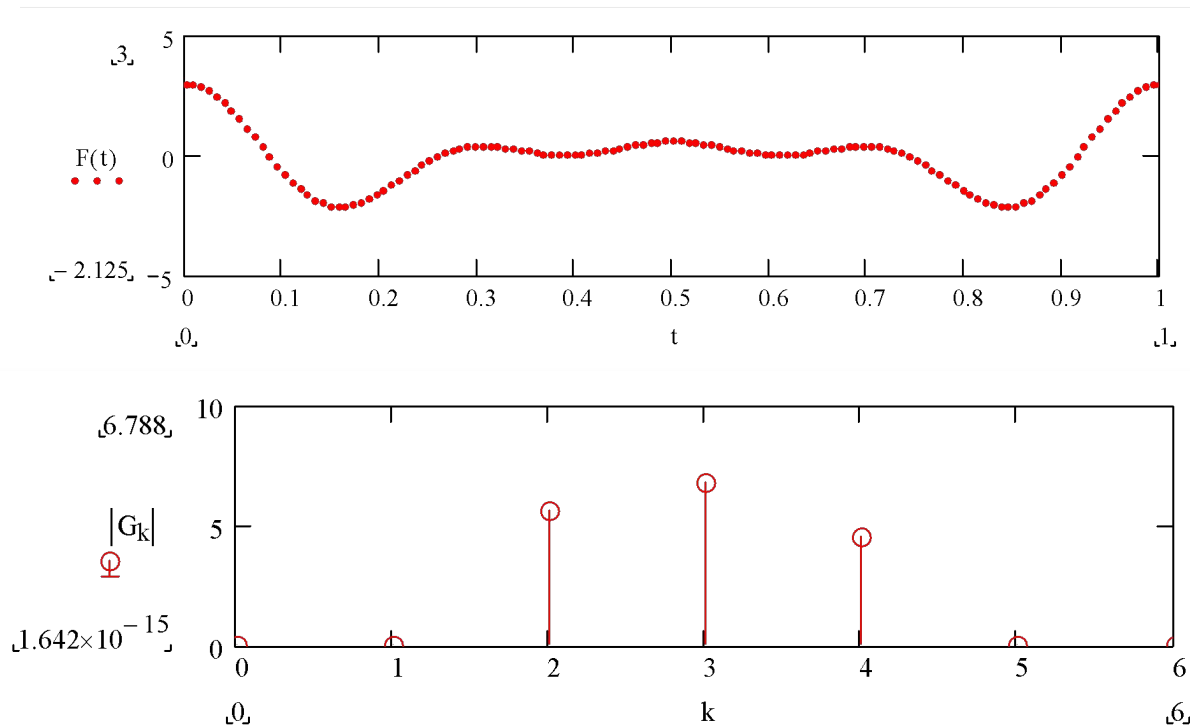


Принцип ортогонального сжатия

Дискретная реализация процесса и ее Фурье - спектр

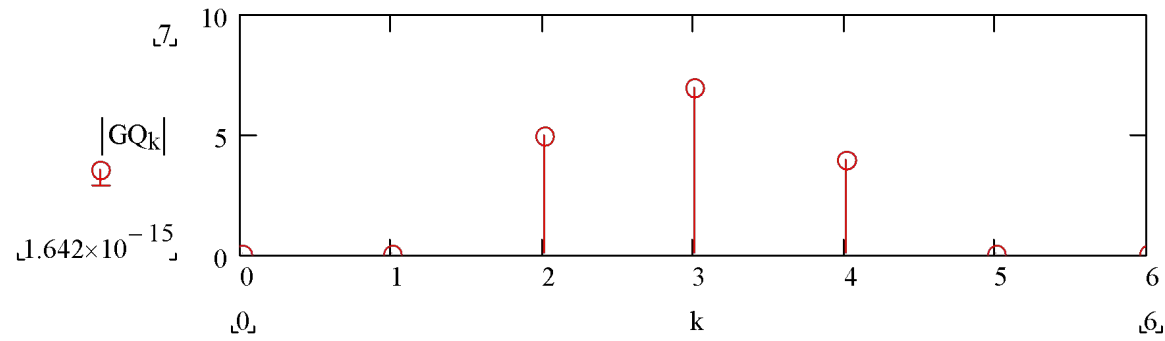


$$|G_2| = 5.657$$

$$|G_3| = 6.788$$

$$|G_4| = 4.525$$

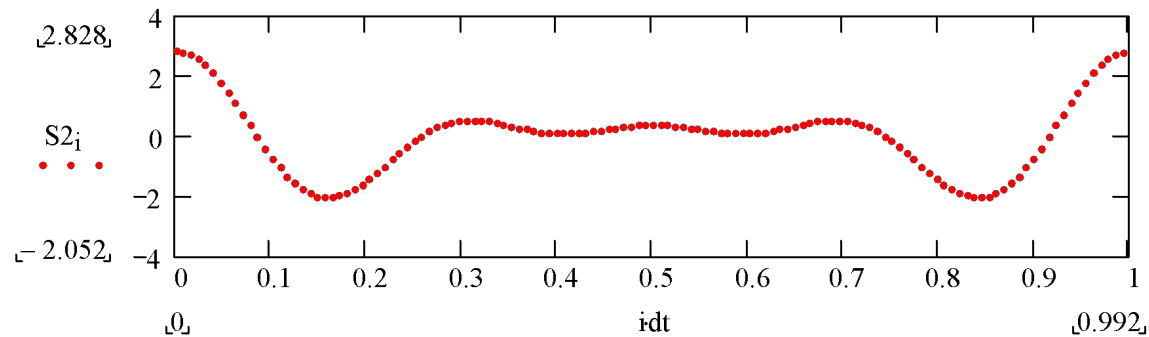
Квантованный спектр и восстановленный сигнал



$$GQ_2 := 5$$

$$GQ_3 := 7$$

$$GQ_4 := 4$$



Íáúáì èíôîðìàöèè: 3 áèòà ìà àììèèòóáó ãàðììèèè

1- 2-3 áèòà ìà ìììáð ãàðììèèè

Векторное представление сигналов

- Пусть задан сигнал $s(t)$, $t \in [0, T]$ с энергией $E_s < \infty$.
- Векторным представлением сигнала в с базисом $\{\phi_k\}$ называется соотношение

- $$s(t) = \sum_{k=1}^N a_k \phi_k(t) \quad a_k = (s, \psi_k) = \int_0^T s(t) \psi_k(t) dt$$

- Системы $\{\phi_k\}$, $\{\psi_k\}$ называются **биортогональными**, если

$$\int \phi_k(x) \psi_m(x) dx = (\phi_k, \psi_m) = \delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

- Система называется **ортонормальной**, если $\psi_k(x) = \phi_k(x)$

$$\int \phi_k(x) \phi_m(x) dx = (\phi_k, \phi_m) = \delta_{k,m}$$

Классы базисных функций с непрерывным временем

- Гармонические $\varphi_k(x) = (1/\sqrt{2})\exp(j\pi kx)$
- Ортогональные полиномы
 - Лагерра
 - Чебышева, Лежандра
 - Эрмита
- Функции отсчетов $\varphi_k(t) = \frac{\sin[\Omega(t - k\Delta)]}{[\Omega(t - k\Delta)]}$
- Уолша $Wal_k(x)$
- Функции Хаара $har_k(x)$

Дискретные преобразования

Общие соотношения для дискретных преобразований

Рассмотрим общность и различие непрерывного и дискретного преобразований

Непрерывный сигнал	Дискретный сигнал
$t \in [0, T]$	$t = t_n = n\Delta T, n = 0..N - 1$
$s(t)$	$s(n) = s(t_n)$
$\varphi_k(t)$	$\varphi_k = (\varphi_k(0) \varphi_k(1) \varphi_k(2) .. \varphi_k(N - 1))$
$(\varphi_k, \varphi_m) = \int_T \varphi_k(t) \varphi_m^*(t) dt = \delta_{km}$	$(\varphi_k, \varphi_m) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k(n) \varphi_m^*(n) = \delta_{km}$
$C_k = \int_T s(t) \varphi_k^*(t) dt$	$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \varphi_k^*(n)$
$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varphi_k(t)$	$s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varphi_k(n)$

Дискретные базисные функции

- **ДПФ** $\varphi_k(n) = \exp\left(j2\pi\frac{kn}{N}\right) = W^{kn}$ $W = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}\right)$ $n = 0..N-1, k = 0..N-1$

- $C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) W^{kn}$ $s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k W^{-kn}$

- **Дискретное косинусное преобразование**

$$\varphi_k(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot g_k \cdot \cos\left(\pi k \frac{n+0.5}{N}\right), \quad g_k = \begin{cases} \sqrt{0.5} & , k = 0 \\ 1 & , k \neq 0 \end{cases}$$

- $C_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot g_k \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cos\left(\pi k \frac{n+0.5}{N}\right)$ $s(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} g_k C_k \cos\left(\pi k \frac{n+0.5}{N}\right)$

Двумерное ДКП- DCT преобразование

Прямое и обратное ДКП (DCT- IDCT) преобразование

$$\mathbf{C} = \Phi \mathbf{S} \Phi^T, \quad \mathbf{S} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi.$$

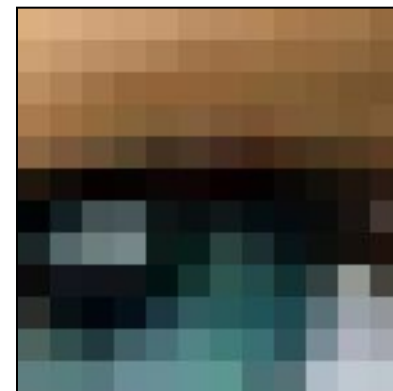
$\mathbf{S} = [s(i, j)]$ - исходный блок, $i, j = [0, N-1]$

$\mathbf{C} = [C_{km}]$ - его спектр $k, m = [0, N-1]$

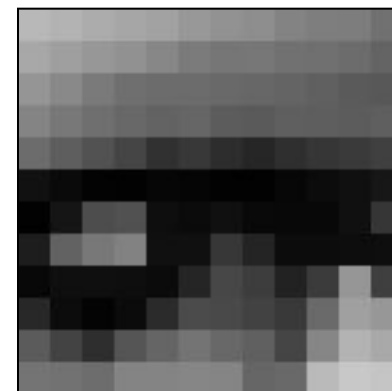
Матрица преобразования DCT

$$\Phi = \|\varphi_k(i)\|_{NN} = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \cos(\pi k \frac{(i+0.5)}{N}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k = 0 \\ k \neq 0 \end{bmatrix} \quad k=0..N-1, i=0..N-1$$

Исходное изображение «Masha»



Исходный блок «Глаз»


$$S^* = \begin{bmatrix} 183 & 178 & 171 & 166 & 161 & 151 & 146 & 142 & 131 & 126 & 125 & 113 \\ 168 & 158 & 150 & 144 & 134 & 123 & 118 & 119 & 113 & 112 & 108 & 101 \\ 148 & 136 & 122 & 111 & 108 & 108 & 105 & 103 & 101 & 96 & 90 & 89 \\ 131 & 120 & 111 & 104 & 99 & 102 & 93 & 90 & 95 & 95 & 92 & 96 \\ 108 & 94 & 84 & 71 & 52 & 59 & 49 & 43 & 51 & 57 & 60 & 67 \\ 23 & 12 & 3 & 3 & 7 & 7 & 3 & 3 & 8 & 15 & 22 & 30 \\ 2 & 27 & 78 & 82 & 18 & 14 & 21 & 12 & 9 & 10 & 21 & 57 \\ 35 & 98 & 120 & 129 & 22 & 21 & 58 & 41 & 16 & 14 & 17 & 19 \\ 11 & 20 & 19 & 18 & 13 & 42 & 73 & 63 & 39 & 61 & 149 & 66 \\ 44 & 15 & 5 & 14 & 47 & 77 & 75 & 68 & 60 & 106 & 159 & 150 \\ 92 & 69 & 50 & 86 & 101 & 116 & 105 & 96 & 71 & 134 & 178 & 168 \\ 116 & 114 & 109 & 131 & 132 & 133 & 132 & 102 & 105 & 185 & 199 & 197 \end{bmatrix}$$

Ортогональное преобразование

$$C = \Phi S \Phi^T$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \cos(\pi m \frac{(n+0.5)}{N}) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 788 & 20 & 57 & 17 & -9 & -21 & -18 & -15 \\ -70 & 182 & 31 & 13 & 2 & -27 & -22 & -5 \\ 303 & 25 & 5 & -11 & 13 & -22 & -12 & 17 \\ 62 & -26 & 15 & -6 & 4 & 0 & 11 & 22 \\ -44 & -51 & -9 & 26 & -19 & 16 & 22 & -4 \\ 0 & -27 & -15 & 19 & -22 & 14 & 13 & -14 \\ 14 & 34 & 0 & -16 & 1 & -5 & -10 & 1 \\ -30 & 47 & 19 & -26 & 10 & -16 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

Квантование

$$C_{i,j}^* = \text{Round}\left(\frac{C_{i,j}}{Q_{i,j}}\right)$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 788 & 6 & 11 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -23 & 36 & 4 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 60 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

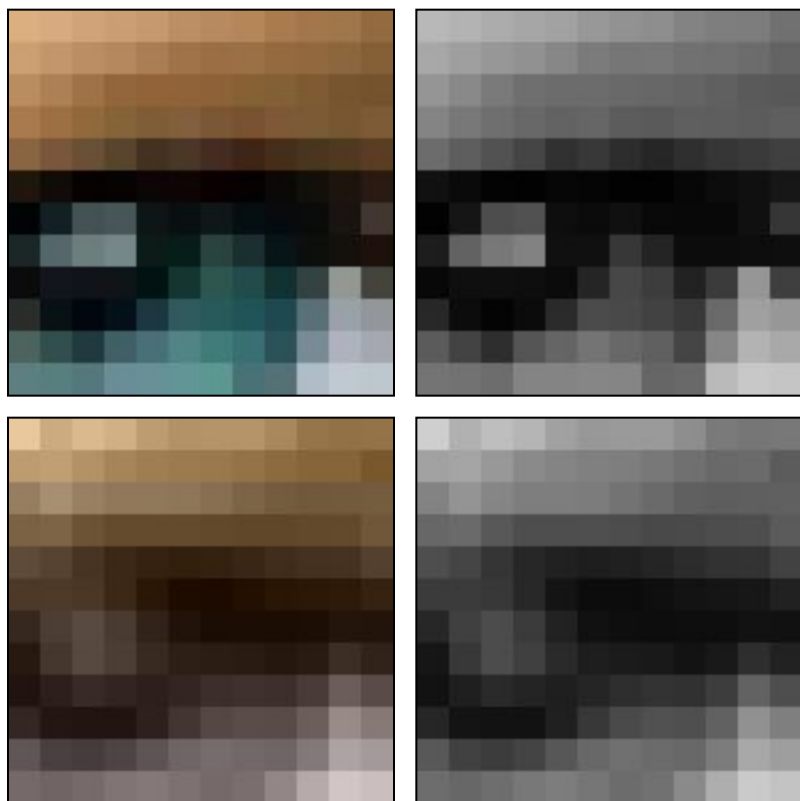
$$C^{20} = \begin{bmatrix} 788 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Деквантование

$$C_{i,j} = C_{i,j}^* \cdot Q_{i,j}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 788 & 18 & 55 & 14 & -9 & -11 & -13 & -15 \\ -69 & 180 & 28 & 9 & 0 & -26 & -15 & 0 \\ 300 & 21 & 0 & -11 & 13 & -15 & 0 & 0 \\ 56 & -18 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ -36 & -44 & 0 & 15 & -17 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & -26 & -15 & 17 & -19 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 34 & 19 & -21 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C^{20} = \begin{bmatrix} 788 & 0 & 41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -63 & 164 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 287 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Результат восстановления



RLE: 14953 байт (сжатие: 25,29)

RLE+Huffman: 11047 байт (сжатие: 34,24)

RLE+Arithm: 11022 байт (сжатие: 34,32)

PSNR(Y)=20,578 дБ, сжатие: 34,32

