

ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Квадратный трехчлен

$$ax^2 + bx + c$$

a, b, c – числа (коэффициенты), $a \neq 0$.

ax^2 – старший член квадратного трехчлена.

a – старший коэффициент квадратного трехчлена.

$$3x^2 + 2x \quad a = 3, b = 2, c = 0.$$

Функцию $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – произвольные числа, причем $a \neq 0$, называют **квадратичной функцией**.

Пример 1: Построить график функции $y = -3x^2 - 6x + 1$.

Решение:

Выделим полный квадрат

$$\begin{aligned} -3x^2 - 6x + 1 &= -3(x^2 + 2x) + 1 = -3((x^2 + 2x + 1) - 1) + 1 = \\ &= -3((x + 1)^2 - 1) + 1 = -3(x + 1)^2 + 3 + 1 = -3(x + 1)^2 + 4. \end{aligned}$$

$$y = -3(x + 1)^2 + 4$$

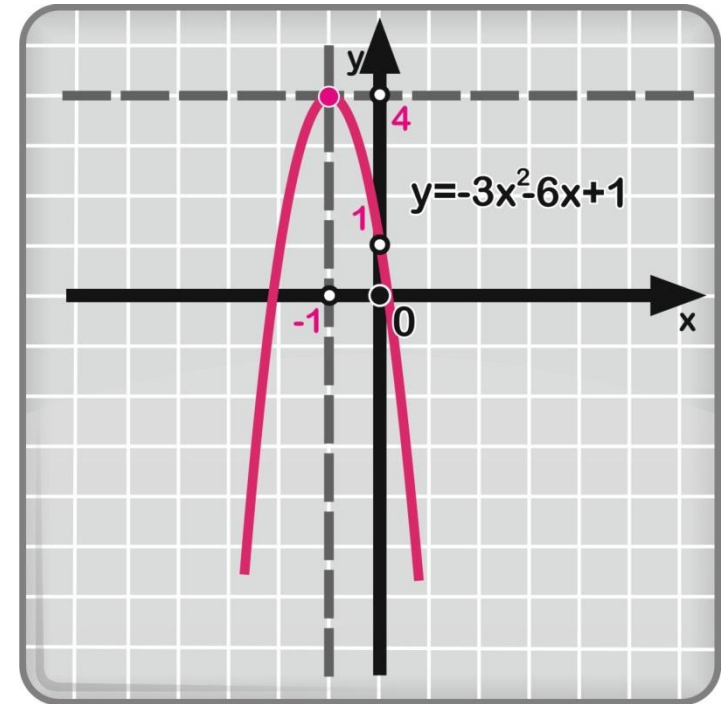
$$(-1; 4)$$

$$y = -3x^2$$

$$(0; 0), (1; -3), (-1; -3), (2; -12), (-2; -12)$$

$$y = a(x + l)^2 + m$$

График любой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из параболы $y = ax^2$ параллельным переносом.



Теорема: Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, которая получается из параболы $y=ax^2$ параллельным переносом.

Доказательство:

Метод выделения полного квадрата

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (ax^2 + bx) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = \\ &= a\left(\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c \rightarrow a(x+l)^2 + m, \quad l = \frac{b}{2a}, \quad m = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Теорема: Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, которая получается из параболы $y=ax^2$ параллельным переносом.

Доказательство:

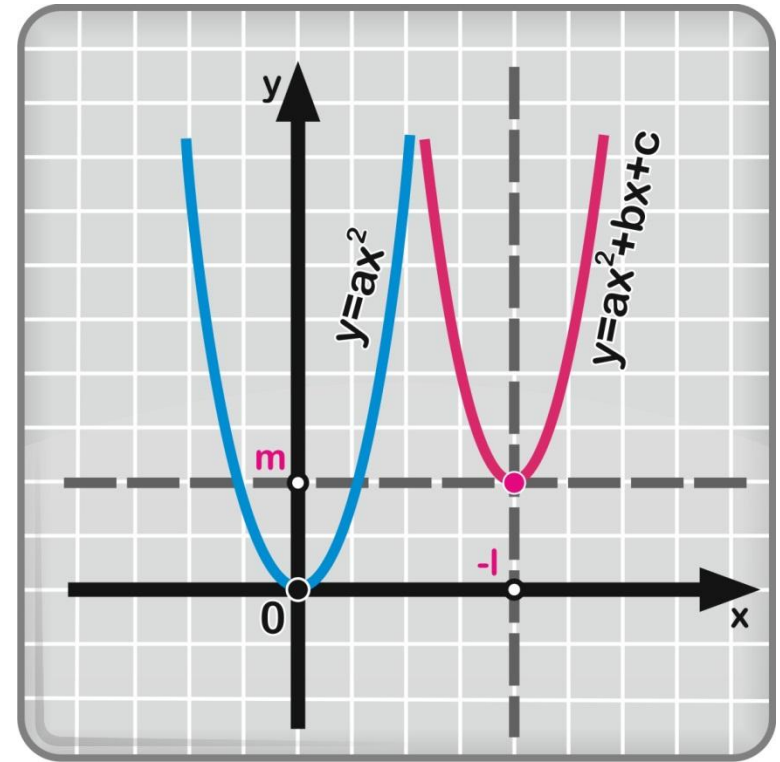
$$y = a(x+l)^2 + m$$

$$y = ax^2$$

$$(-l; m)$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = -l; \quad x = -\frac{b}{2a}.$$



Осью параболы $y=ax^2+bx+c$ служит прямая $x = -\frac{b}{2a}$; абсцисса x_0 вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ вычисляется по формуле

$$x_0 = -\frac{b}{2a}. \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Пример 2: Не выполняя построения графика функции $y = -3x^2 - 6x + 1$, ответить на следующие вопросы:

- а) Какая прямая служит осью параболы?
- б) Каковы координаты вершины параболы?
- в) Куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы?

Решение:

а) $a = -3, b = -6$
$$x = -\frac{b}{2a}, \quad x = -1.$$

б) $x_0 = -1,$
$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = 4.$$

$$(-1; 4)$$

в) $y = -3x^2 - 6x + 1$
$$y = -3x^2$$

Ветви параболы $y=ax^2+bx+c$ направлены вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

$$y_0 = f(x_0), \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Пример 3: Построить график функции $y=2x^2-6x+1$.

Решение:

2 – положительное число

$$a = 2, \quad b = -6,$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = 1,5.$$

$$y_0 = f(x_0) = f(1,5), \quad f(x) = 2x^2 - 6x + 1$$

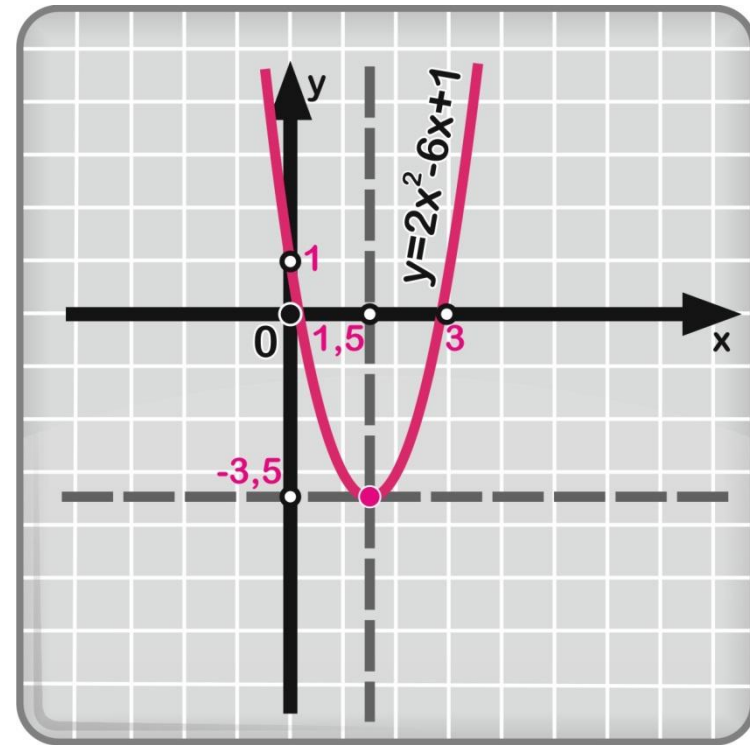
$$y_0 = f(1,5) = 2 \cdot 1,5^2 - 6 \cdot 1,5 + 1 = -3,5.$$

$$(1,5; -3,5)$$

$$x = 0, \quad x = 3, \quad f(0) = f(3)$$

$$f(0) = 1, \quad f(3) = 1$$

$$(0;1), \quad (3;1)$$



Алгоритм построения параболы $y = ax^2 + bx + c$:

1. Найти координаты вершины параболы, построить на координатной плоскости соответствующую точку, провести ось параболы.
2. Отметить на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы (чаще всего в качестве одной из таких точек берут точку $x=0$), найти значения функции в этих точках; построить на координатной плоскости соответствующие точки.
3. Через полученные три точки провести параболу (в случае необходимости берут еще пару точек, симметричных относительно оси параболы, и строят параболу по пяти точкам).

Пример 4: Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = -2x^2 + 8x - 5$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение:

I этап.

1). $a = -2, b = 8,$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

$$y_0 = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 5 = 3$$

$(2; 3), x = 2$

2). $x = 0, x = 4$

$$f(0) = f(4) = -5,$$

3). $(2; 3), (0; -5), (4; -5)$

II этап.

$$y_{\text{наим}} = -5 \text{ (при } x=0)$$

$$y_{\text{наиб}} = 3 \text{ (при } x=2)$$

