Лекция 30. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Градиент скалярного поля, Производная по направлению. Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхности, его физический смысл. Вычисление потока. Формула Остроградского. Дивергенция векторного поля.

§ 1. Скалярные и векторные поля.

Определение. (скалярного поля). Если в трехмерном пространстве определена функция $u(x,y,z)$, то говорят, что задано скалярное поле $u(x,y,z)$.

Замечание. Другими словами говоря, задание скалярного поля означает, что каждой точке $M(x,y,z)$ поставлено в соответствие число, которое является значением функции u в точке M.

<u>Пример.</u> (скалярного поля). Если в начало координат поместить заряд Q, то в каждой точке пространства определена функция

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние от точки до начала координат; ф - потенциал,

ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума.

Задание функции ф задает скалярное поле потенциала.

<u>Определение.</u> (векторного поля). Говорят, что в трехмерном пространстве задано векторное поле

$$\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

<u>Замечание.</u> В этом случае каждой точке пространства $M(x,y,z)$ ставится в соответствие вектор $\vec{V}$ в точке $M(x,y,z)$.

Для скалярных и векторных полей вводится понятие поверхностей уровня.

<u>Определение.</u> (поверхностей уровня). Пусть задано скалярное поле $u(x,y,z)$. Поверхностью уровня данного скалярного поля, называется поверхность, задаваемая уравнением

$$u(x,y,z) = const.$$

<u>Пример.</u> (поверхности уровня). Если в начало координат поместить заряд Q, то имеем скалярное поле потенциала

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

Поверхностью уровня является поверхность:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c,$$

где: $c = const$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\right)^2$$ - сфера

Такие поверхности называются *эквипотенциальными*.

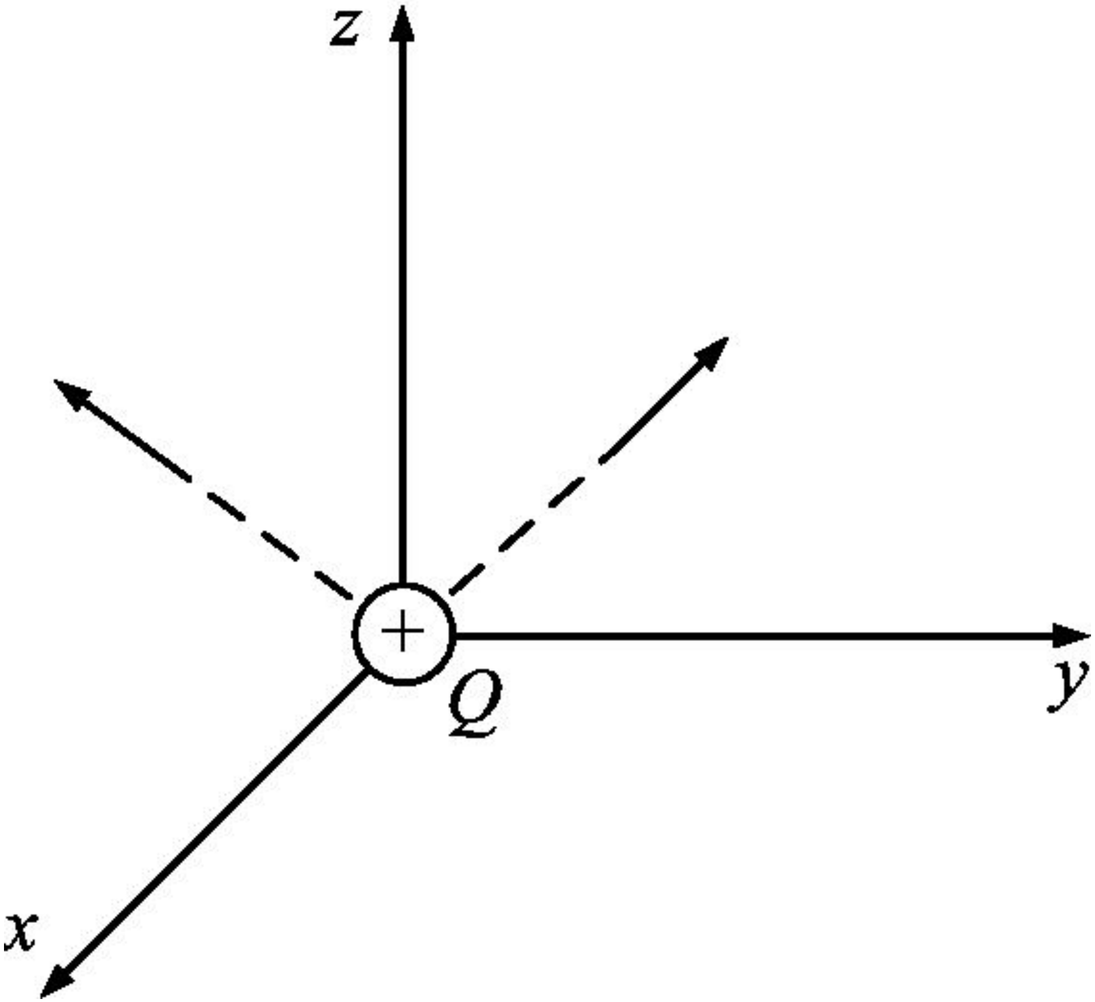
Определение. **(векторной линии).** Пусть в трехмерном пространстве задано векторное поле $\vec{V} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

Векторной линией заданного векторного поля называется линия, в каждой точке которой вектор касательной совпадает по направлению с вектором $\vec{V}$.

Замечание. Уравнение векторных линий можно находить по формуле:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}; \qquad \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$



Пример.

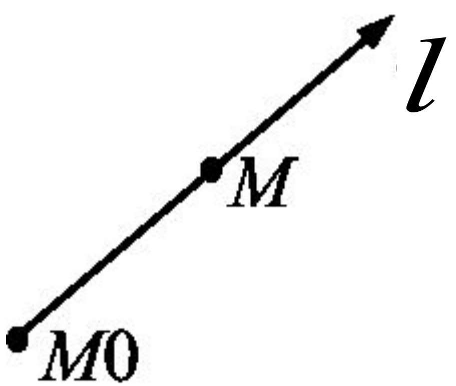
Напряженность поля можно определить путем внесения пробного электрического заряда в любую точку поля.

Векторные и скалярные поля связаны между собой.

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{i}+\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{j}+\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{k}\right)$$

§ 2. Производная по направлению. Ее вычисление.

Пусть задано скалярное поле u, где u – дифференцируемая функция. Возьмем в трехмерном пространстве вектор l, расположенный в этом скалярном поле. Пусть



начало вектора l характеризует точку M_0. Возьмем на векторе l соседнюю точку M . Точка M как и M_0 находится в скалярном поле u . Поэтому имеет смысл приращение скалярного поля u в точке M_0, выраженное формулой: $\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0)$

Df. (производной по направлению): если существует конечный предел отношения приращения скалярного поля

$$\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0)$$

к длине вектора, $\overrightarrow{M_0M}$ т.е. к $\left|\overrightarrow{M_0M}\right|$, то этот предел называется производной скалярного поля u по направлению l и обозначается:

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M_0) = \lim_{\left|M_0M\right| \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|} = \lim_{\left|M_0M\right| \to 0} \frac{\Delta u(M_0)}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|}$$

Чтобы вычислить производную по направлению, пользуются теоремой:

Th.: (о вычислении производной по направлению).

Если скалярное поле $u(x,y,z)$ дифференцируемо в каждой точке некоторой области V, то производная по направлению в каждой точке V существует и она выражается формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

где α,β,γ − углы определенные в любой точке области V , которые составляет вектор l с координатными осями.

Док-во: т.к. скалярное поле u дифференцируется в области V, значит, в любой окрестности точки $M_0 \in V$ существует приращение скалярного поля, находимого по формуле:

$$\Delta u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\Delta y +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\Delta z + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + \alpha_3\Delta z$$

здесь $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ − бесконечно малые функции в точке M_0 , которые стремятся к 0, когда

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - это проекции вектора $\left|\overrightarrow{M_0M}\right|$, совпадающего по направлению с вектором $\vec{l}$ на координатные оси.

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$$ - частные производные.

Разделим левую и правую части на длину вектора

$$\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

После чего получаем:

$$\frac{\Delta u(M_0)}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cdot\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cdot\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} + \alpha_1\cdot\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} +$$

$$+\alpha_2\cdot\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} + \alpha_3\cdot\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} \qquad (2)$$

Перейдем к пределу в выражении (2) при $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| \to 0$

Заметим, что $\lim\limits_{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|\to 0} \dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}} = \cos\alpha$

Если заменить Δx на Δy и Δx на Δz, то в пределе получим cosβ и cosγ.

Значит, в пределе, учитывая, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \to 0$ при $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| \to 0$, имеем:

$$\lim_{\left|\overrightarrow{M_0M}\right| \to 0} \frac{\Delta u(M_0)}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma +$$

$$+ 0 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \cos\beta + 0 \cdot \cos\gamma \qquad (3)$$

Так как предел правой части (2) существует и выражается правой частью формулы (3), то и предел левой части формулы (3) существует. Он равен производной скалярного поля по направлению. Значит, производная скалярного поля *u* по направлению *l* выражается формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma \qquad (4)$$

Что и требовалось доказать.

Замечание: Производная скалярного поля по направлению вектора $\vec{l}$ выражает скорость возрастания или убывания скалярного поля по направлению вектора $\vec{l}$, если:

$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) > 0$ - поле возрастает

$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) < 0$ - поле убывает.

Вычисление скалярного поля производится по формуле (4).

Пример: *на практике.*

§ 3. Градиент скалярного поля. Связь скалярных и векторных полей. Свойства градиента.

<u>Определение.</u> (градиента). Градиентом дифференцируемого скалярного поля называется вектор

$$\mathrm{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

<u>Замечание.</u> На практике встречаются равносильные обозначения градиента:

$$\mathrm{grad}\,u \Leftrightarrow \nabla u,$$

где: ∇ - оператор «Набла».

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Определение градиента привязано к декартовой системе координат. Покажем связь скалярных и векторных полей.

Пусть задано скалярное поле $u(x,y,z)$, дифференцируемое в некотором V.

-$\vec{l}$-произвольный вектор $\in V$. По определению:

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Но эта запись означает, что скалярному полю u с помощью grad поставлено в соответствие векторное поле grad. Что и говорит о том, что скалярное и векторное поле связаны между собой.

Вспомним, что скалярное произведение 2-х векторов вычисляется по формуле:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Найдем скалярное произведение градиента поля u и вектора $\vec{l}_0$ получим:

$$(\mathrm{grad}u\cdot l_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$\vec{l}_0$- произвольный единичный вектор $\in V$.

В правой части производная по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathrm{grad}u\cdot\vec{l}_0)$$

По этой формуле можно вычислять производную по направлению, зная градиент.

Учитывая, что:

$$(\mathrm{grad}u\cdot\vec{l_0})=\left|\mathrm{grad}u\right|\cdot\left|\vec{l_0}\right|\cos\left|\mathrm{grad}u\cdot\vec{l_0}\right|=$$

$$=\left|\mathrm{grad}u\right|\cos\left|\mathrm{grad}u\cdot\vec{l_0}\right|=\text{проекция}_l\mathrm{grad}u=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial l}=\text{ïð}\ _l\mathrm{grad}u$$

Df. (инвариантное определение градиента, не зависящего от системы координат).

Градиентом скалярного поля *u* называется вектор, обозначенный grad*u,* проекция которого на произвольное направление вектора $\vec{l}$ равна производной скалярного поля по направлению этого вектора $\vec{l}$.

Свойства градиента:

1. Градиент дифференцируемого скалярного поля $u(x,y,z)$ перпендикулярен к поверхности уровня этого скалярного поля (совпадает с нормалью) и направлен в сторону возрастания скалярного поля.

2. $\mathrm{grad}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \mathrm{grad} u_1 + c_2 \mathrm{grad} u_2$,

$c_1, c_2 = \mathrm{const}$;

u_1, u_2 – скалярные поля.

3. $\mathrm{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2 \mathrm{grad} u_1 + u_1 \mathrm{grad} u_2$.

4. $grad\left(\dfrac{u_1}{u_2}\right)=\dfrac{u_2 gradu_1-u_1 gradu_2}{u_2^2}$

5. Если задано скалярное поле $F(u(x,y,z))$, то градиент:

$\mathrm{grad}F(u(x,y,z)) = F'_u \cdot \mathrm{grad}u.$

§ 4. Применение градиента для вычисления нормали к поверхности.

Для поля $u(x,y,z)$ введем понятие градиента:

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Если имеется уравнение поверхности $u(x,y,z) = 0$, это означает, что задана поверхность уровня скалярного поля $u(x,y,z)$.

Так как градиент скалярного поля направлен по нормали к поверхности уровня, то единичный вектор нормали к поверхности можно найти по формуле:

$$\vec{n}_{\pm} = \pm \frac{\mathrm{grad}\,u}{|\mathrm{grad}\,u|}$$

Пример. На практике

Поток.

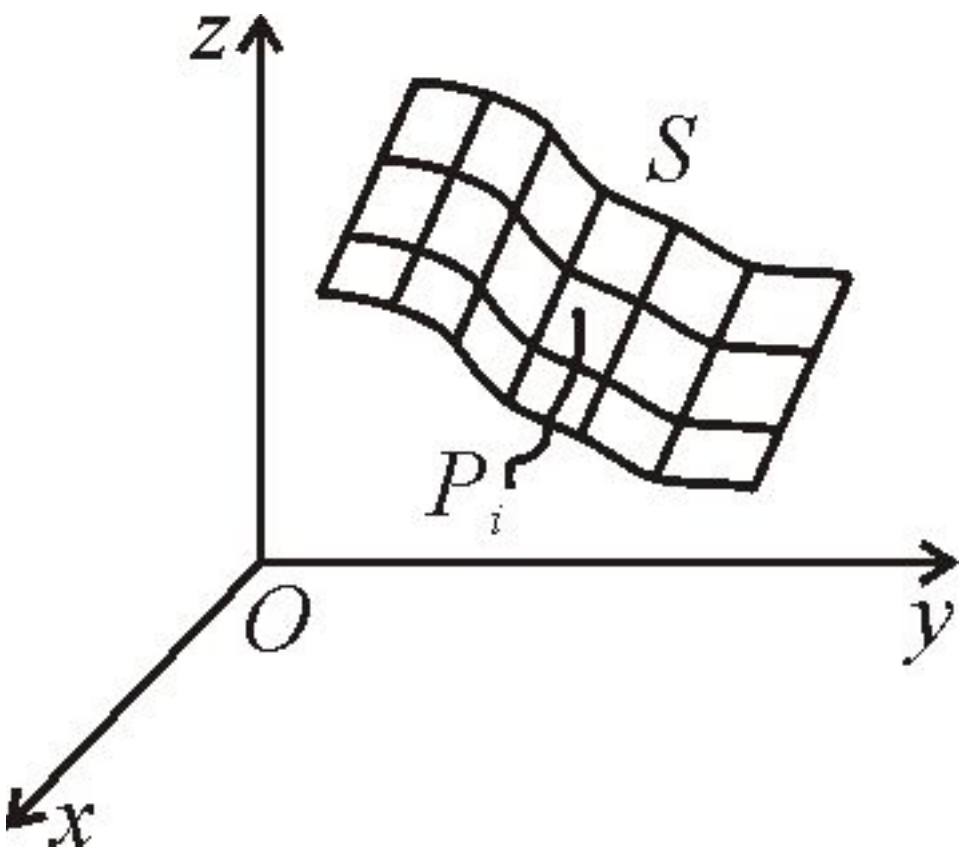
§ 5. Задача, приводящая к понятию потока векторного поля.

Пусть в трехмерном пространстве имеется ориентируемая поверхность S и векторное поле, задаваемое формулой:

$$\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Считаем, что векторное поле $\vec{V}$ в каждой точке векторного пространства задает поле скоростей жидкости. Попробуем найти количество жидкости, которое протекает через поверхность S в направлении нормали.

Для этого возьмем в трехмерном пространстве поверхность S и разобьем ее на маленькие кусочки $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. В каждом из кусочков выберем точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$, в которых найдем значение



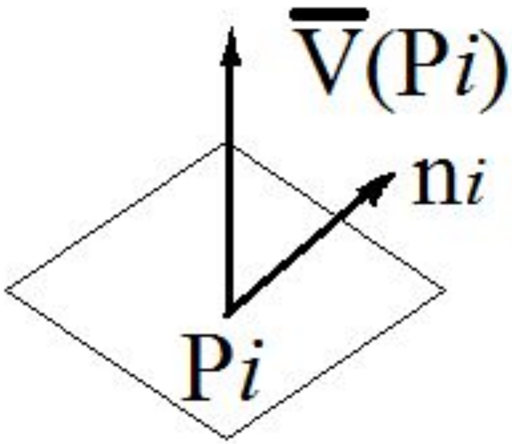
скорости жидкости:

$$\vec{V}(P_1), \vec{V}(P_2), \ldots, \vec{V}(P_n)$$

и нормали к поверхности S:

$$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_n$$

Найдем количество жидкости, которое протекает через участок S_i в единицу времени в направлении нормали.



$$(\vec{V}(P_i)\cdot\vec{n}_i)\cdot\Delta S_i$$

Численно это значение равно объему параллелепипеда, построенного на S_i как на основании с высотой

$$\left|\vec{V}_i\right|\cdot\cos\left(\vec{V}_i,\vec{n}_i\right)$$

Если сложить объемы всех маленьких параллелепипедов, то количество жидкости, протекающее через поверхность S, обозначаемое Q равно:

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}(P_i) \cdot \vec{n}_i) \cdot \Delta S_i$$

При таком приближенном вычислении количество жидкости зависит от способа разбиения и выбора точек P_i.

В физике величина не зависит. Считаем, если существует конечный предел

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}(P_i) \cdot \vec{n}_i) \cdot \Delta S_i$$

то он и будет выражать значение количества жидкости, протекающей через поверхность S. Вспоминая, если предел существует, то он называется поверхностным интегралом 1-го рода.

$$Q = \iint\limits_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Количество жидкости, протекающей через поверхность S равно поверхностному интегралу 1-го рода от скалярного произведения скорости на единичный вектор нормали к поверхности.

Для того, чтобы количественно описать векторы, электростатического, электромагнитного поля вводится понятие потока.

<u>Определение</u> (потока).

Потоком векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется число, обозначаемое буквой Π и вычисляемое как:

$$\Pi = \iint\limits_{S} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Примечание: в случае жидкости поток равен количеству жидкости, протекающей через поверхность.

§ 6. Вычисление потока.

Если задано векторное поле $\vec{a}$, $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и задана поверхность S, нормаль к которой может быть вычислена:

$$\vec{n} = \pm \frac{gradU}{|gradU|}$$

то поток через эту поверхность S может быть вычислен по определению

$$\Pi = \iint\limits_{S} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

При этом поверхность S должна быть однозначно проектируемой на одну из координатных плоскостей. В этом случае поверхностный интеграл по поверхности S сводится к интегралу по области проектирования поверхности S

Второй способ вычисления потока называется методом проектирования на координатной плоскости. Чтобы получить формулы, заметим, что нормаль к поверхности может быть представлена:

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

где α, β, γ - углы которые составляет нормаль с координатными осями.

Тогда, в силу определения скалярного произведения, имеем:

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

Поток через поверхность S равен

$$\Pi = \iint\limits_{S} \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right] dS$$

Пользуясь аддитивностью интеграла

$$\Pi = \iint\limits_{S} P\cos\alpha dS + \iint\limits_{S} Q\cos\beta dS + \iint\limits_{S} R\cos\gamma dS$$

Предполагая, что поверхность S однозначно проектируется на координатные оси имеем:

$$\Pi = \iint_S P dydz + \iint_S Q dzdx + \iint_S R dxdy$$

Поверхностные интегралы 2 рода вычисляются с учетом области проектирования на координатную плоскость. Для вычисления потока методом проектирования на координатные плоскости имеем

$$\Pi = \pm \iint_{D_1} P(x(y,z), y, z) dydz \pm$$

$$\pm \iint_{D_2} Q(x, y(x,z), z) dxdz \pm \iint_{D_3} R(x, y, z(x,y)) dxdy$$

Знаки $\pm$ берутся с учетом того, какой угол составляет нормаль к поверхности для 1-го интеграла с осью x, для 2-го с осью y, для 3-го с осью z.

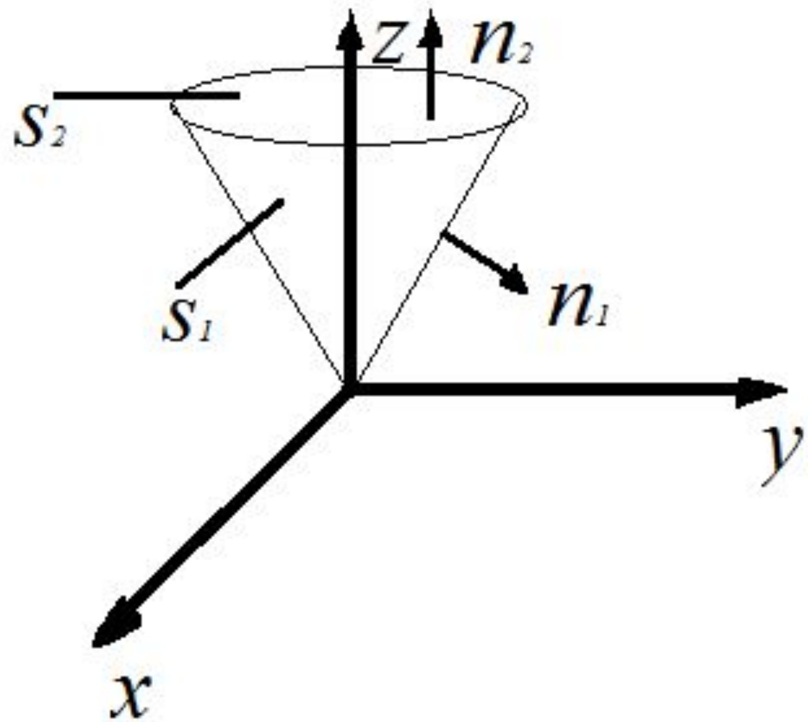
Замечание: В том случае если поток через замкнутую поверхность > 0, то внутри замкнутой поверхности есть источник. Если поток < 0 ,то внутри поверхности находится сток.

Если поток $= 0$, то говорят, что количество вещества втекающего в поверхность = кол-ву вещества вытекающего из нее.

Пример: пусть дано векторное поле

найти поток через внешнюю поверхность конуса

$$S:\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2 \end{cases}$$



$\vec{n}_2 \parallel z$

$\vec{n}_1$ составляет тупой угол с осью z.

Поток через всю поверхность S: $\ddot{I}_{S} = \ddot{I}_{S_1} + \ddot{I}_{S_2}$

$$\Pi_{S_2} = \iint\limits_{S_2} (\vec{a} \cdot \vec{n}_2) dS = \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{n}_2 = 1\vec{k} \end{array} \right\} = 0$$

§ 7. Формула Остроградского.

Пусть в трехмерном пространстве задана область V, такая что:

1) Ориентированная внешней нормалью.
2) Имеющая кусочно-гладкую поверхность S.
3) В области V и на её границе S функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Тогда справедлива формула Остроградского:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Поверхность S замкнутая.

Доказательство. *Самостоятельно.*

Формула Остроградского применима только в случае замкнутых поверхностей.

Если поверхность S ориентирована внешней нормалью, в формуле берется знак «+», если внутренней «-» перед поверхностным интегралом.

§ 8. Векторная запись теоремы Остроградского.

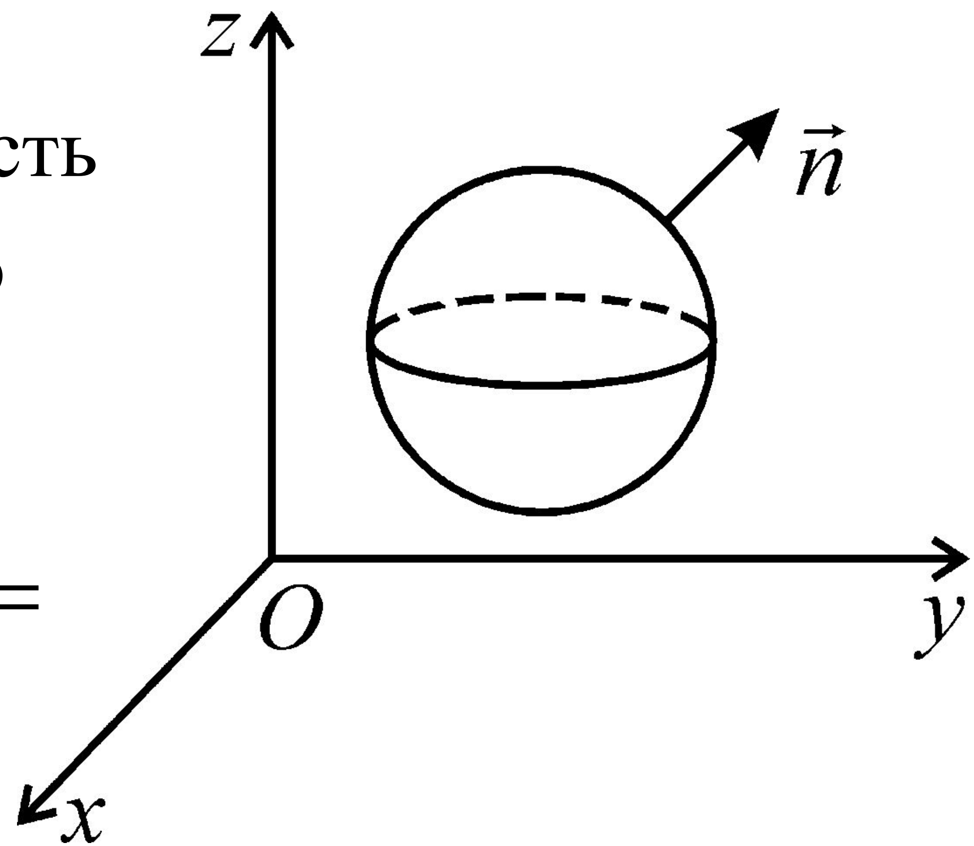
Пусть в 3-х мерном пространстве задано векторное поле

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

где P, Q, R интегрируемы вместе со своими производными.

Пусть в пространстве задана замкнутая гладкая поверхность, ориентируемая внешней нормалью $\vec{n}$.

Поток через поверхность S можно вычислить по формуле:



$$\Pi = \iint_{S} (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds =$$

$$= \iint_{S} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \qquad (1)$$

Так как S - замкнутая, гладкая, ориентированная, а функции P, Q, R удовлетворяют условиям теоремы Остроградского, имеем:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \quad (2)$$

Сравнивая правые части формул (1) и (2) и

вспоминая что $\quad \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z} = div\vec{a}$

имеем: $\displaystyle \iint_S (\vec{a}\cdot\vec{n})ds = \iiint_S div\vec{a}\,dV$

- векторная запись теоремы Остроградского.

Поток векторного поля через замкнутую поверхность $= \iiint$ по объему от этой поверхности, от дивергенции векторного поля.

Пример: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Поток векторного поля через поверхность неизвестен.

$$S:\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 \end{cases}$$

нормаль внешняя

S - замкнутая поверхность – это боковые поверхности конуса и плоскость $z = 2$.

Найдем заранее: $div\vec{a} = 1 + 1 + 0 = 2$

$$\Pi_S = \iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{s})ds = \iiint\limits_V div\vec{a}dV = 2\iiint\limits_V dV = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4\cdot 2 = \frac{16\pi}{3}$$

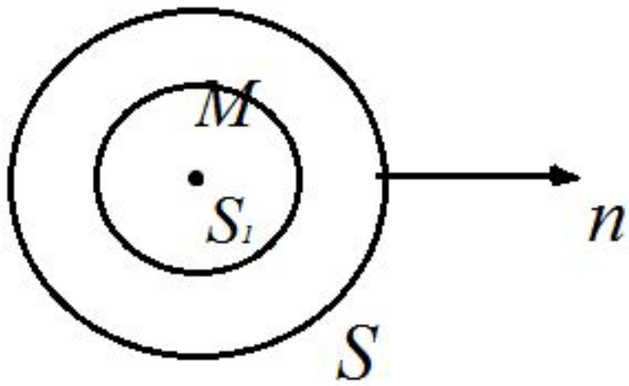
Замечание: из материала, приведенного выше ясно, что скалярным полям можно поставить в соответствие векторные поля, а векторным- скалярные. Если дано скалярное поле $U(x,y,z)$ то с помощью операций $gradU$ скалярному полю можно ставить в соответствие векторное поле. Если есть векторное поле $\vec{a}$, то с помощью $div\,\vec{a}$ можно поставить в соответствие векторному полю скалярное поле.

§ 9. Дивергенция векторного поля, ее вычисление.

В векторном поле $\vec{a}$ возьмем замкнутую поверхность S с внешней нормалью $\vec{n}$. Можем получить характеристику поля, называемую потоком, воспользовавшись формулой:

$$\Pi = \iint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Если взять поверхность S_1, то поток будет другим, чем через поверхность S, и понятие потока отражает количественную характеристику векторного поля при наличии некоторой поверхности, и зависит не только от векторного поля но и от поверхности.



В некоторых задачах необходимо знать характеристики векторного поля в каждой точке, независимо от выбора поверхности *S*. Если разделить поток на объем поверхности:

$$\frac{\Pi_S}{V_S} = \frac{\iint\limits_{s} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V_S} \quad -$$

средняя плотность потока через поверхность *S*.

Если поверхность S стягивать в точку и предполагать что существует предел такого отношения, то получим плотность потока в точке.

Эту характеристику по определению называют дивергенцией векторного поля.

Определение. **(дивергенции)**

Если существует конечный предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность S к V, содержащемся внутри этой поверхности, при стягивании поверхности S в точку, этот предел называется дивергенцией векторного поля в точке и обозначается:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{S \to M} \frac{\iint\limits_{S} (\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS}{V_s}$$

Физический смысл дивергенции - плотность потока векторного поля.

Если div > 0, то в точке - источник,

если < 0, то сток,

если = 0, то ничего не находится

<u>Теорема.</u> (о вычислении дивергенции)

Если в 3-х мерном пространстве задано векторное поле

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

где P, Q, R непрерывны вместе со своими производными

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$$

в некоторой области V, то в каждой точке этой области дивергенция может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Доказательство:

По определению: $div\vec{a} = \lim\limits_{S \to M} \dfrac{\iint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{n})dS}{V_S}$

$$\iint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{n})dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Так как поверхность S замкнутая, то применяя формулу Остроградского имеем:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

Значит, дивергенция поля может быть записана

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{S\to M} \frac{\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV}{V_s}$$

Частные производные непрерывны, значит к тройному интегралу применима теорема о среднем.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{S\to M} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)_{M^*} \cdot V_S}{V_S}$$

Частные производные непрерывны, необходимо учитывать, что поверхность S стягивается в точку M, можно записать, что $M^* \to M$ и перейти к пределу под знаком непрерывной функции, после чего получим:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$