены (идеальные) товаров.

Кривая предложения OC_A товара Y из его начального запаса Y^0_A к обмену на товар X (OC; offer curve — англ.) представляет собой множество точек $(S_A, A, B, C, \ldots)$ касания кривых безразличия и бюджетных линий, проходящих через точку начального запаса и имеющих разный наклон.

Экономически кривая предложения из запаса показывает количество второго товара, до которого готов довести свой запас потребитель при различных соотношениях цен товаров.

Получим выражение кривой предложения из запаса, учитывая, что для неё, во-первых, выполняется условие оптимального потребительского выбора:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y} \qquad (5.2)$$

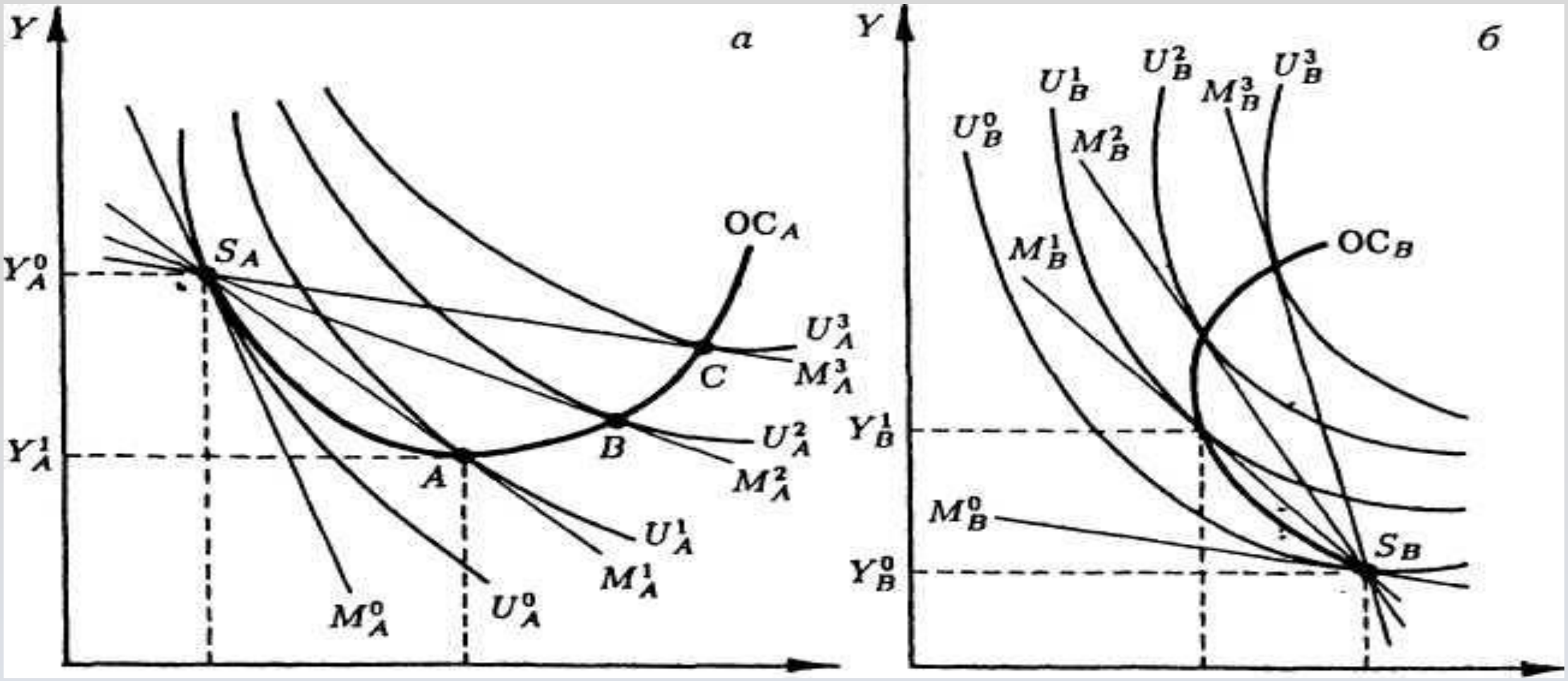
и, во-вторых, она соединяет бюджетные линии, проходящие через некоторую точку:

$$Y = Y^0 + \frac{p_x}{p_y}\left(X - X^0\right) \qquad (5.3)$$

Выразив соотношение цен товаров из (5.3), $\frac{Y - Y^0}{X - X^0} = \frac{p_x}{p_y}$, и подставив в (5.2), получим:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{Y - Y_0}{X - X_0} \qquad (5.4)$$

Кривые предложения двух субъектов



$X^0{}_A$ $X^1{}_A$ x X^1 $X^1{}_B$

Пример вывода выражения кривой предложения

Например, для степенной функции полезности вида

$$U = X^{\alpha} Y^{\beta}$$

имеем следующее выражение кривой предложения:

$$\frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{Y - Y_0}{X - X_0}$$

откуда

$$\beta X\left(Y - Y_0\right) = \alpha Y\left(X - X_0\right)$$

а следовательно

$$Y = \frac{\beta Y_0 X}{\left(\beta - \alpha\right) X + \alpha X_0}$$

Это уравнение определяет гиперболу, вертикальная асимптота (нуль знаменателя) которой имеет координату:

$$X = \frac{\alpha X_0}{\alpha - \beta}$$

а горизонтальная асимптота (по правилу Лопиталя или как отношение коэффициентов при старших степенях дробно-рациональной функции) – координату

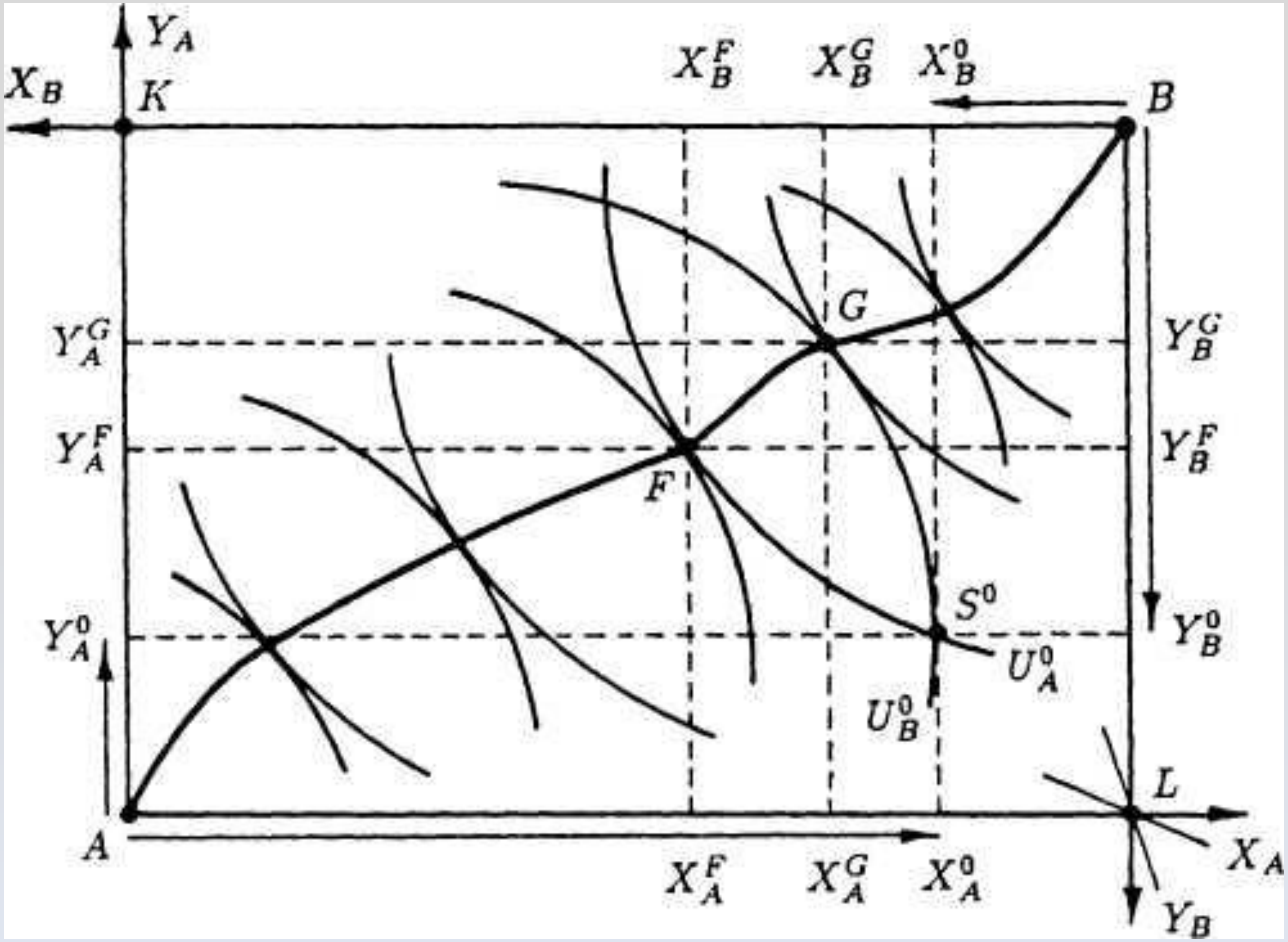
$$Y = \frac{\beta Y_0}{\beta - \alpha}$$

При этом предполагается, что $\beta \neq \alpha$, иначе товары равноценны для потребителя и обмена не происходит. Таким образом, для монотонной кривой безразличия, характерной для степенной функции полезности, кривая предложения из запаса также монотонно убывает. Поэтому участок $S_A O C_A$ правее точки А на рис. 5.2 (а) или левее точки В недопустим, так как это означает «обратный» эффект замены.

5.3. АНАЛИЗ ОБМЕНА В ДВУХСУБЪЕКТНОЙ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ЭКОНОМИКЕ. КОРОБКА ЭДЖУОРТА

Коробка Эджуорта представляет совмещенные карты безразличия двух субъектов, А и В, причем карта безразличия В повернута на 180°.

Коробка Эджуорта и контрактная линия



Контрактная линия

Множество точек касания кривых безразличия двух субъектов образует так называемую контрактную линию (кривая *AB* на рис. 5.3), характеризующую множество *взаимоприемлемых* результатов обмена двух субъектов.

Уравнение контрактной линии имеет вид:

$$\frac{MU_x^A}{MU_y^A} = \frac{MU_y^B}{MU_x^B} \qquad (5.6)$$

Пример вывода выражения контрактной линии

Для степенных функций полезности субъектов

$$U^A = X^\alpha Y^\beta \qquad U^B = X^\gamma Y^\delta$$

имеем следующее выражение контрактной линии:

$$\frac{\alpha Y^A}{\beta X^A} = \frac{\delta X^B}{\gamma Y^B}$$ *, откуда* $$\frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{\delta (L - X)}{\gamma (K - Y)}$$

следовательно

$$\alpha\gamma Y^2 - \alpha\gamma KY = \beta\delta X^2 - \beta\delta LX$$

Обозначив $\varphi = \dfrac{\beta\delta}{\alpha\gamma}$ запишем это уравнение в виде:

$$Y^2 - KY = \varphi X^2 - \varphi LX$$

Это уравнение определяет семейство функций $Y=Y(X)$. Преобразуя к квадрату разности левую и правую части уравнения, получим:

$$\left(Y - \frac{K}{2}\right)^2 - \frac{K^2}{4} = \left(\frac{X}{\sqrt{\varphi}} - \frac{\varphi L}{2}\right)^2 - \frac{(\varphi L)^2}{4} \qquad (5.7)$$

Рассмотрим частный случай потребителей, имеющих противоположные предпочтения $\alpha = \delta, \beta = \gamma$ *, при этом* $\varphi = 1$

$$\left(Y - \frac{K}{2}\right)^2 - \frac{K^2}{4} = \left(X - \frac{L}{2}\right)^2 - \frac{L^2}{4}$$

Для случая равенства запасов K=L имеем:

$$Y = X \qquad (5.8)$$

Таким образом, контрактная линия является монотонно возрастающей (для степенных функций полезности при равенстве коэффициентов эластичности и одинаковых запасах товаров – линейно возрастающей).

Условия максимизации полезности

Максимальное удовлетворение (полезность) для обоих субъектов возможно в точке касания кривых безразличия субъектов, лежащей на бюджетной линии, проходящей через точку начального запаса товаров:

$$MRS^{A}_{X,Y} = MRS^{B}_{Y,X} = \frac{P_x}{P_y} \qquad (5.9)$$

Пример определения равновесия в обмене

Выражение кривой предложения первого субъекта

$$Y = \frac{\beta Y_0 X}{(\beta - \alpha)X + \alpha X_0}$$

получено выше (формула (5.5)). Выражение кривой предложения второго субъекта найдем, подставив в эту формулу координаты второй системы осей в коробке Эджуорта

$$X_B = L - X_A, Y_B = K - Y_A$$

и заменив коэффициенты эластичности α на γ, β на δ. В результате получим:

$$K - Y = \frac{\delta\left(K - Y_0\right)\left(L - X\right)}{\left(\delta - \gamma\right)\left(L - X\right) + \gamma\left(L - X_0\right)}$$

Координаты точки равновесия определяем, приравнивая выражение кривой предложения первого субъекта и второго субъекта откуда

$$\frac{\beta Y_0 X}{\left(\beta - \alpha\right)X + \alpha X_0} = K - \frac{\delta\left(K - Y_0\right)\left(L - X\right)}{\left(\delta - \gamma\right)\left(L - X\right) + \gamma\left(L - X_0\right)} \qquad (5.10)$$

Полученное трансцендентное уравнение позволяет определить искомый оптимальный товарный набор.

5.4. РАВНОВЕСИЕ В ПРОИЗВОДСТВЕ. ДВУХФАКТОРНАЯ ДВУХПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ

Уравнение контрактной линии при обмене производственными ресурсами имеет вид:

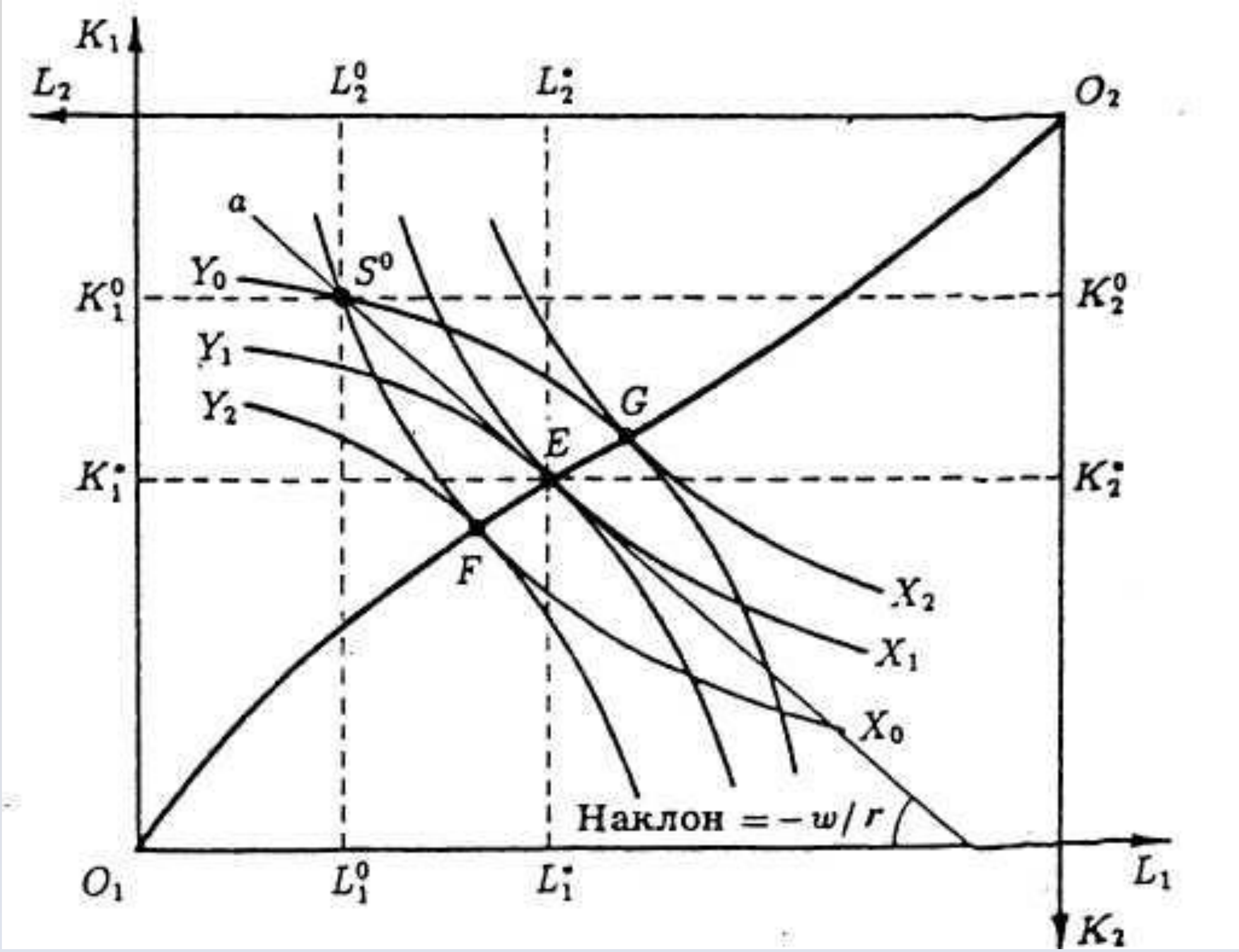
$$MRTS^{X}_{KL} = MRTS^{Y}_{KL}\ . \qquad (5.11)$$

Равновесие при обмене производственными ресурсами устанавливается при условии:

$$MRTS_{KL}^{X} = MRTS_{LK}^{Y} = \frac{w}{r} \qquad (5.12)$$

где обозначены фактора производства, *К* и *L*, приобретаемых по ценам *w* и *r.*

Равновесие в производстве



5.5. РАВНОВЕСИЕ В ПРОИЗВОДСТВЕ И ПОТРЕБЛЕНИИ

Кривая производственных возможностей (кривая продуктовой трансформации) характеризует все множество комбинаций максимальных выпусков двух товаров, *X* и *Y*, при полном и эффективном использовании наличных факторов производства, $\overline{K}$ и $\overline{L}$.

Пример вывода формулы кривой производственных возможностей

Для производственных функций фирм

$$X = L^{\alpha} K^{\beta} \qquad Y = L^{\gamma} K^{\delta}$$

можно получить выражение кривой производственных возможностей, если один из ресурсов, например К, расходуется на выпуск обоих продуктов:

$$K_X + K_Y = \frac{X^{1/\beta}}{L_X^{\alpha/\beta}} + \frac{Y^{1/\delta}}{L_Y^{\gamma/\delta}} = K = Const \qquad (5.13)$$

Кривая производственных возможностей является эллиптической кривой, то есть прирост производства одного товара обусловливает снижение выпуска другого товара, причем чем больше выпускается первого товара, тем значительнее сокращение другого товара.

Предельная норма продуктовой трансформации (**MRPT**; marginal rate of product transformation — англ.*)* –показывает, на сколько должно быть сокращено производство товара *Y* для того, чтобы выпуск товара *X* увеличился на единицу при постоянных запасах ресурсов:

$$MRPT_{XY} = -\frac{dY}{dX}$$

Можно показать, что предельная норма продуктовой трансформации равна соотношению предельных издержек на каждый товар:

$$MRPT_{XY} = -\frac{dY}{dX} = \frac{MCx}{MCy} \qquad (5.14)$$

Действительно, при постоянных запасах ресурсов

$$dK = 0, dL = 0$$

дифференциал издержек равен нулю:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial X}dX + \frac{\partial C}{\partial Y}dY = 0$$

Отсюда:

$$-\frac{dY}{dX} = \frac{\dfrac{\partial C}{\partial X}}{\dfrac{\partial C}{\partial Y}} = \frac{MC_X}{MC_Y}$$

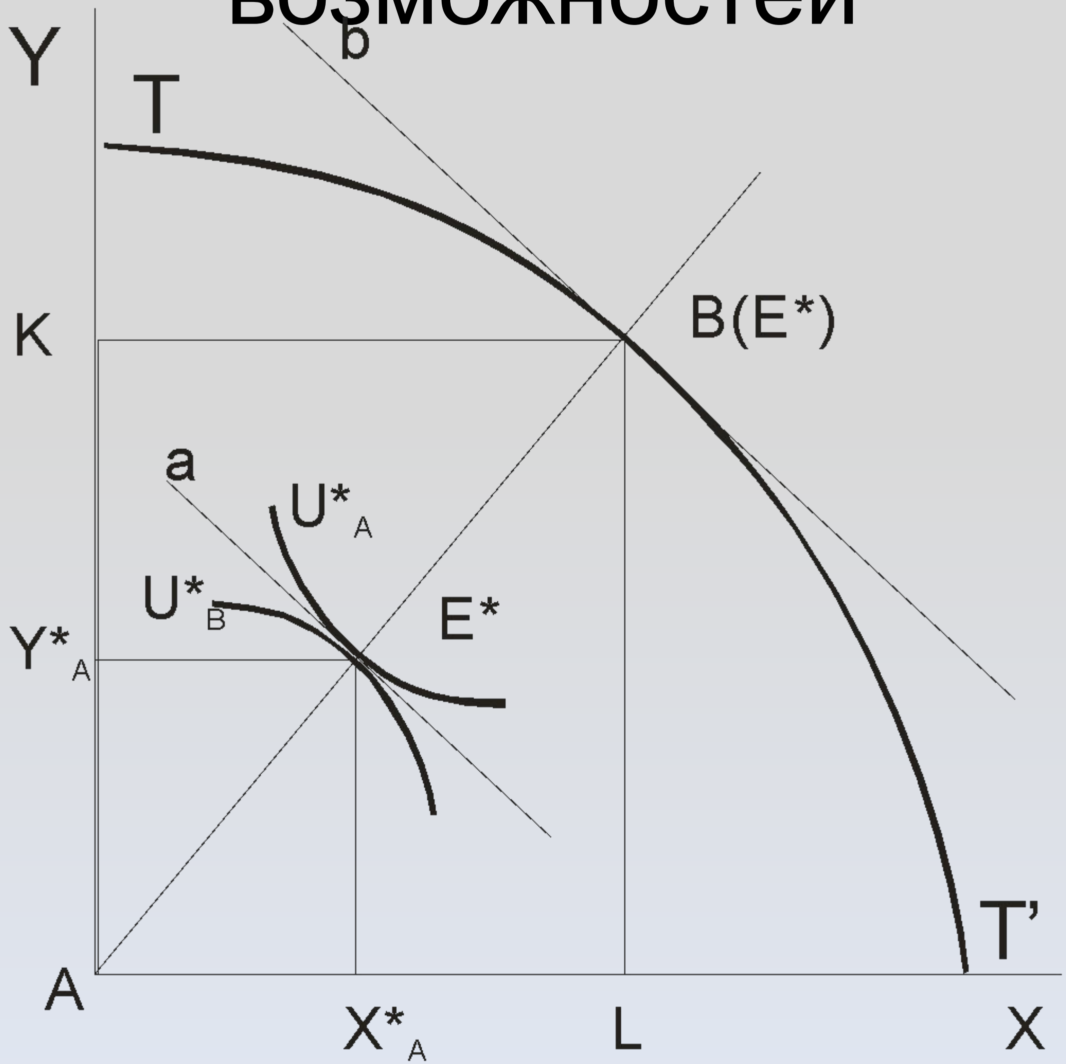
В условиях совершенной конкуренции цены равны предельным издержкам:

$$MRPT_{XY} = \frac{MCx}{MCy} = \frac{Px}{Py} \qquad (5.15)$$

Поскольку правые части (5.15) и (5.9) одинаковы — P_X/P_Y, мы можем приравнять и левые их части, в результате чего получим условие общего равновесия:

$$\boldsymbol{MRPT_{XY} = MRS^A_{X,Y} = MRS^B_{X,Y}\ .}$$

Кривая производственных возможностей



Таким образом, в условиях совершенной конкуренции двух-субъектная, двухфакторная, двухпродуктовая экономическая **система находится в состоянии общего равновесия, когда выполняются следующие три условия:**

1) Предельные нормы замены двух товаров одинаковы для обоих субъектов и равны соотношению их цен.

2) Предельные нормы технологической замены факторов производства одинаковы для обеих фирм и равны соотношению факторных цен.

3) Предельные нормы замены двух товаров в потреблении одинаковы и равны предельной норме продуктовой трансформации.

5.6. МОДЕЛЬ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ ВАЛЬРАСА

Функция спроса на товар является функцией цен всех *m* товаров:

$$Q^D_i = D_i(P_1,\ldots,P_i,\ldots,P_m), \quad i=1,2,\ldots,m. \qquad (5.17)$$

На совершенно конкурентном рынке предложение товара также является функцией цен всех *m* товаров:

$$Q^S_i = S_i(P_1,\ldots,P_i,\ldots,P_m), \quad i = 1,2,.:,m. \qquad (5.18)$$

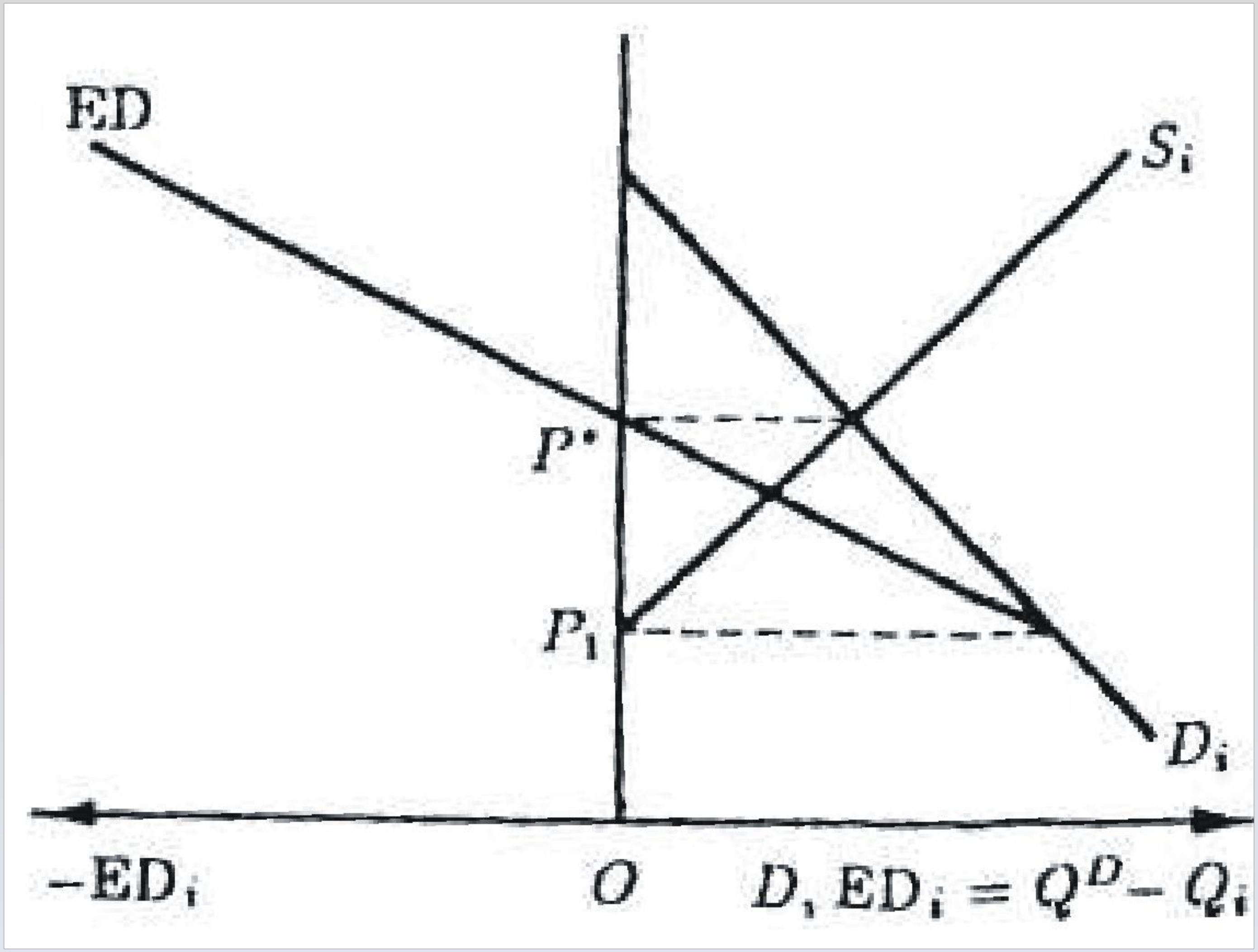
Функция избыточного спроса (ED; excess demand — англ.) на товар может быть представлена как разность между функцией спроса и функцией предложения:

$ED_i(P_1,\ldots P_i,\ldots P_m)= D_i(P_1,\ldots P_{,i}\ldots P_m)-S_i(P_l,\ldots,P_i,\ldots,P_m)$. (5.19)

Условием равновесия на рынках – равенство избыточного спроса нулю:

$$ED_i\,(P_1,\ldots,P_m) = 0. \quad (5.20)$$

Кривая избыточного спроса



Условие «расчистки рынка» - для экономики в целом общая ценность покупок всегда равна общей ценности продаж, и, значит,

$$\sum_{i}^{m} P_i ED_i(P_1, \ldots, P_m) = 0 \qquad (5.21)$$

Равенство (5.21) интерпретируют обычно как закон Вальраса*:* если все рынки, кроме одного, т. е. *m-1* рынков, находятся в равновесии, то и оставшийся *(m-1)-й* рынок также находится в равновесии. А это значит, что число независимых уравнений в системе равно *m* - 1.

Разделим все цены на P_1. Тогда (5.21) примет вид

$$ED_i\left(1, \frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1}, \ldots, \frac{Pm}{P_1}\right) = 0 \qquad (5.22)$$

Таким образом, мы получили систему, состоящую из m – 1 уравнения, допускающую единственное решение относительно (m - 1)-й цены.

Пример условий равновесия для линейных функций спроса и предложения

При функциях спроса и предложения

$Q^D = A - aP$ и $Q^S = B + bP$

функцией избыточного спроса будет

$E_Q = (A - B) - (a + b)P.$

Для рынка двух товаров условие (5.20) имеет вид:

$$A_1 - B_1 = (a_1 + b_1)p_1,$$
$$A_2 - B_2 = (a_2 + b_2)p_2,$$

откуда, разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{A_2 - B_2}{A_1 - B_1} = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}\frac{p_2}{p_1}$$

Приняв цену первого товара в качестве единицы счета, обозначим

$$p'_2 = \frac{p_2}{p_1}$$

Поэтому можно записать уравнение Вальраса (5.22):

$$\frac{A_2 - B_2}{A_1 - B_1} = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} p'_2 \qquad (5.23)$$

Условие «расчистки рынка» (5.21) имеет следующий вид:

$$p_1\left[A_1 - B_1 - (a_1 + b_1)p_1\right] + p_2\left[A_2 - B_2 - (a_2 + b_2)p_2\right] = 0$$

Уравнения (5.23), (5.24) позволяют найти искомые цены товаров.