

Список литературы

1. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер и др. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высш. шк., 1993. – 336 с.
3. Соловьев В.И. Методы оптимальных решений: Учебное пособие. – М.: Финансовый университет, 2012. - 364 с.

Составляющие постановки задачи оптимизации

- Решение (план) задачи - вектор $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.
- Целевая функция (функция цели, показатель эффективности) $F(\mathbf{X})$.
- Условия \mathbf{D} (система ограничений), налагаемые на компоненты вектора \mathbf{X} .

Формальная постановка задачи оптимизации

$$\text{определить } \min(\max) F(X) \quad , \quad (1) \\ X \in D$$

где

$$D : \begin{cases} h_i(X) = 0, & i = \overline{1, k} \\ g_j(X) \leq 0, & j = \overline{1, l} \end{cases} \quad (2)$$

Допустимый план X^* , доставляющий функции цели экстремальное значение (\min или \max), называется **ОПТИМАЛЬНЫМ**.

Краткая классификация оптимизационных задач

№	Признак	Классы задач		
1	Наличие ограничений	Условной оптимизации		Безусловной оптимизации
2	По виду целевой функции и ограничений X	Линейного программирования		Нелинейного программирования
3	По виду вектора	Непрерывной оптимизации	Дискретной оптимизации	Динамического программирования
4	По размерности целевой функции	Скалярной оптимизации		Многокритериальной оптимизации
5	По наличию и виду неопределенных факторов	Детерминированной оптимизации	Стохастической оптимизации	Оптимизации в условиях неопределенности .

Задача линейного программирования (ЛП)

1. Общая задача ЛП

определить $\min(\max)_{X \in D} F(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ (3)

где $D: \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = \overline{1, k} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = \overline{(k+1), m} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, l} \end{cases}$ (4)

Матричная форма общей задачи ЛП

$$\text{определить } \min(\max) F(X) = C^T X, \quad (5) \\ X \in D$$

где

$$D: \begin{cases} A_1 X \leq B_1 \\ A_2 X = B_2 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, l} \end{cases} \quad (6)$$

В постановке (5), (6):

$$\dim \mathbf{C}^T = [1 \times n] \quad \dim \mathbf{X} = [n \times 1]$$

$$\dim \mathbf{A}_1 = [k \times n] \quad \dim \mathbf{B}_1 = [k \times 1]$$

$$\dim \mathbf{A}_2 = [s \times n] \quad \dim \mathbf{B}_2 = [s \times 1]$$

$$k + s = m; \quad l \leq n.$$

2. Стандартная задача ЛП

определить $\min(\max)_{X \in D} F(X) = C^T X,$ (7)

где

$$D : \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0_n \end{cases} \quad (8)$$

3. Каноническая задача ЛП

определить $\min(\max)_{X \in D} F(X) = C^T X$, (9)

где

$$G : \begin{cases} AX = B \\ X \geq 0_n \end{cases} \quad (10)$$

!!! Замечание. Любая задача ЛП может быть представлена в виде *канонической, стандартной или общей задачи ЛП.*

Экономические интерпретации задачи ЛП

I. Задача планирования производства

Вид ресурса	Запас ресурса	Стоимость единицы ресурса	Количество единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции					
			P_1	P_2	...	P_j	...	P_n
R_1	b_1	d_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
R_2	b_2	d_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...
R_i	b_i	d_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...						
R_m	b_m	d_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
Цена продукта			c_1	c_2	...	c_j	...	c_n

Какое количество единиц каждого продукта необходимо произвести, чтобы получить максимальную прибыль?

Постановка задачи.

1. План производства: $X = [x_1, \dots, x_n]^T$

2. Ограничения.

- Физический смысл:

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \quad (11)$$

- Условие ограниченного спроса:

$$x_j \leq k_j, j = \overline{1, n} \quad (12)$$

- Ресурсов должно хватить:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = \overline{1, m}; \quad (13)$$

3. Целевая функция: чистая прибыль от реализации всего плана производства

- Себестоимость s_j единицы продукции P_j :

$$s_j = \sum_{i=1}^m d_i a_{ij} \quad j = \overline{1, n}$$

- Чистая прибыль от реализации единицы продукции P_j :

$$q_j = c_j - s_j \quad j = \overline{1, n}$$

- Чистая прибыль от реализации всего плана производства:

$$F(X) = \sum_{j=1}^n q_j x_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (14)$$

Формальная постановка задачи планирования производства

Требуется определить план производства $\mathbf{X}^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]^T$, обеспечивающий максимальное значение целевой функции

$F(\mathbf{X})$ вида (14) при соблюдении ограничений на вектор \mathbf{X} вида (11), (12), (13).

Замечание. Постановка (11)-(14) является *стандартной задачей ЛП.*

II. Транспортная задача (ТЗ)

Потребители ///////// Источники	P_1	...	P_j	...	P_n	Кол-во ресурсов
I_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
...
I_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...
I_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Заявки на товары от потребителей	b_1	...	b_j	...	b_m	$\sum_i a_i = \sum_j b_j$

II.1. ТЗ по критерию стоимости

Предполагаем, что

- c_{ij} - стоимость перевозки единицы ресурса I_i со склада в пункт потребления II_j ;
- $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, т.е. ТЗ с правильным балансом.

Постановка задачи.

1. План производства: $X = [x_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}]^T$.

2. Ограничения.

- физический смысл:

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \quad (15)$$

- Емкости складов д.б. израсходованы полностью:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m} \quad . \quad (16)$$

- Заявки, поданные потребителями, д.б. удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n} \quad . \quad (17)$$

3. Общая стоимость перевозок:

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad . \quad (18)$$

Формальная постановка ТЗ по критерию стоимости

Требуется определить план перевозок X^* , обеспечивающий минимальное значение целевой функции $F(X)$ вида (18) при соблюдении ограничений на вектор вида (15), (16), (17).

Замечание. Постановка (15)-(18) является *канонической задачей ЛП*.

II.2. ТЗ по критерию времени

Предполагаем, что

- $c_{ij}(x_{ij})$ - время перевозки ресурса со склада I_i в пункт потребления II_j (зависит, вообще говоря, от объема перевозки);
- $\sum a_i = \sum b_j$, т.е. ТЗ с правильным балансом.

Постановка задачи.

1. План производства: $X = [x_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}]^T$
2. Ограничения:– (15)-(17).

3. Общее время всех перевозок T – все перевозки заканчиваются, в момент, когда заканчивается самая длительная из всех перевозок:

$$T = F(\mathbf{X}) = \max_{\substack{i=1, m, \\ j=1, n, \\ x_{ij} > 0}} \left(c_{ij}(x_{ij}) \right) \quad (19)$$

Формальная постановка ТЗ по критерию времени

Требуется определить план перевозок X^* ,
обеспечивающий минимальное значение целевой функции
 $F(X)$ вида (19) при соблюдении ограничений на вектор
вида (15), (16), (17).

Замечание. Постановка (15), (16), (17), (19) является задачей
нелинейного программирования.

Пример 1.

Сформулировать постановку задачи планирования производства в виде задачи ЛП.

Дана таблица.

Вид ресурса	Запас ресурса	Кол-во единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукта	
		P_1	P_2
S_1	180	6	8
S_2	160	7	6
S_3	50	4	1
S_4	210	3	2

Прибыль от реализации единицы продукции P_1 и P_2 составляет 20 и 30 тыс. рублей соответственно.

Требуется найти план производства продукции, при котором Прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. $X = [x_1, x_2]^T$ - план производства продукции P_1 и P_2 соответственно.

Для реализации плана производства X потребуется ресурсов

$$\begin{array}{l} S_1 : 6x_1 + 8x_2 ; \quad S_2 : 7x_1 + 6x_2 ; \\ S_3 : 4x_1 + 1x_2 ; \quad S_4 : 3x_1 + 2x_2 . \end{array}$$

Потребление ресурсов не должно превышать их запасы:

$$\begin{aligned}6x_1 + 8x_2 &\leq 180 \\7x_1 + 6x_2 &\leq 160 \\4x_1 + 1x_2 &\leq 50 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 21\end{aligned}\tag{20}$$

Исходя из физического смысла:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.\tag{21}$$

Суммарная прибыль:

$$F(\mathbf{X}) = 20x_1 + 30x_2 \rightarrow \max\tag{22}$$

Пример 2.

Привести стандартную задачу ЛП к канонической форме.

$$F(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Решение. Введем новые переменные по правилу:

$$2x_1 + x_2 - 1 = x_3$$

$$-x_1 + x_2 = x_4$$

Каноническая форма:

$$F(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 = 0$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$