

Перпендикулярность прямых и плоскостей

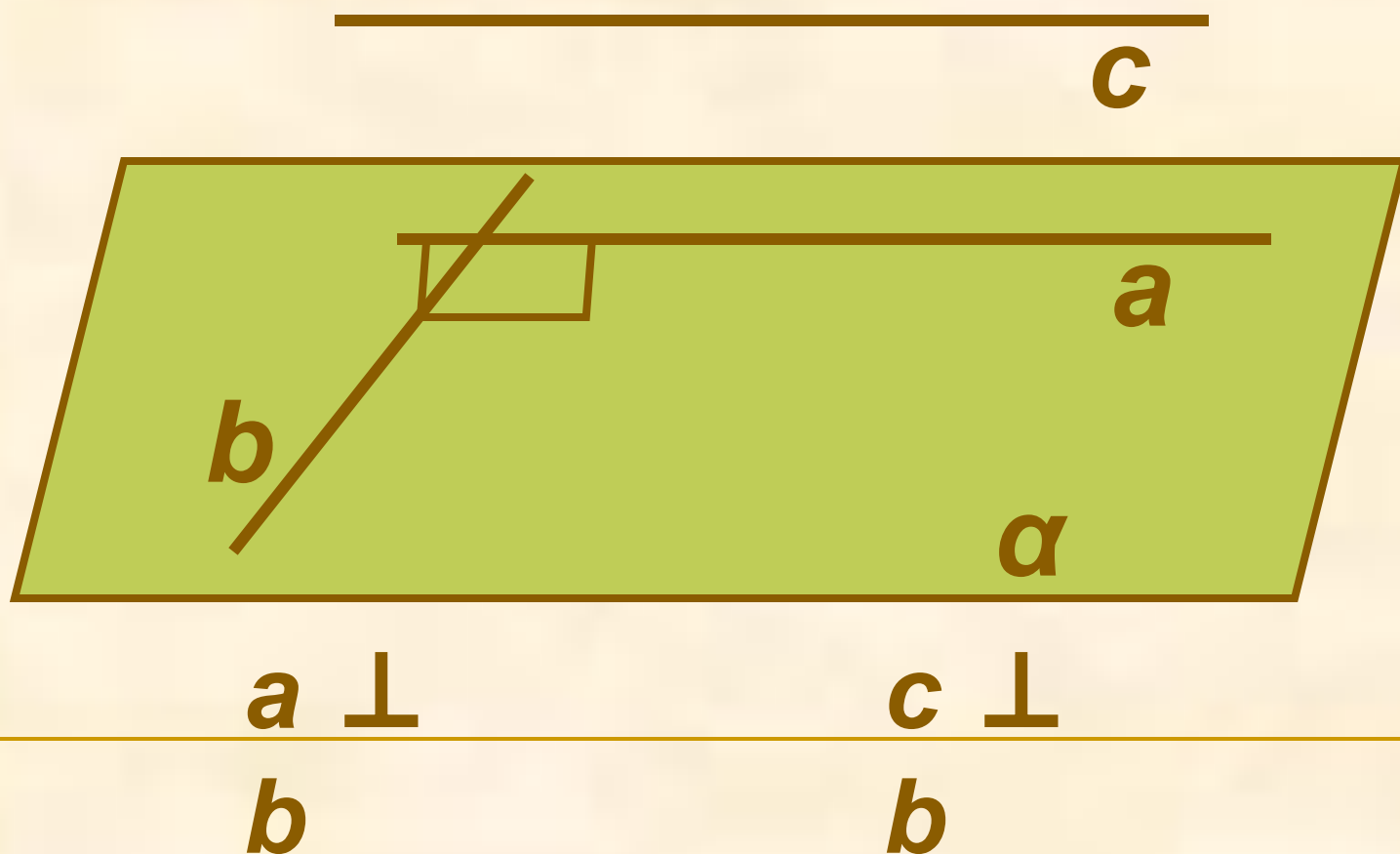
Автор: Елена Юрьевна Семенова

Содержание

- Перпендикулярные прямые в пространстве
- Лемма
- Определение прямой, перпендикулярной к плоскости
- Теорема о перпендикулярности двух параллельных прямых к плоскости
- Теорема о параллельности двух перпендикулярных прямых к плоскости
- Признак перпендикулярности прямой и плоскости
- Теорема о существовании и единственности прямой, перпендикулярной к данной плоскости
- Перпендикуляр и наклонные
- Теорема о трех перпендикулярах
- Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах
- Угол между прямой и плоскостью

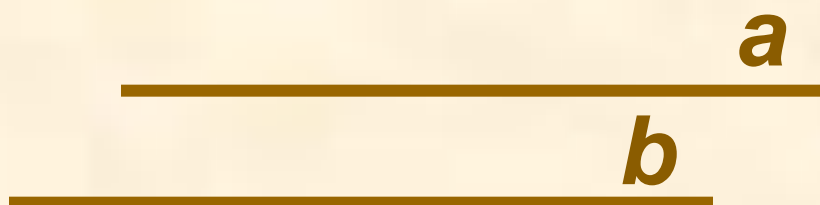
Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°



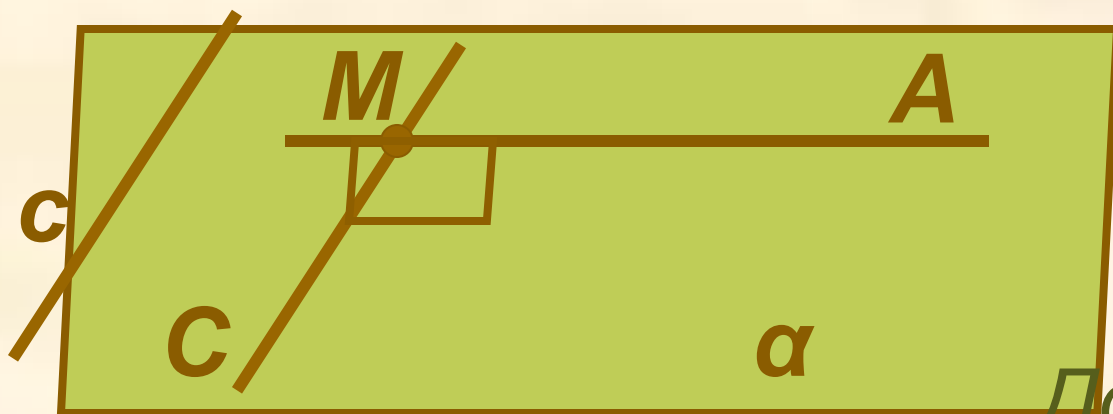
Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

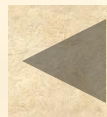


Дано: $a \parallel b$, $a \perp c$

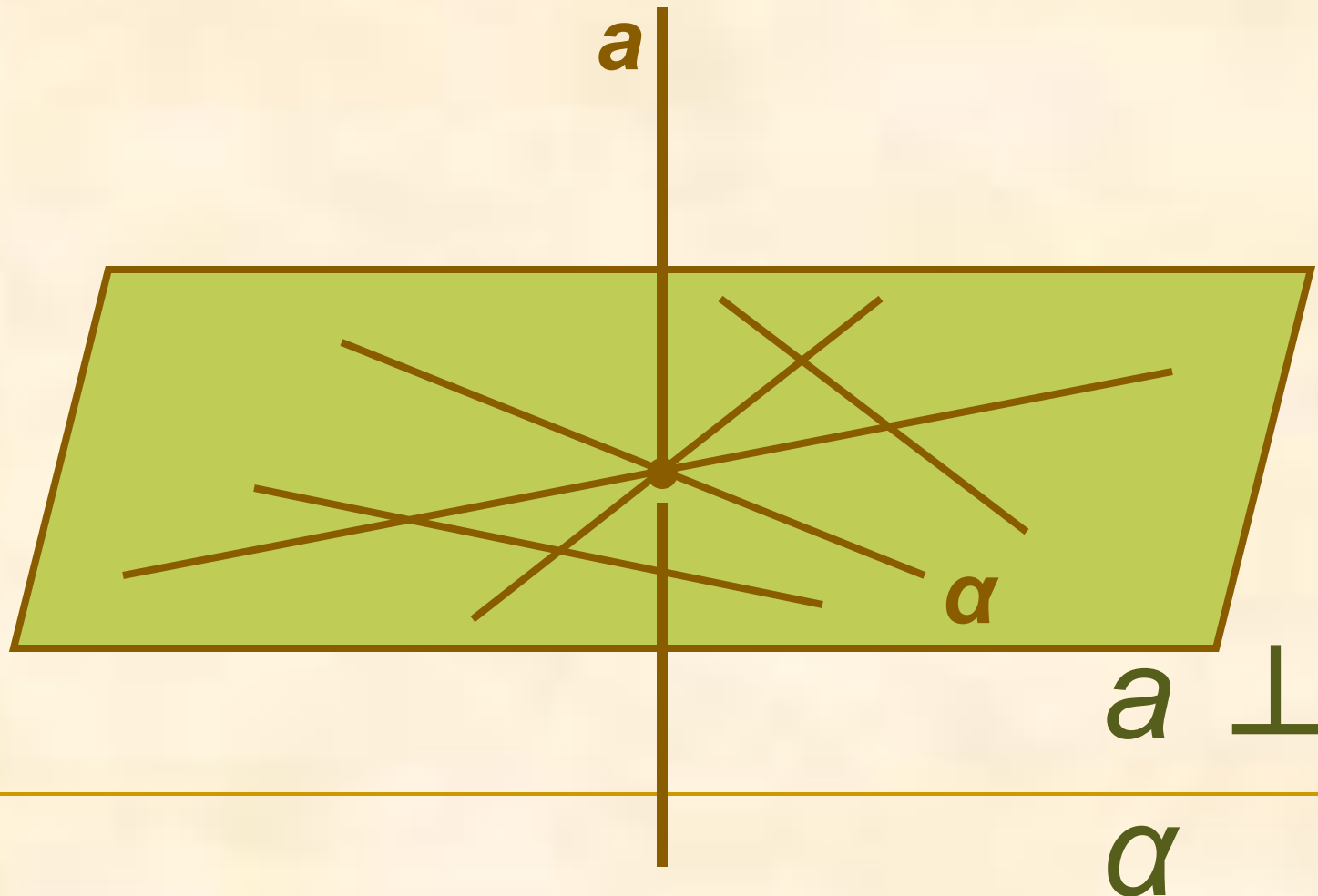
Доказать: $b \perp c$



Доказательство:

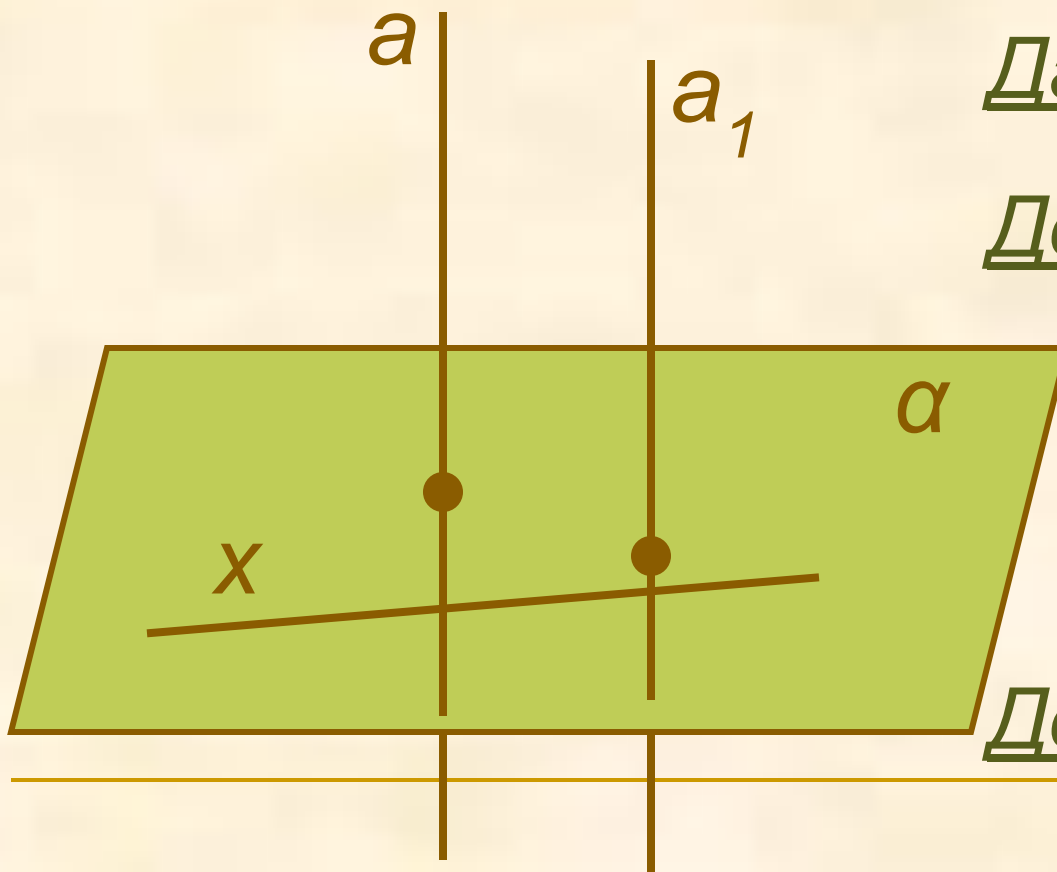


Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости



Теорема 1

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



Дано: $a \parallel a_1; a \perp \alpha$

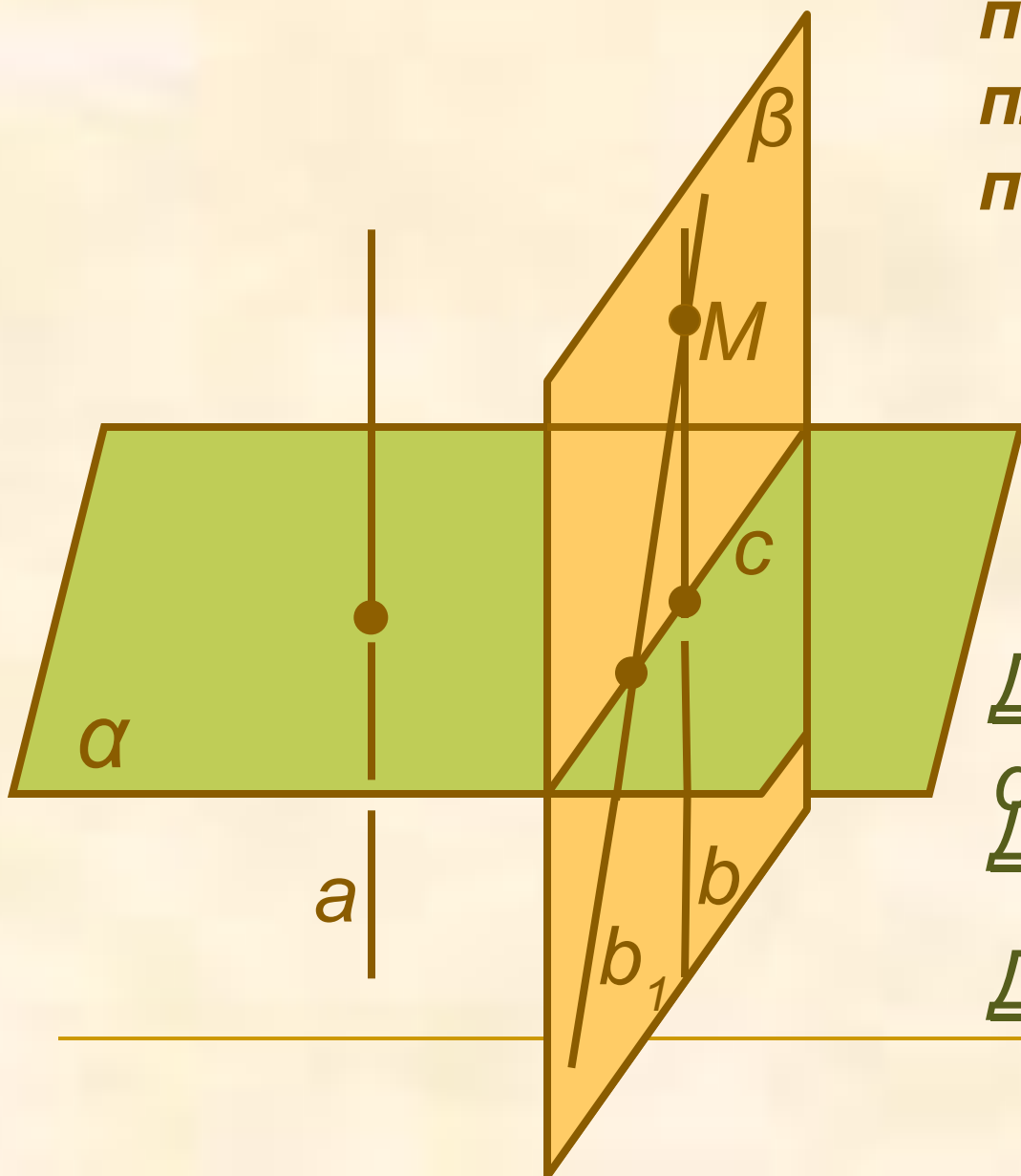
Доказать: $a_1 \perp \alpha$

Доказательство:



Теорема 2

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



Дано: $a \perp \alpha$; $b \perp \alpha$

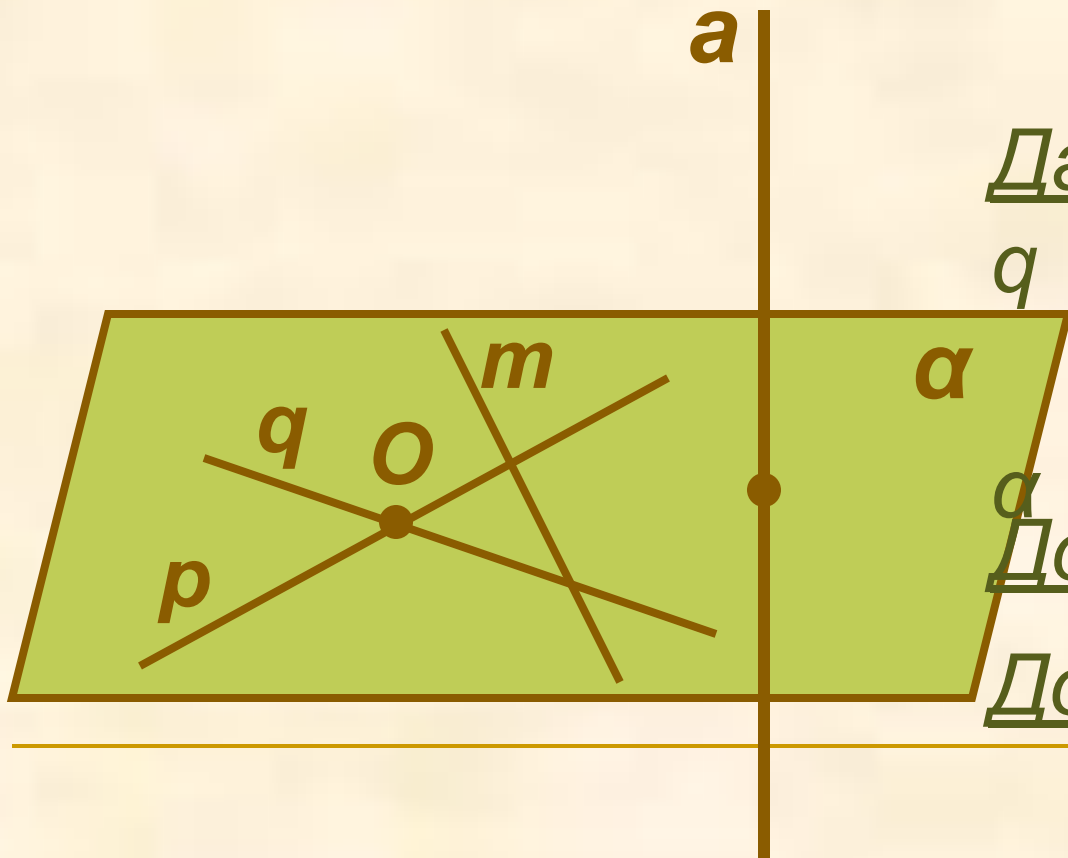
Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:



Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



Дано: $a \perp p$; $a \perp$

q

$p \subset \alpha$; $q \subset$

α

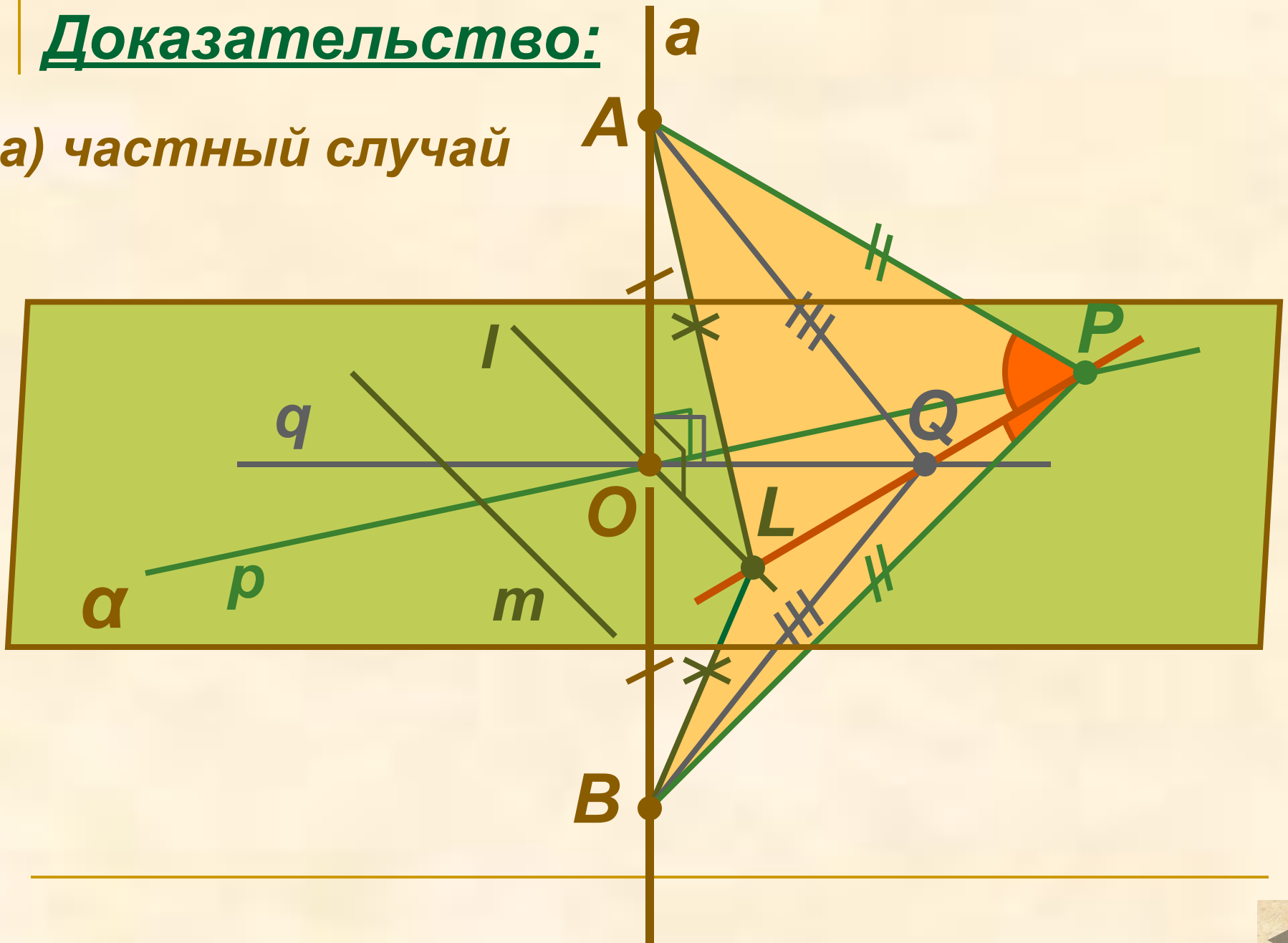
Доказать: $a \perp \alpha$
 $p \cap q = O$

Доказательство:



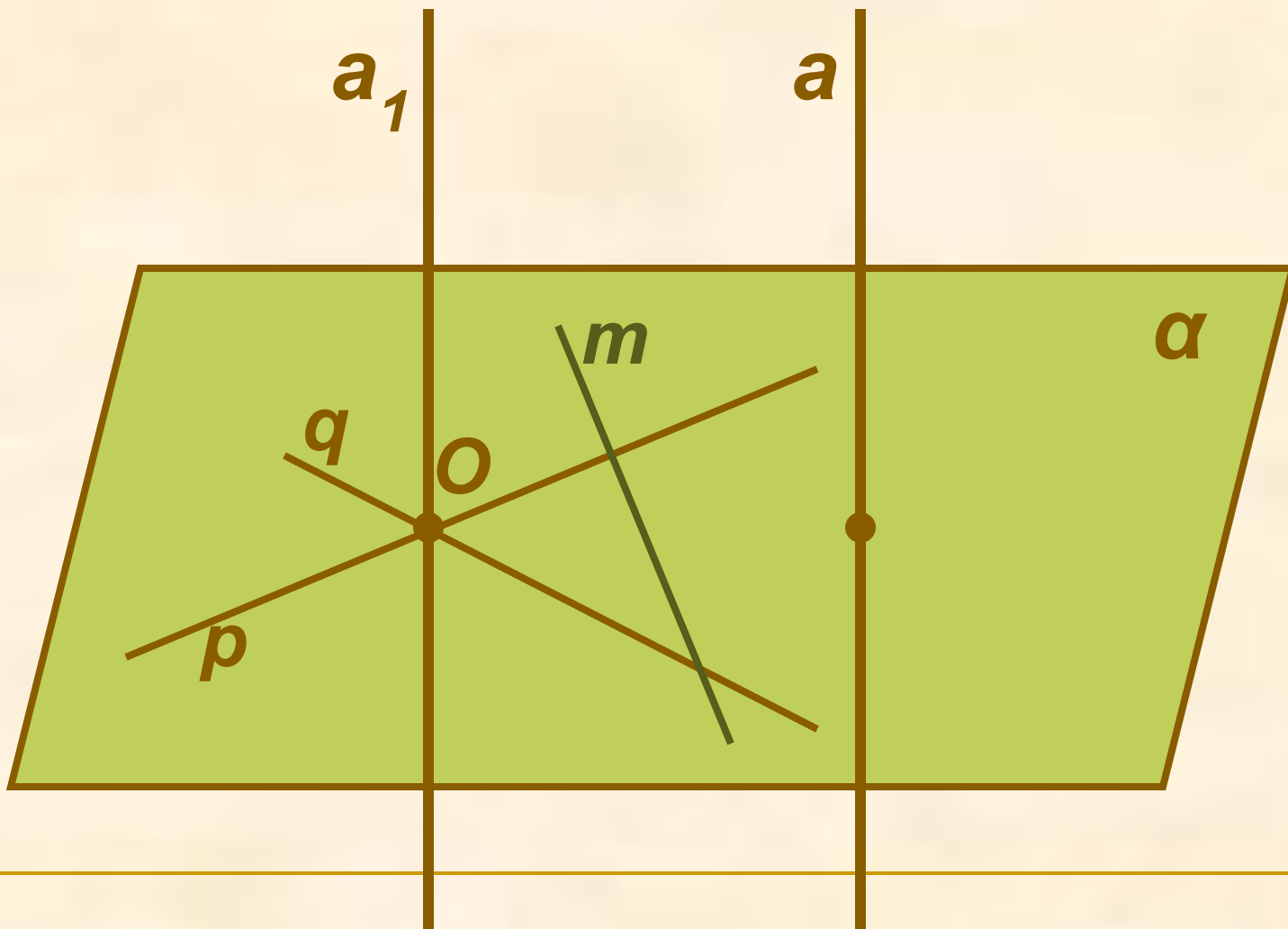
Доказательство: **a**

а) частный случай



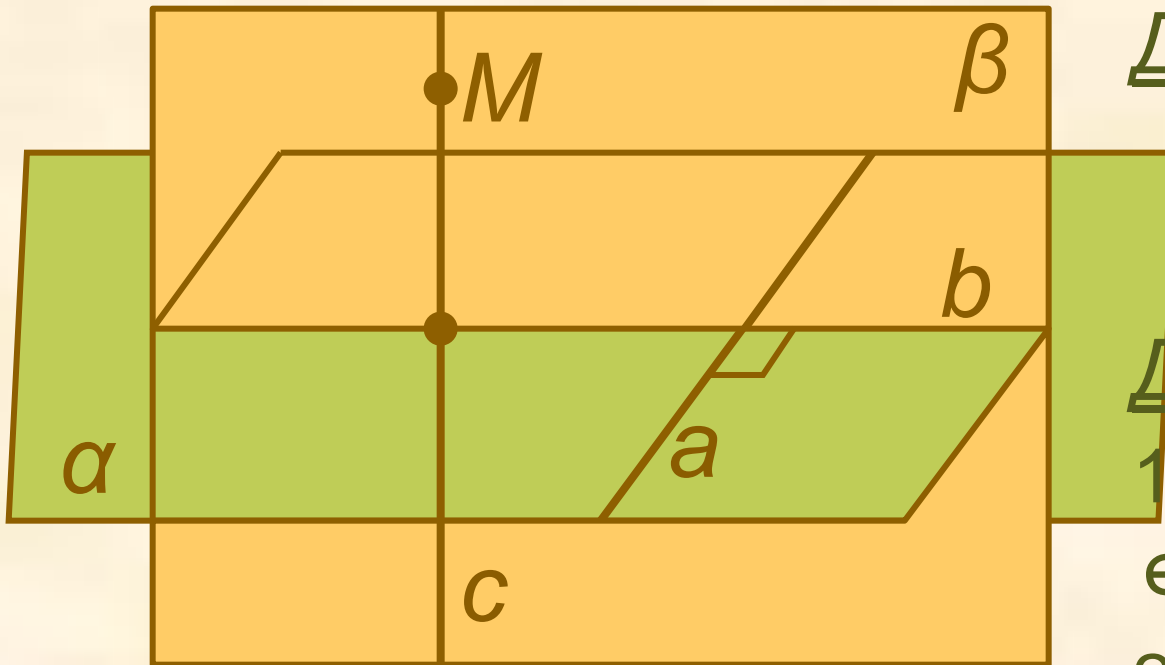
Доказательство:

а) общий случай



Теорема 4

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



Дано: $\alpha; M \notin \alpha$

Доказать:

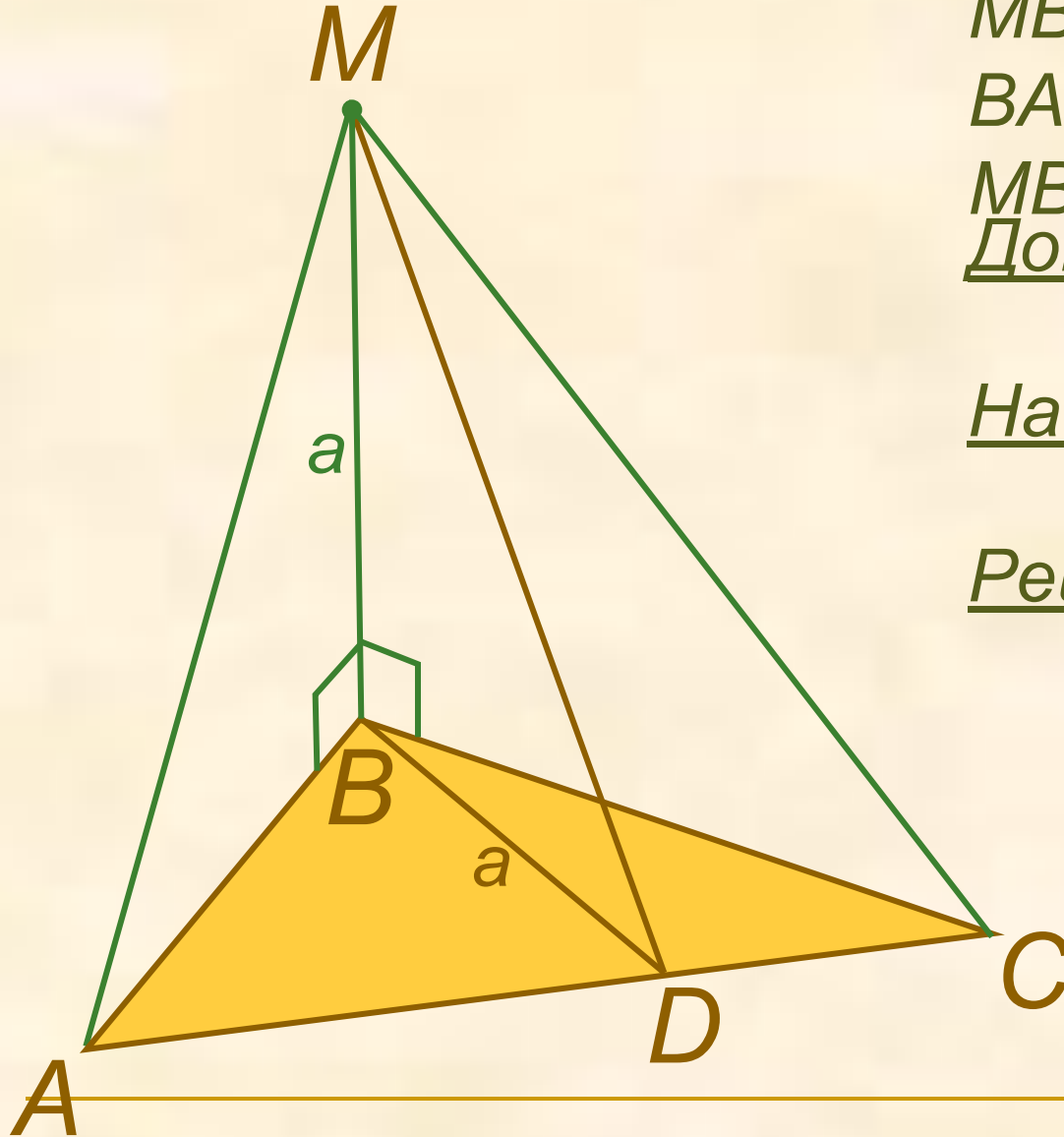
1) $\exists c, c \perp \alpha, M \in c;$

2) $c - !$

Доказательство:



Задача



Дано: $\triangle ABC$;
 $MB \perp BC$; $MB \perp$
 BA ;
 $MB = BD = a$
Доказать: $MB \perp BD$

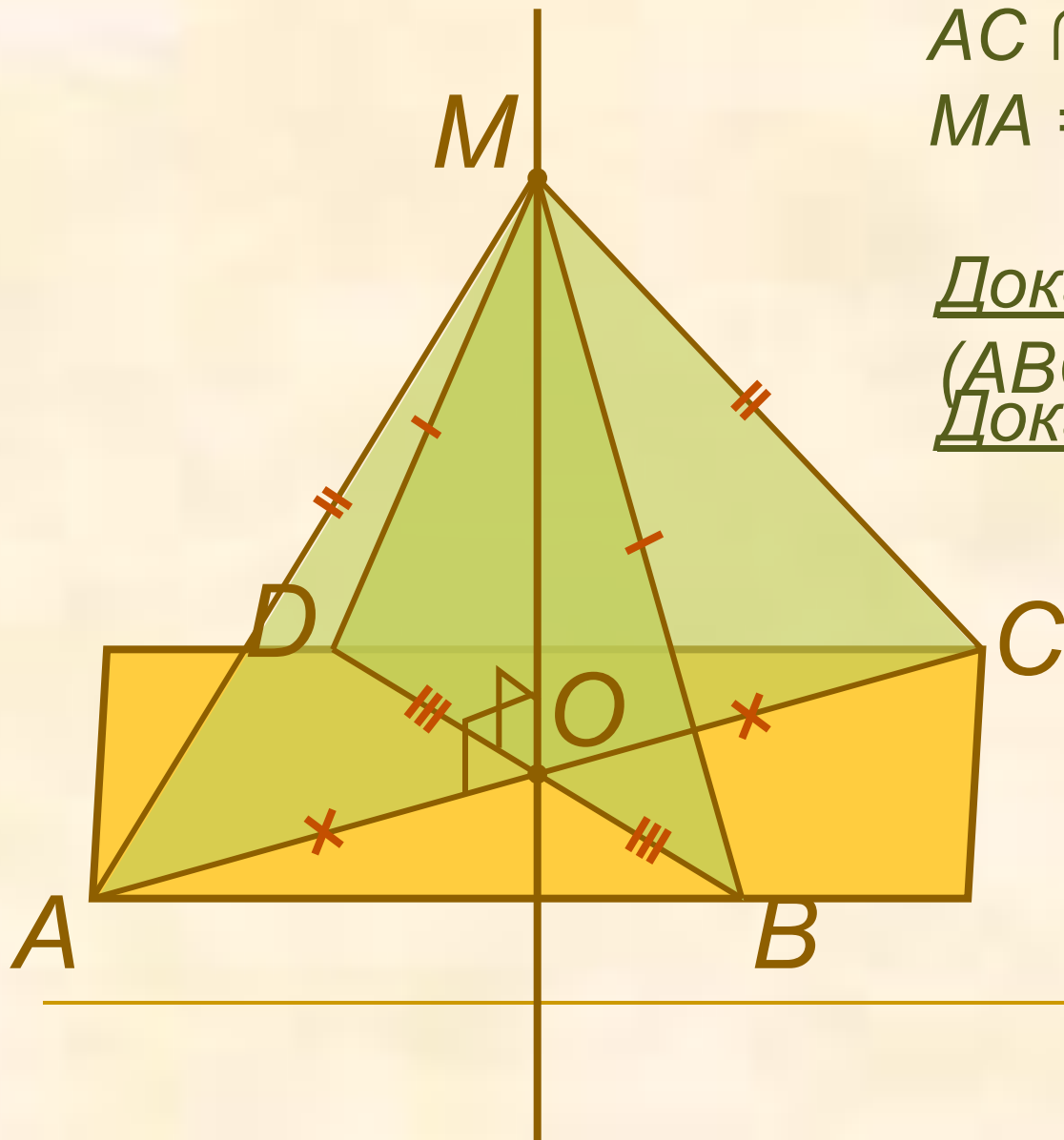
Найти: MD

Решение:

Задача 128

Дано: $ABCD$ -
параллелограмм;
 $AC \cap BD = O$; $M \notin (ABC)$;
 $MA = MC$, $MB = MD$

Доказать: $OM \perp$
 (ABC)
Доказательство:



Задача 122

Дано: $\triangle ABC$ – р/с;

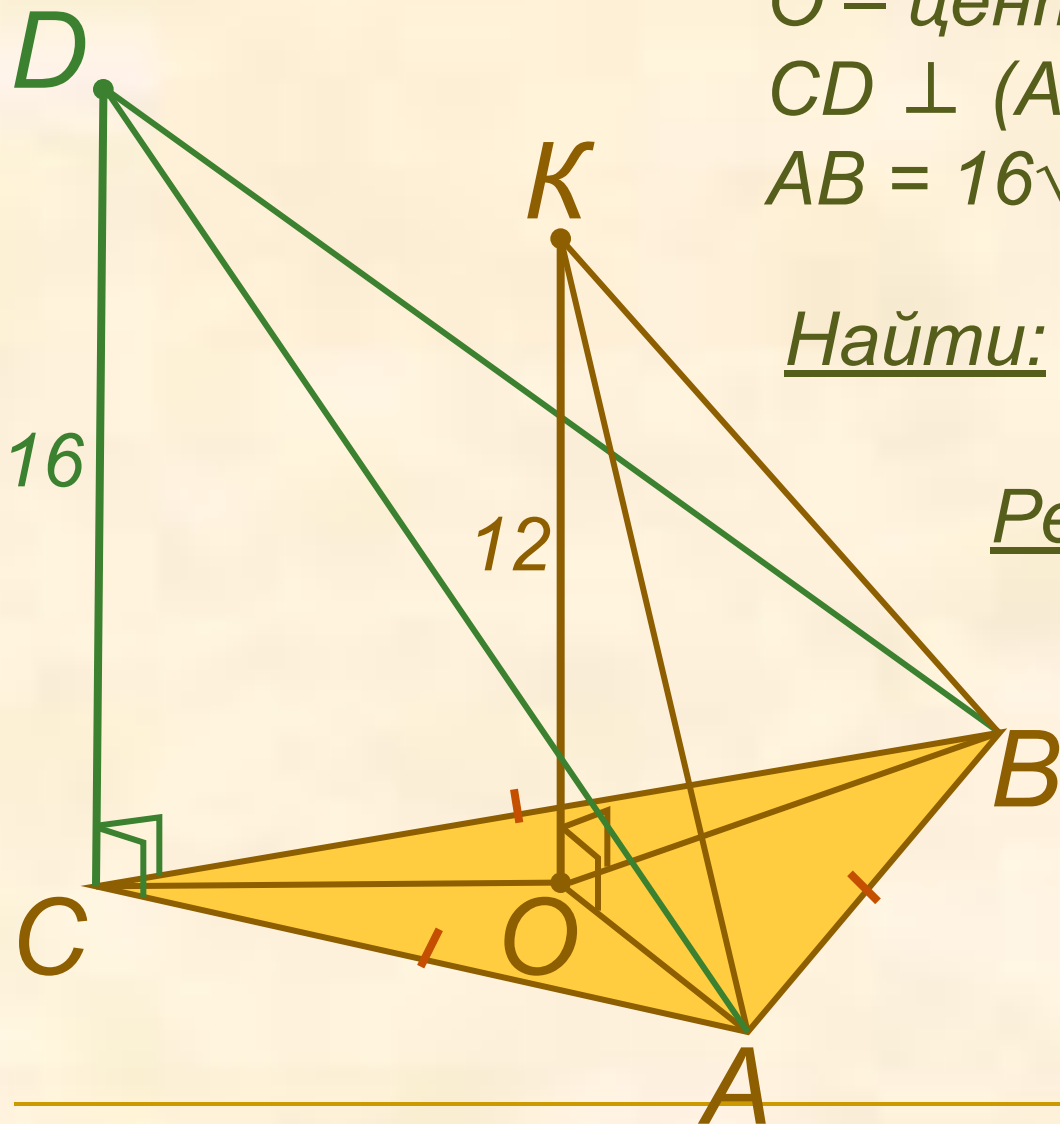
O – центр $\triangle ABC$

$CD \perp (ABC)$; $OK \parallel CD$

$AB = 16\sqrt{3}$, $OK = 12$; $CD = 16$

Найти: AD ; BD ; AK ; BK .

Решение:



Перпендикуляр и наклонные

$M \notin \alpha$

$MH \perp \alpha$

$H \in \alpha$

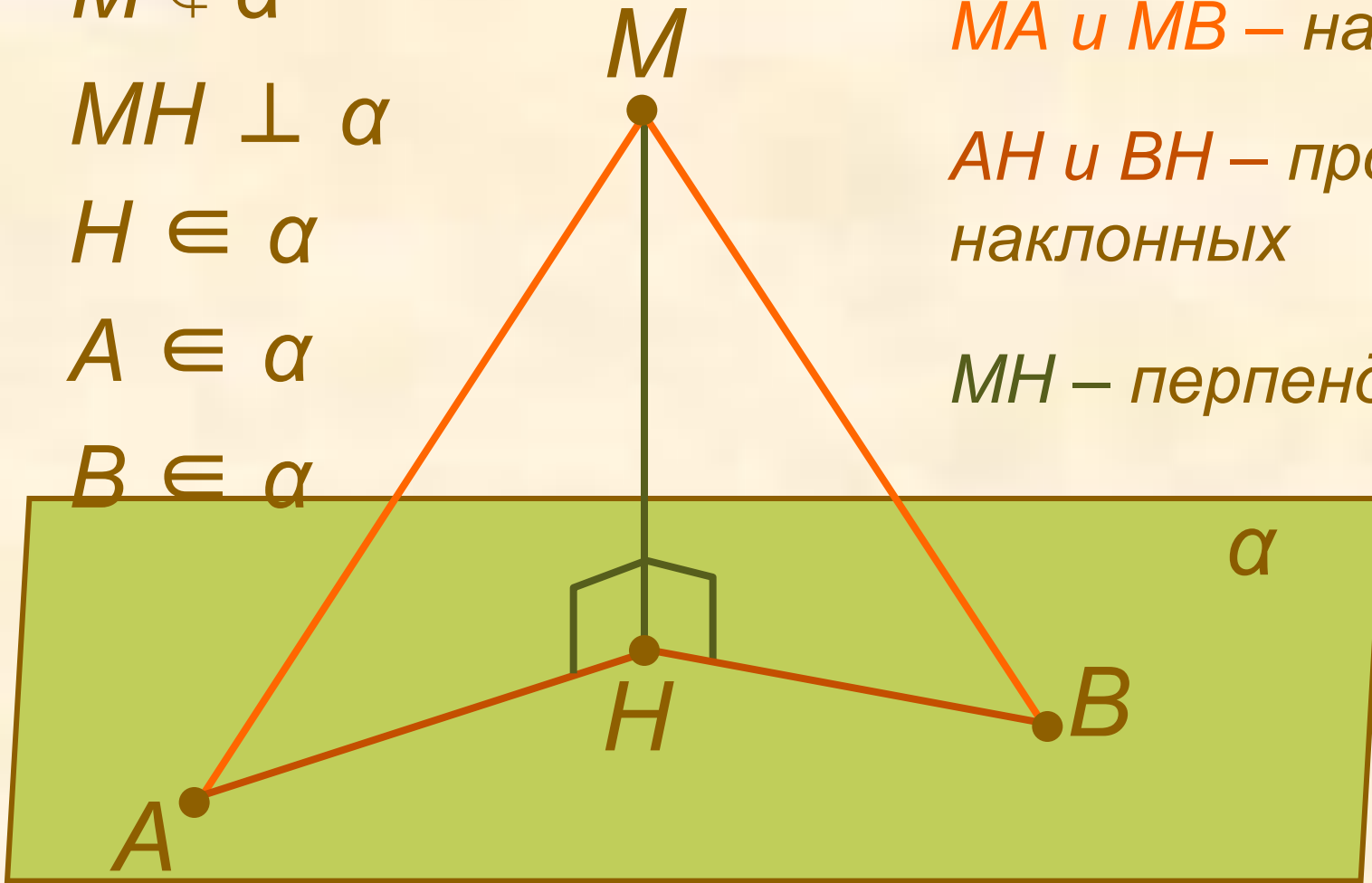
$A \in \alpha$

$B \in \alpha$

MA и MB – наклонные

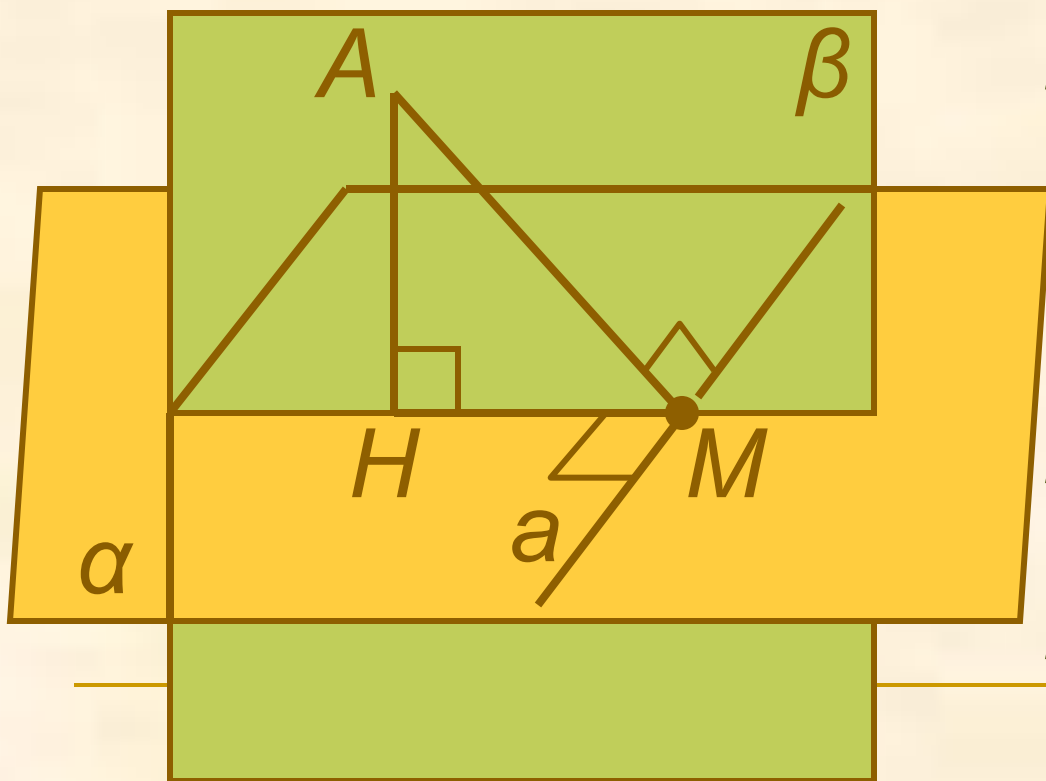
AH и BH – проекции
наклонных

MH – перпендикуляр



Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна к самой наклонной.



Дано: $a \subset \alpha$, $AH \perp \alpha$,

AM – наклонная,
 $a \perp HM$, $M \in a$

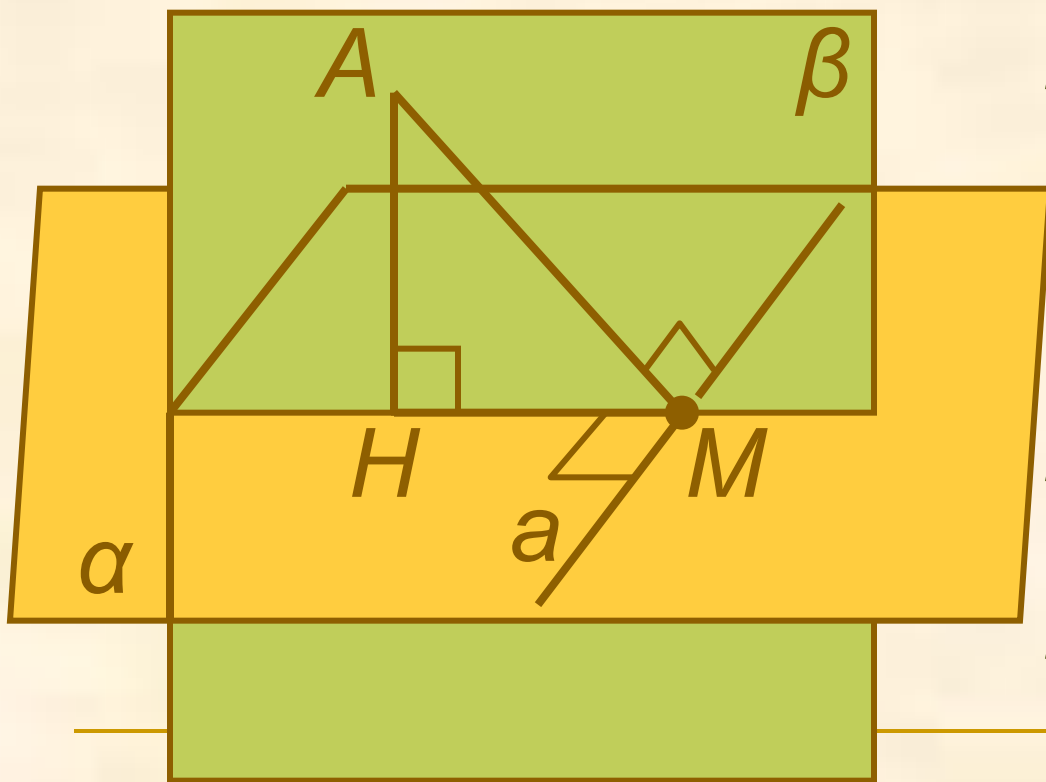
Доказать: $a \perp AM$

Доказательство:



Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.



Дано: $a \subset \alpha$, $AH \perp \alpha$,

AM – наклонная,
 $a \perp AM$, $M \in a$

Доказать: $a \perp HM$

Доказательство:

Угол между прямой и плоскостью

$$(\widehat{a; \alpha}) = \angle AOH = \varphi$$

