Белорусский государственный университет транспорта
кафедра «ЛОКОМОТИВЫ»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Лектор: д.т.н., профессор Сосновский Леонид Адамович
к.т.н., доцент Комиссаров Виктор Владимирович
п.з.: ассистент Таранова Елена Сергеевна

Лекции – 18 часов
Практические занятия – 12 часов
Форма контроля знаний – зачет

(по всем вопросам обращаться на кафедру ауд. 1403,
а также в лабораторию ауд. 1415а)

ГОМЕЛЬ, 2017

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. ***Сосновский, Л.А.*** **Элементы теории вероятностей, математической статистики и теории надёжности / Л.А. Сосновский. – Гомель; БелГУТ, 1994. – 146 с.** (в НТБ БелГУТа).
2. ***Шевченко Д.Н.*** **Основы теории надежности : учеб.-методич. пособие для студ. техн. спец./ Д. Н. Шевченко; под ред. Л.А. Сосновского. – Гомель: БелГУТ, 2010. – 250 с.** (в НТБ БелГУТа)
3. ***Богданович А.В.*** **Оценка основных показателей надежности и риска невосстанавливаемых изделий / А.В. Богданович, О.М. Еловой, Л.А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 1995 г. – 95 с.** (в НТБ БелГУТа)

Дополнительная:

- **Сосновский, Л.А.** Вероятностные методы расчета на прочность при линейном и сложном напряженных состояниях в 2-х частях: Метод. указания по изучению курса «Сопротивление материалов»/ Л.А. Сосновский. – Гомель: БелИИЖТ, 1984. – 74с. (в НТБ БелГУТа).

1. **Сосновский, Л.А.** L-риск (механотермодинамика необратимых повреждений) / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 317 с.
2. **Сосновский, Л.А.** Комплексная оценка надежности силовых систем по критериям сопротивления усталости и износостойкости (основы трибофатики): Метод. указания по изучению курса «Надежность транспортных систем, машин и сооружений» для студентов транспортных вузов / Л.А. Сосновский. – Гомель: БелИИЖТ, 1988. –56 с. (в НТБ БелГУТа).
3. **Богданович, А.В.** Оценка надежности простого коленчатого вала. Надежность по критериям трибофатики: Пособие по курсу «Основы теории надежности» / А.В. Богданович, О.М. Еловой, Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2002. – Ч.2.–30 с. (в методическом кабинете кафедры – 5 экз.).
4. **Сосновский, Л.А.** Показатель безопасности и оперативная характеристика риска / Л.А. Сосновский. – Гомель, БелИИЖТ, 1991. (в НТБ БелГУТа).

ПЛАН ЛЕКЦИЙ

Лекция 1. Надежность в технике

Лекция 2. Отказы и их причины. Статистический анализ

Лекция 3. Оценка показателей надежности: модель отказов

Лекция 4. Рассеяние характеристик прочности и нагруженности

Лекция 5. Оценка показателей надежности: модель нагрузка-прочность (часть1)

Лекция 6. Оценка показателей надежности: модель нагрузка-прочность (часть2)

Лекция 7. Схемная надежность

Лекция 8. Надежность трибофатической системы

Лекция 9. Концепция риска. Оценка безопасности.

Лекция 3

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ: МОДЕЛЬ ОТКАЗОВ

Таблица 3 - Классификация объектов по последствиям отказа

Отказ	Последствия отказа	Допустимая вероятность безотказной работы	Тип машины
Тяжелые (катастрофические)	Авария Катастрофа Невыполнение ответственного задания	$P(t) \to 1$	**Летательные аппараты** **Подъемно-транспортные машины** **Военная техника** **Машины химического производства** **Медицинское оборудование**
Средние (экономический ущерб)	Повышенные простои в ремонте Работа на пониженных режимах Работа с ухудшенными параметрами	Значительный ущерб $P(t) \geq 0{,}99$ Незначительный ущерб $P(t) \geq 0{,}9$	**Технологическое оборудование** **Сельскохозяйственные** **Бытовые**
Легкие (затраты на ремонт в пределах нормы)	Без последствий	$P(t) << 0{,}9$	**Отдельные узлы и элементы машин**

3.1. Обзор математических моделей отказов объектов

Непосредственное исследование технических объектов при анализе показателей их надежности *сопряжено с массой проблем*:

• исследование длительное, что особенно характерно для высоконадежных объектов;

• дорогостоящее;

• зачастую ведет к разрушению объекта;

• исследование ограниченной совокупности объектов влечет ошибки в оценке показателей надежности;

• исследуемые объекты могут отсутствовать в природе будучи перспективными.

По этой причине *исследование надежности* объектов *целесообразно проводить на математических моделях*. При этом основными задачами исследования являются:

•построение адекватной модели надежности объекта (системы, элементов), учитывающей процессы деградации, с использованием математического выражений (алгебраических или дифференциальных уравнений и систем, логических условий и алгоритмов);

•определение показателей надежности модели объекта математическими методами (аналитическими или численными).

Главной целью анализа надежности объектов является определение **функции отказа** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, посредством которой можно определить все показатели безотказности невосстанавливаемых объектов.

3.1. Обзор математических моделей отказов объектов

Существует несколько типовых подходов к построению математических моделей отказов объектов.

1 Модель мгновенных повреждений (внезапные отказы).

2 Модель накапливающихся изменений (постепенные отказы).

3 Модель релаксации.

4 Модель действия нескольких независимых причин.

5 Модель действия нескольких зависимых причин.

Ниже кратко рассмотрим две первые, *наиболее простые*, модели отказов.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения может иметь различные, формы.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, где перечислены возможные значения этой случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$

где

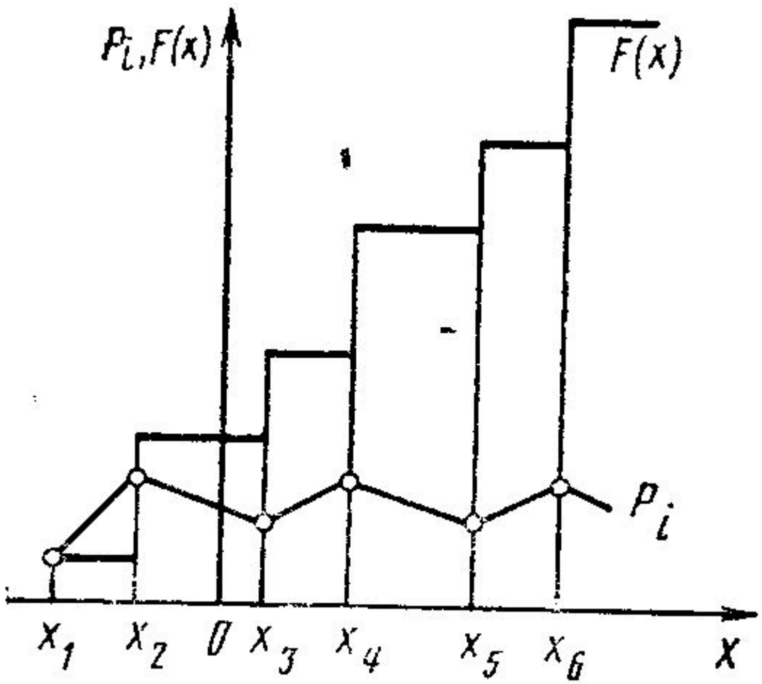
$$p_i = P(X = x_i), \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Графическое изображение ряда распределения, называется **многоугольником (полигоном) распределения**

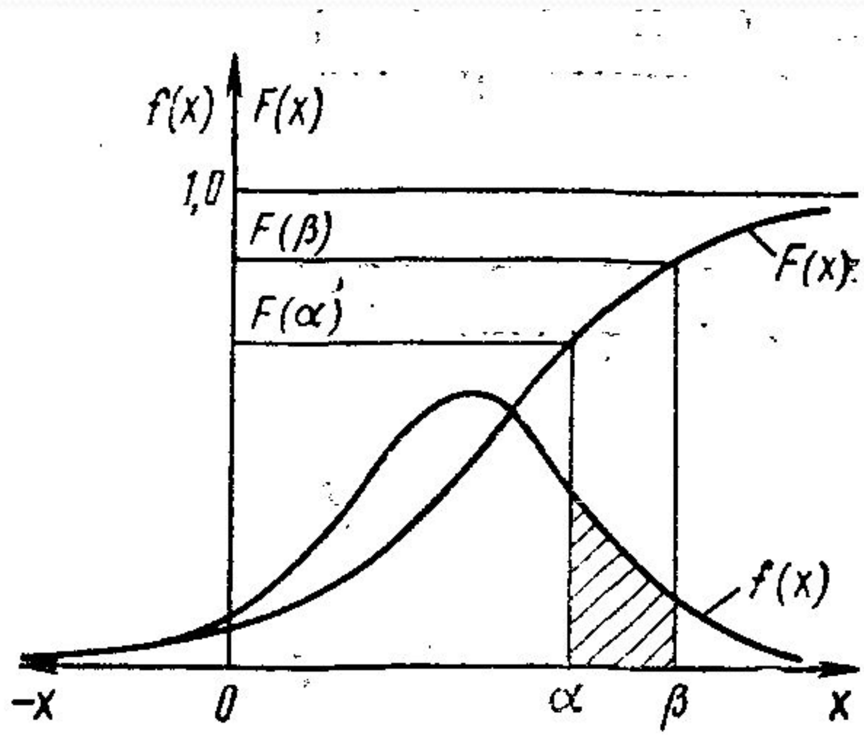
Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение, меньше чем x,

$$F(x) = P(X < x).$$

Элементы теории вероятностей и математической статистики



Многоугольник и функция распределения дискретной величины



Плотность вероятностей *f*(*x*) и функция распределения *F*(*x*) непрерывной случайно й величины

Функция распределения есть неубывающая функция, обладающая следующими свойствами:

$$F(-\infty)=0;\ F(+\infty)=1;\ F(x_1)\le F(x_2)$$

при $x_1 \le x_2$; $$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Для дискретных случайных величин функция распределения есть разрывная ступенчатая функция, а для непрерывных случайных величин она непрерывна и дифференцируема.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины называется функция

$$f(x) = F'(x)$$

Плотность распределения любой случайной величины обладает свойствами:

$$f(x) \ge 0;\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Функцию распределения $F(x)$ и плотность распределения $f(x)$ часто называют **законом распределения в интегральной и дифференциальной формах** соответственно.

Числовыми характеристиками случайных величин являются так называемые *моменты распределений*, из которых наиболее применимы следующие.

Математическое ожидание случайной величины, или первый начальный момент, есть среднее значение, вычисляемое по формулам:

для дискретной случайной величины

$$\upsilon_1 = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i;$$

для непрерывной случайной величины

$$\upsilon_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсия есть центральный момент второго порядка и вычисляется по формулам:

для дискретной случайной величины

$$\mu_1 = D[X] = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M[X]\right)^2 p_i;$$

для непрерывной случайной величины

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - M[X]\right)^2 f(x) dx.$$

3.2. Рассеяние наработки объекта до отказа. Формирование функции отказа объекта

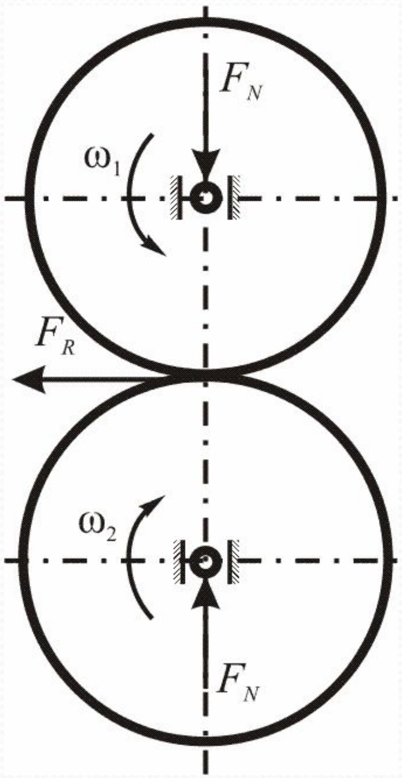


Рисунок 1 – Общая схема пары трения

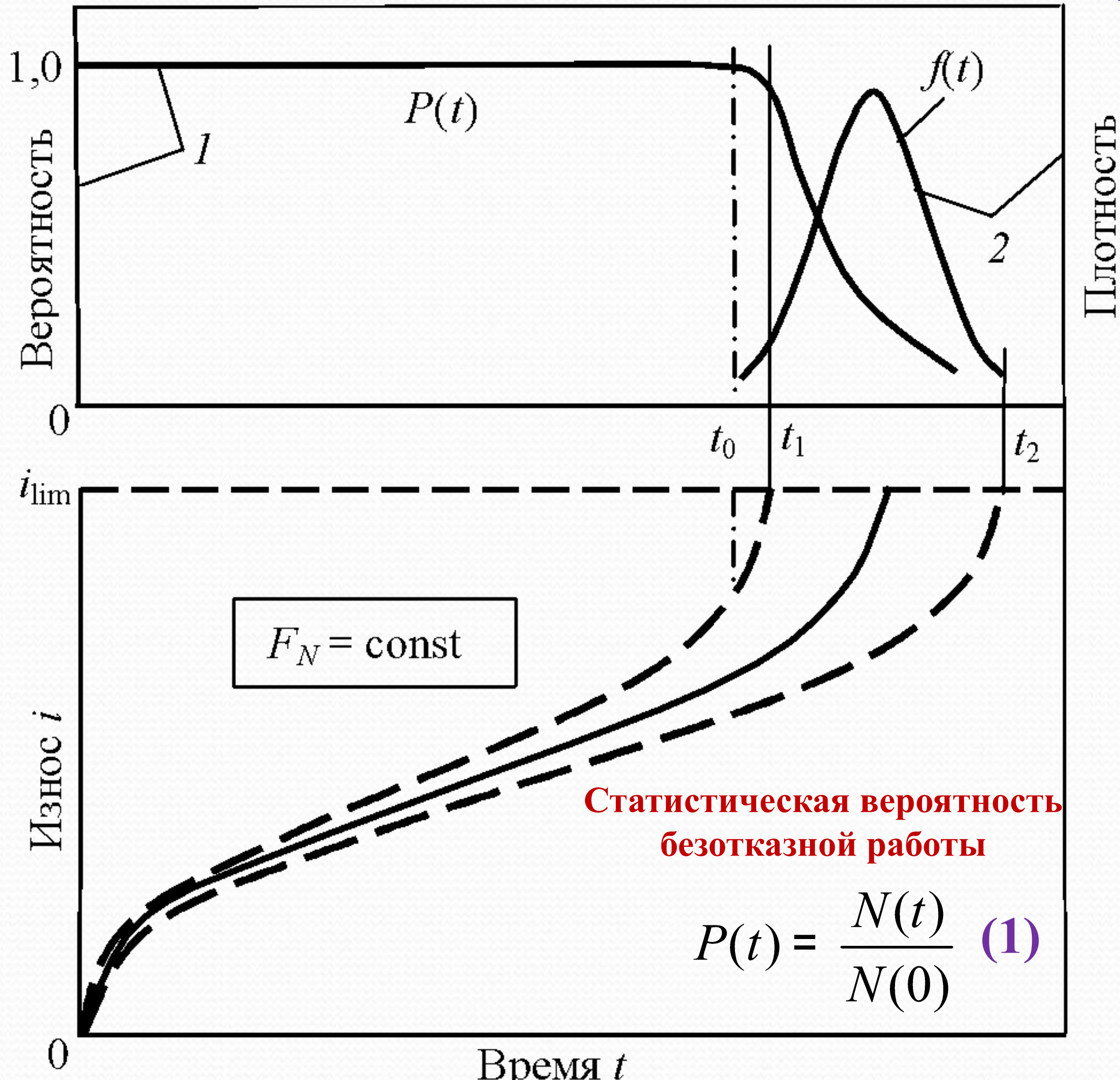


Рисунок 2 – Кривые изнашивания и их взаимосвязь с вероятностью безотказной работы (1) и функцией распределения наработки до отказа (2)

Статистическая вероятность безотказной работы

$$P(t) = \frac{N(t)}{N(0)} \quad (1)$$

Статистическая вероятность отказа

$$Q(t) = 1 - P(t) \quad (2)$$

3.2. Рассеяние наработки объекта до отказа. Формирование функции отказа объекта

Плотность распределения наработки до отказа

$$\tilde{f}(t_i) = \frac{a(t_i)}{\Delta t_i} \frac{1}{N(t_0)} = \frac{N_i - N_{i+1}}{\Delta t_i \, N(t_0)} \qquad (3)$$

$a(t_i)$ – частота отказов;

Δt_i – малый промежуток времени;

N_i – количество пар трения, работоспособных в начале временного интервала Δt_i,

N_{i+1} – в конце временного интервала Δt_i.

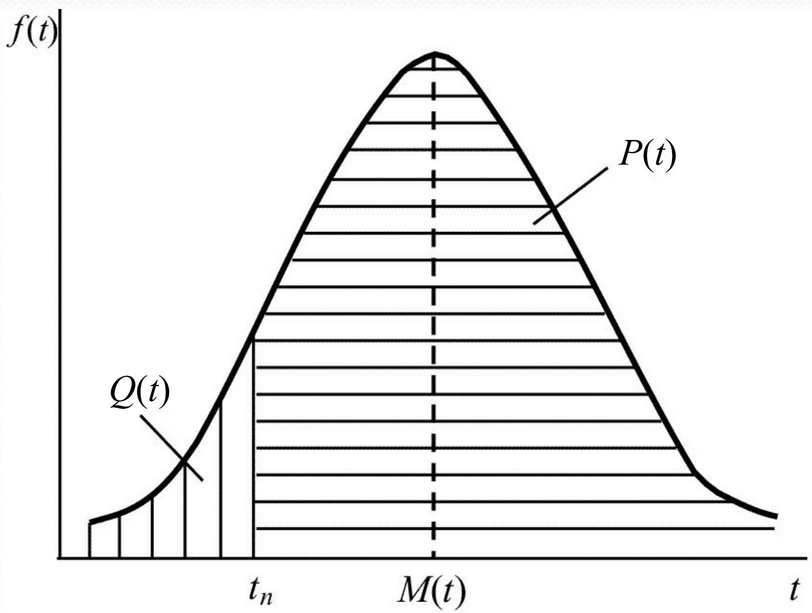


Рисунок 3 – К определению вероятности отказа *Q*(*t*) и вероятности безотказной работы *P*(*t*)

Вероятность отказа объекта за время *t*

$$P(\xi \le t) = Q(t) = \int_0^t f(x)dx \qquad (4)$$

Вероятность безотказной работы

$$P(\xi > t) = P(t) = \int_t^\infty f(x)dx = 1 - Q(t) \qquad (5)$$

ξ – наработка объекта до отказа – случайная величина с функцией плотности распределения $f(t)$ и функцией распределения $F(t)$

3.2. Рассеяние наработки объекта до отказа. Формирование функции отказа объекта

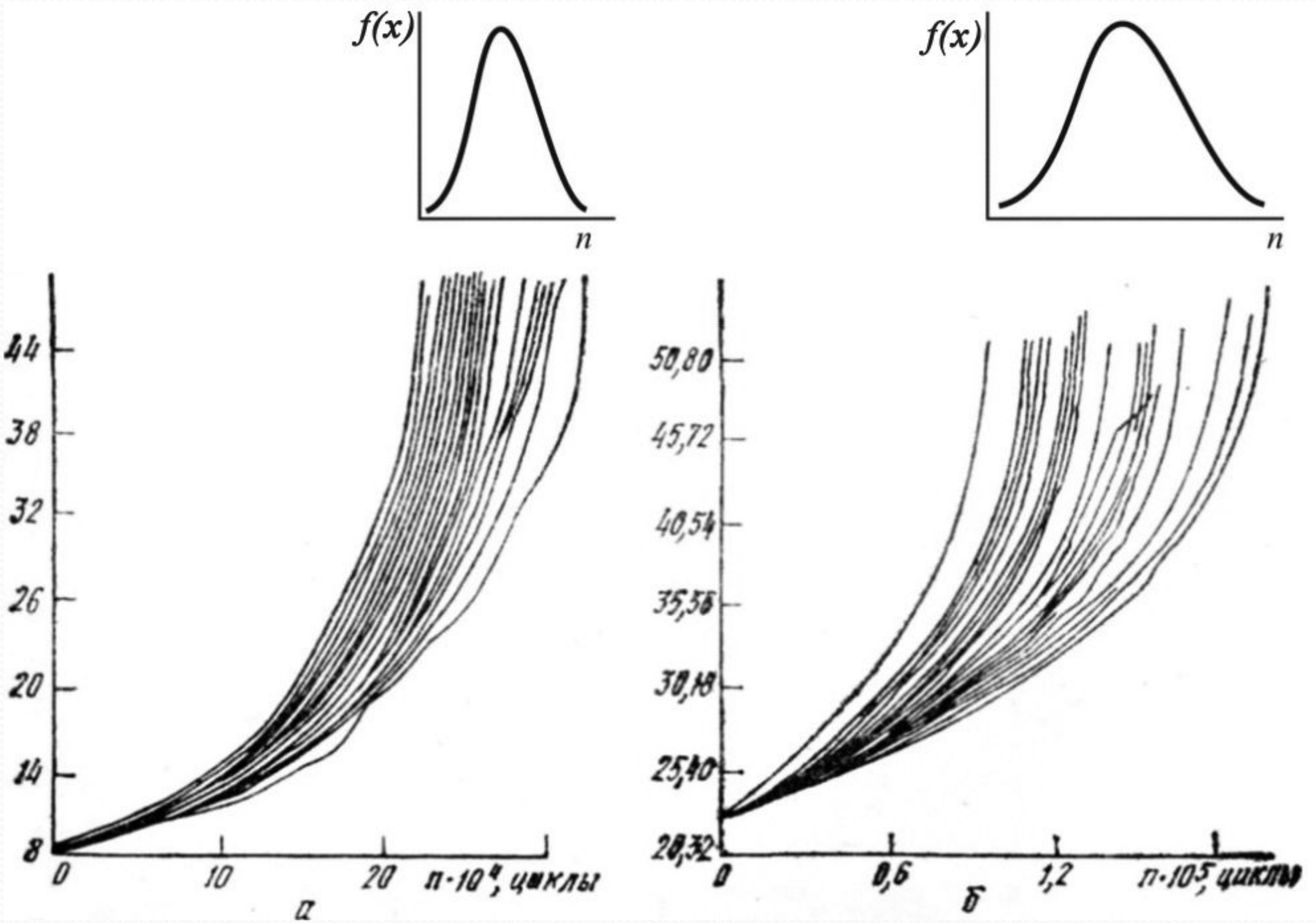


Рисунок 4 – Выборочные функции роста усталостных трещин в алюминиевых образцах с центральной прорезью (*а:* данные Вирклера и др.) и в гладких стальных образцах (*б:* данные Хьюдака и др.) при осевом растяжении

3.3. Показатели надежности и их взаимосвязь

Вероятность безотказной работы обладает следующими свойствами

$$0 \le P(t) \le 1,\ P(0) = 1,\ P(\infty) = 0. \tag{6}$$

Между функцией плотности распределения наработки объекта до отказа и вероятностью безотказной работы (вероятностью отказа) имеют место дифференциальные соотношения:

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}. \tag{7}$$

Вероятность отказа объекта в заданном интервале наработки (t_1, t_2):

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_0^{t_2} f(t)dt - \int_0^{t_1} f(t)dt = Q(t_2) - Q(t_1). \tag{8}$$

Средняя наработка до отказа **– математическое ожидание наработки до отказа**

$$\bar{t} = M[x] = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} tdQ(t) = \int_0^{\infty} P(t)dt. \tag{9}$$

Гамма-процентная наработка до отказа **– наработка до отказа, которая обеспечивается для γ·100% объектов, рассматриваемого типа**

$$P(t_\gamma) = 1 - Q(t_\gamma) = 1 - \int_0^{t_\gamma} f(t)dt = \gamma. \tag{10}$$

3.3. Показатели надежности и их взаимосвязь

Интенсивность отказов λ(*t*)

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} \qquad (11)$$

Интенсивность отказов и вероятность безотказной работы связаны между собой зависимостью:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x)dx} \qquad (12)$$

В частном случае при λ(*t*) = λ = const получаем
экспоненциальный закон распределения наработки объекта до отказа

$$P(t) = e^{-\lambda t}; \; Q(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \; f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \; \bar{t} = \lambda^{-1}. \qquad (13)$$

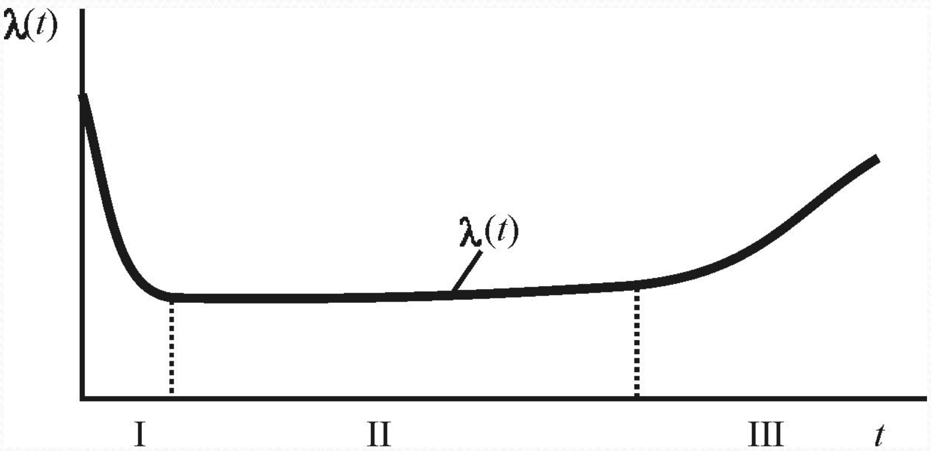


Рисунок 5– Типичная зависимость интенсивности отказов (параметра потока отказов) от наработки объекта

3.3. Показатели надежности и их взаимосвязь

Таблица 1 – Функциональные связи между основными показателями надежности

Показатели	$Q(t)$	$P(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$Q(t)$	–	$1-P(t)$	$\int_0^t f(x)dx$	$1-\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$P(t)$	$1-Q(t)$	–	$\int_t^\infty f(x)dx$	$\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$f(t)$	$\frac{d}{dt}Q(t)$	$-\frac{d}{dt}P(t)$	–	$\lambda(t)\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$\lambda(t)$	$\frac{\frac{d}{dt}F(t)}{1-F(t)}$	$-\frac{d}{dt}\left[\ln P(t)\right]$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(x)dx}$	–

Таблица 2 – Выражения для расчета показателей надежности по известным функциям распределения

Закон распределения с плотностью $f(t)$	Выражение для расчета		
	$T_{ср}$	Вероятность безотказной работы $P(t)$	Интенсивность отказов $\lambda(t)$
Экспоненциальный $f(t)=\lambda\cdot\exp(-\lambda t),\quad t>0$	$1/\lambda$	$\exp(-\lambda t)$	λ
Вейбулла $f(t)=\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}t^{\alpha-1}\cdot\exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right],\quad t>0$	$\beta\cdot\Gamma(1+1/\alpha)$	$\exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$	$\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}\cdot t^{\alpha-1}$
Нормальный $f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	$\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{f(t)}{P(t)}$
Логарифмический нормальный $f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\quad t>0$	$\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$	$\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{f(t)}{P(t)}$
Гамма $f(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\cdot\exp\left(-\frac{t}{\beta}\right),\quad t>0$	$\alpha\beta$	$\int_t^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)dx$	$\frac{f(t)}{P(t)}$

3.3. Показатели надежности и их взаимосвязь

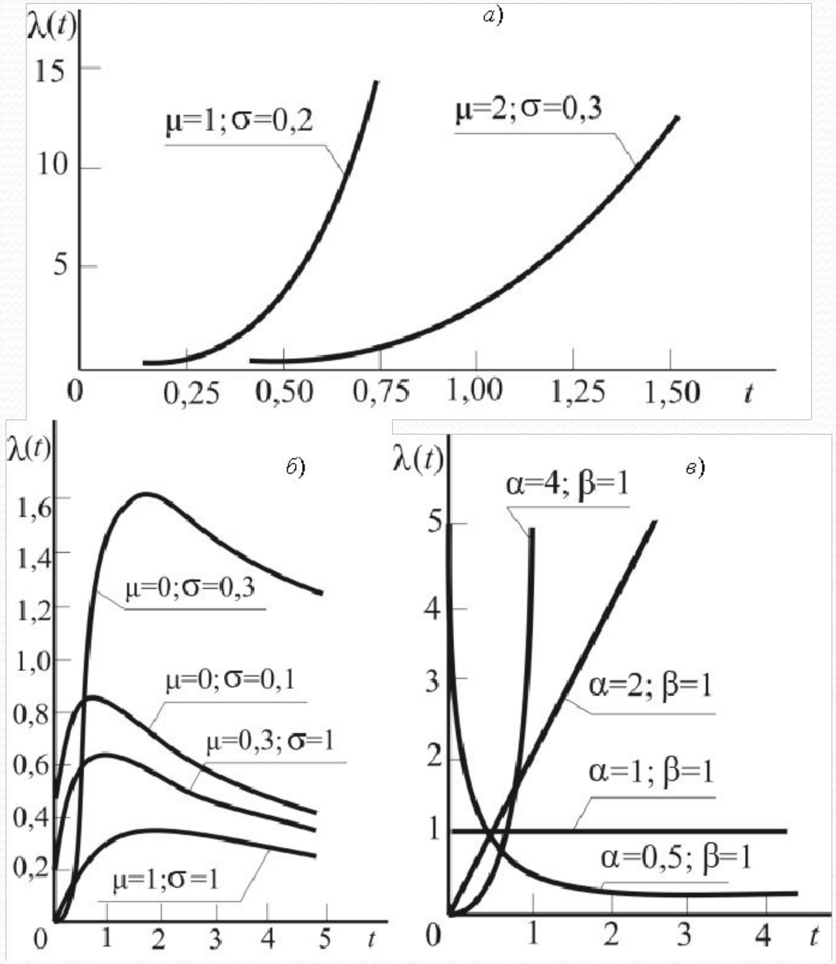


Рисунок 6 – Интенсивность отказов при распределении наработки до отказа по нормальному закону (*а*), логарифмически нормальному закону (*б*)