ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение случайной величины

- *Случайной* называется величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.
- Случайные величины принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита , а их значения – строчными буквами с индексами.

Виды случайных величин

- *Дискретной* называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения (то есть между двумя соседними возможными значениями нет других возможных значений) с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (счетным).
- *Непрерывной* называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число ее возможных значений бесконечно.

Примеры

- ***Пример 1***. Число мальчиков среди 10 новорожденных есть дискретная случайная величина, поскольку она может принимать только значения 0,1,2, …., 9, 10.
- ***Пример 2***. Время ожидания автобуса на остановке есть непрерывная случайная величина, так как она может принимать любые значения из промежутка - интервала движения автобусов.

Закон распределения

- *Законом распределения дискретной случайной величины* называется соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями.
- Закон распределения может быть задан таблично, аналитически (то есть с помощью формулы) и графически.

Закон распределения

В частности, если множество возможных значений дискретной случайной величины X конечно, то ее закон распределения можно задать таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Здесь $x_1, x_2, ..., x_n$ – все возможные значения случайной величины X, а $p_1, p_2, ..., p_n$ – соответствующие им вероятности.

При этом $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Пример

Пример . Монета брошена два раза. Случайная величина X – число выпадений герба. Составить закон распределения X.

Дискретная случайная величина X имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (герб не выпал ни разу), $x_2 = 1$ (герб выпал один раз), $x_3 = 2$ (герб выпал два раза).

Продолжение примера

$$p(X=0)=p_2(0)=C_2^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25\,.$$

$$p(X=1)=p_2(1)=C_2^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=0{,}5\,;$$

$$p(X=2)=p_2(2)=C_2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=0{,}25\,.$$

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2
p	0,25	0,5	0,25

Заметим, что $0{,}25+0{,}5+0{,}25=1$.

Биномиальное распределение

Биномиальным называется закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления этого события равна p. Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, имеет $n+1$ возможных значений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, …, $x_{n+1} = n$. Вероятности, с которыми X принимает эти значения, вычисляются по формуле Бернулли. В частности, биномиальный закон распределения имеет случайная величина X – число выпадений герба при двух бросаниях монеты, рассмотренная в примере .

Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Если множество возможных значений дискретной случайной величины X конечно, то

$$M(X)=x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n .$$

Пример

Пример . Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, которая имеет закон распределения:

X	2	4	6	8
p	0,1	0,2	0,4	0,3

По определению математического ожидания

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 = 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot 0{,}3 = 5{,}8.$$

Дисперсия

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, то есть

$$D(X) = M\left([X - M(X)]^2\right).$$

Для вычисления дисперсии удобно использовать следующую формулу: $D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2$.

Дисперсия характеризует степень рассеивания возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания (среднего значения).

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии, то есть

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Величина $\sigma(X)$, как и дисперсия, является оценкой степени рассеивания случайной величины X.

Пример

Пример . Найти дисперсию дискретной случайной величины X, которая имеет закон распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5 .$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M\left(X^2\right) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3 .$$

Тогда $D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону

Если дискретная случайная величина X *распределена по биномиальному закону с параметрами* n *и* p*, то*

$M(X) = np$, $D(X) = npq$.

Пример . Вероятность правильного заполнения налоговой декларации налогоплательщиком равна 0,7. Пятнадцать человек независимо друг от друга заполнили налоговые декларации. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа правильно заполненных деклараций.

Нетрудно заметить, что случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 15$ *и* $p = 0{,}7$.

Следовательно,

$M(X) = np = 15 \cdot 0{,}7 = 10{,}5$; $D(X) = npq = 15 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 3{,}15$.