

Függvényvizsgálat



A diasorozat az Analízis 2 (Mozaik Kiadó 2005.) c. könyvhöz készült.

Készítette: Dr. Ábrahám István

A függvényvizsgálat (**függvénydiszkusszió**) igen fontos terület.

A függvények vizsgálata egyúttal a természeti - társadalmi törvényeknek függvény alakjában megfogalmazott tulajdonságai felderítését is jelenti.

Általában a következő **sorrend** szerint végezzük a vizsgálatokat:

I. Az „elemi úton” meghatározható függvényjellemzők

1. Az értelmezési tartomány **konkrét** felírása (ha nem adták volna meg).
2. A **zérushelyek**, **y tengelypont** kiszámolása. (Zérushely: ahol **y=0**; y tengelypont: ahol **x=0**.)
3. A **folytonosság** vizsgálata. **Szakadási helyek** megadása.
4. **Paritás** vizsgálat (páros vagy a páratlan függvény, vagy egyik sem).
5. **Egyéb** elemi **jellemzők**: periodicitás, ill. más, a függvényutasítás által meghatározott speciális tulajdonságok vizsgálata.

Példa: végezzük el az $f: f(x) = \frac{2x^3 - 8x^2}{(x-4)(x-3)(x+3)}$ függvény diszkusszióját (vizsgálatát)!

1. Az értelmezési tartomány konkrétan: $x \in \mathbb{R} - \{-3; 3; 4\}$. **U.i.: a nevező nem lehet 0.**

A képlet átalakítható: $\frac{2x^2(x-4)}{(x-4)(x-3)(x+3)} \stackrel{\cancel{x-4}}{=} \frac{2x^2}{x^2-9} = g(x)$.

A **g(x)** egy pont (**x=4**) kivételével **meg-
egyezik** f(x)-szel. Így **elegendő** a vizs-
gálatot a **g(x)** függvényen elvégezni.

2. **Zérushely** (ahol y=0): $2x^2=0$, azaz **x=0**.
y tengelypont (ahol x=0, helyettesítés): **y=0**.

3. A nevezőt az $x=4$ helyen nullává tevő $x-4$ tényező megvan a számlálóban is, ugyanúgy első fokon. Ezen helyen a függvénynek **megszüntethető szakadása** van.

*Ez azt jelenti, hogy ha a $g(x)$ függvényt ábrázoljuk, akkor az $f(x)$ -et megkapjuk, annyi eltéréssel, hogy az $f(x)$ -nél a **4** helyen „**lyuk**” van a függvénygörbén.*

Az $x-3$ és az $x+3$ tényező nincs meg a számlálóban, így az $x=3$ és az $x=-3$ helyeken a függvénynek **nem megszüntethető szakadásai** vannak.

A függvény **másutt folytonos**, mert folytonos függvények hányadosa (művelettartás).

4. A g függvény **páros**, mert $g(-x)=g(x)$. (Az ábrázolásnál ezt az információt jól ki lehet használni.)

5. **Egyéb jellemző** közvetlenül nem látszik, **nem** keressük.

II. Helyi szélsőérték, monotonitás vizsgálat

A vizsgálathoz az **első** és a **második** deriváltakat használjuk fel:

$$g'(x) = \frac{4x(x^2 - 9) - 2x \cdot 2x^2}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-36x}{(x^2 - 9)^2}, \quad g''(x) = \frac{108x^2 + 324}{(x^2 - 9)^3}.$$

Helyi szélsőérték **ott lehet**, ahol $g'(x)=0$, azaz $-36x=0$, $x=0$.

Mivel $g''(0)<0$, tehát az $x=0$ pontban **van** helyi szélsőérték és ez **maximum**.

Ebben a pontban a **függvényérték** is **0**. Eredményünk írható így is: $P_{\max}(0;0)$.

Másutt nincs helyi szélsőérték, mert ha lenne, az a deriválásos módszerünk kimutatná.

Monotonitási szakaszok

1. A **szakaszhatárokat** általában a **helyi szélsőértékek**, illetve a nem megszüntethető **szakadási** helyek adják.

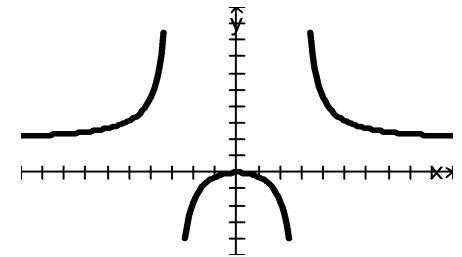
2. Az adott szakaszon a **monotonitást** legtöbbször az **első derivált előjelével** vizsgáljuk: ha az $f'(x) \geq 0$ a szakaszon, akkor az $f(x)$ növekvő, ha pedig $f'(x) \leq 0$, akkor az $f(x)$ csökkenő.

Így: a $]-\infty; -3]$ intervallumon $g'(x) > 0$, tehát $g(x)$ növekvő.

A $[-3; 0]$ szakaszon $g'(x) > 0$, a $g(x)$ itt is nő.

Elegendő egy konkrét szakaszbeli pontban megvizsgálni a derivált előjelét. Az is belátható, hogy minden negatív x esetén a g' pozitív (kivéve az $x = -3$ -at).

A függvény **páros** volta miatt az **y tengelyre szimmetrikusan** minden hasonlóan történik. Az eddig megtalált jellemzőkkel **vázolhatjuk** a függvény **gráfját**:



III. Inflexiós pontok, görbületi szakaszok meghatározása

Ott **lehet** inflexiós pont („görbületváltási hely”), ahol a **második derivált** értéke **0**.

Akkor **van** ezen a helyen inflexiós pont, ha a **harmadik derivált** itt **nem 0**,

vagy: ha a **második derivált** ebben a pontban **előjelet vált**.

Általában az egyszerűbben végrehajtható módszert célszerű választani.

Mivel a **második derivált** $(108x^2 + 324) \neq 0$, ezért a függvénynek **nincs** inflexiós pontja.

Görbületi szakaszok

1. A **szakaszhatárok** kijelölése: általában az **inflexiós pontok** és a nem megszüntethető **szakadási** helyek jelölik ki a szakaszhatárokat.
2. Az adott szakaszon a **görbületet** a **második derivált előjele** határozza meg: ha az $f''(x) \geq 0$, akkor **konvex**, ha az $f''(x) \leq 0$, akkor **konkáv** az eredeti függvény az adott szakaszon.

Így: a $]-\infty; -3[$ intervallumon $g''(x) > 0$, tehát $g(x)$ **konvex**.

A $]-3; 3[$ szakaszon $g''(x) < 0$, azaz $g(x)$ **konkáv**.

A $]3; \infty [$ intervallumon $g''(x) > 0$, tehát $g(x)$ **konvex**.

Ez az információ nem mond ellent az eddig megismert jellemzőknek.

IV. Határértékek

A határértékeket az **ÉT „szélein”** vizsgáljuk, azaz általában a **+** vagy **- végtelenben**, illetve a **nem megszüntethető szakadási** helyeken. Esetünkben:

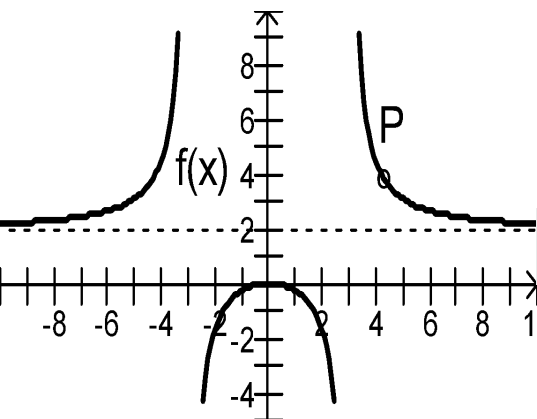
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = 2, \text{ és } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2. \quad \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = \infty, \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow +3-0} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = -\infty, \lim_{x \rightarrow +3+0} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = \infty.$$

A határérték vizsgálatot a -3 -nál és a 3 -nál nem kötelező elvégezni, hiszen ha például -3 -ig állandóan nő a (folytonos) függvényünk, akkor itt a baloldali határérték csak végtelen lehet.

V. A függvénygörbe felrajzolása, értékészlet megadása

Az I–IV. pontbeli információkból **jó pontossággal** felrajzolható a függvény gráfja.

Az **értékkészlet** leolvasásában, megadásában a **pontos rajz** ad nagy segítséget:



A rajz készítésekor a vázlatunkat **pontosítottuk**, ehhez a függvénygörbén néhány „**hitelesítő**” pontot számolunk ki.

Például: $P(-4; 2,94)$, $P(-2; -1,6)$, $P(-1; -0,25)$.

A függvénygörbe az $x=4$ helyen „**lyukas**” (szakadási pont).

Az **értékkészlet:** $y > 2$ és $y \leq 0$.

A **függvényvizsgálat** egyes lépéseit, eredményeit megjeleníthetjük **táblázatos** formában is, például így:

	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
g'	+	+	0	-	-
g''	+	-	-	-	+
g	nő konvex	nő konkáv	H.max. Ért.: 0	csökk. konkáv	csökk. konvex

*Előfordul, hogy **egyéb jellemzőkre is kíváncsiak vagyunk**, mint például a függvény **aszimptotái**, a töréspontbeli **bal- és jobboldali differenciál hányadosok**, vagy **egy-egy pontban a bal- és jobboldali folytonosság**.*

A speciális jellemzőket **külön kérésre** megadhatjuk, viszont a függvényvizsgálatot a fenti **I–V. pontbeli teendők teljesítésével teljesnek** tekinthetjük.

A **gyakorlati** problémáknál előfordul, hogy a feladathoz rendelt **függvény vizsgálatánál** nem kell teljes diszkussziót végeznünk, **elegendő** általában csak a helyi **szélsőértékek**, vagy a **görbületek** meghatározása.

Az eljárás ilyenkor a bemutatottal lényegében azonos.

Gyakorló feladat

Diszkutáljuk a következő függvényt: $f : f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

Emlékeztetőül a **vizsgálat** javasolt **lépései**:



I. Az „elemi úton” meghatározható függvényjellemzők

II. Helyi szélsőérték, monotonitás vizsgálat

III. Inflexiós pontok, görbületi szakaszok

IV. Határértékek

V. A függvénygörbe felrajzolása, értékkészlet megadása

Megoldás

I. Értelmezési tartomány lehet: $x \in \mathbb{R}$. Zérushely: $x=1$. y tengelypont: $y=1$. Szakadás nincs.

II. Deriválások: $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $f''(x) = \frac{-4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$. Az $f'=0=(x-1)(x+1)$, azaz: $x_1=1$ és $x_2=-1$.

Az $f''(-1)<0 \Rightarrow P_{\max}(-1;2)$, és $f''(1)>0 \Rightarrow P_{\min}(1;0)$.

Monotonitási szakaszok: $]-\infty; -1]$: $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ **növekvő**. $[-1; 1]$: $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ **csökkenő**.

$[1; \infty[$: $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ **növekvő**.

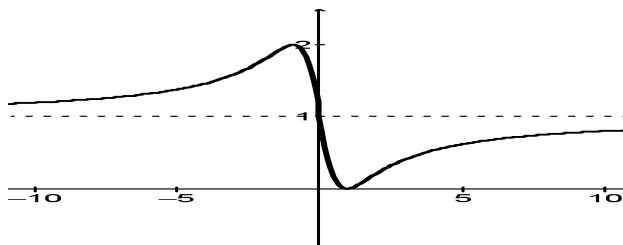
III. Görbület, inflexió: ott lehet, ahol $f''(x)=0$. Ebből: $x_3=0$, $x_4=-\sqrt{3}$, $x_5=\sqrt{3}$.

A görbületi szakaszok: $]-\infty; -\sqrt{3}]$ $f''>0 \Rightarrow f(x)$ konvex, $[-\sqrt{3}; 0]$ $f''<0 \Rightarrow f(x)$ konkáv.
 $[0; \sqrt{3}]$ $f''>0 \Rightarrow f(x)$ konvex, $[\sqrt{3}; \infty[$ $f''<0 \Rightarrow f(x)$ konkáv.

Az x_3, x_4, x_5 helyek mindegyikénél **görbületváltás** volt, így mindhárom helyen **inflexiós pont**

IV. Határérték: $\lim_{\pm\infty} f(x) = 1$.

V. Értékkészlet, rajz: **ÉK: $0 \leq y \leq 2$** .



A vizsgálat egyes lépéseit táblázatba is foglalhatjuk.

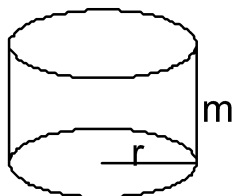
„Szöveges” szélsőérték feladatok

Gyakori, hogy a vizsgálandó függvény **matematikai alakját** nekünk kell „**előállítanunk**” a **feladat szövegéből** és csak **néhány függvényjellemzőt** (általában **szélsőértéket**) kell számolni.

A függvényjellemzőket a szöveges (gyakorlati) feladatok esetén általában bizonyos induló feltételek (például a változó csak pozitív szám lehet) mellett keressük.

Így ezeket a feladatokat szokták **feltételes szélsőérték feladatoknak** is nevezni. Induló feltételeket **nemcsak szöveges** feladatokhoz lehet adni.

Példa: a henger alakú, 1 liter térfogatú testek közül melyik a legkisebb felszínű?



$$V=1 \text{ liter}=1 \text{ dm}^3.$$

A megoldás lépései

1. Eldöntjük, hogy **mire keresünk szélsőértéket.** Ez most a henger **felszíne.**

2. Egyenletet írunk fel a keresett szélsőértékre. **$F=2T+P=2r^2\pi+2r\pi\cdot m.$**

3. Egyváltozósá tesszük a felvett függvényt. **Az adatok felhasználásával:**

Tudjuk: $V=T\cdot m=2r^2\pi m$ és $V=1$, így $m = \frac{1}{r^2\pi}$. Helyettesítés után: $F = 2r^2\pi + \frac{2}{r}$.

4. Szélsőérték keresés. **A függvényvizsgálatnál** látott módon. **Feltétel: $r>0$.**

$F' = 4r\pi - \frac{2}{r^2}$. $F'' = 4\pi + \frac{4}{r^3}$. **Ott lehet szélsőérték, ahol $F'=0$:** $4r\pi - \frac{2}{r^2} = 0$, azaz $r^3 = \frac{1}{2\pi}$.
Tehát **$r\approx 0,542$** . Mivel $F''(0,542)>0$, ezért ezen a helyen **minimum** van.

5. Válasz a szövegben feltett kérdésre. **$r\approx 5,42$ cm, $m\approx 10,84$ cm, $F_{\min}\approx 5,54\text{dm}^2$.**

Megjegyzések

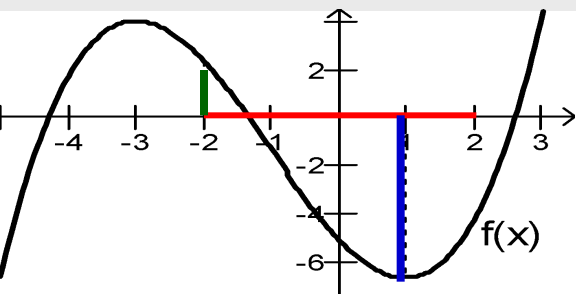
1. Globális és lokális szélsőérték

Egy függvény **helyi szélsőértéke** nem mindig esik egybe az értelmezési tartományon vett **legnagyobb, illetve legkisebb** függvényértékekkel, az **abszolút (globális) szélsőértékekkel**.

Példa: adjuk meg az $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 5$ szélsőértékeit a $[-2; 2]$ intervallumon.

Ha elvégeztük a **teljes függvényvizsgálatot**, akkor a **leszűkített értelmezési tartományú függvényre vonatkozó információkat már egyszerű** megadni.

A függvény **gráfját** korábban már felvettük:



A függvény **folytonos**, így a $[-2; 2]$ intervallumon a **legnagyobb** értékét **-2-nél** veszi fel, értéke itt $\approx 2,3$, ami **nem** helyi szélsőérték.

A **legkisebb** érték ez esetben a **helyi szélsőérték** pontban van.

Ha viszont a függvényünket a $[-10; 2]$ szakaszon vizsgálánánk, akkor a **legkisebb** függvényérték már **nem** $x=1$ -nél lenne, hiszen $x=-10$ -nél $y \approx -208,33$.

2. Függvényvizsgálat az n-edik deriváltak ($n > 3$) felhasználásával

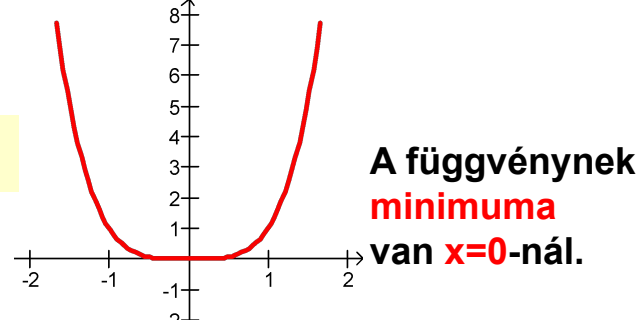
Példa: adjuk meg az $f(x) = (x-1)^4$ helyi szélsőértékeit és inflexiós pontjait!

Deriválások, zérushelyek: $f'(x) = 4(x-1)^3$, $f'(x) = 0$, $x_0 = 1$, itt **lehet** szélsőérték.

$f''(x) = 12(x-1)^2$, $f''(1) = 0$. **Nincs** szélsőérték!

$f'''(x)=24(x-1)$, $f'''(1)=0$. Inflexiós pont sincs?

Ismert viszont az $f(x)=(x-1)^4$, a negyedfokú parabola képe:



A deriválásokkal ilyen esetekben is elvégezhető a vizsgálat.

A **szabály**: ha a függvény **deriváltjai** az x_0 helyen az **n-edik deriváltig nullák**, de az **n+1-edik derivált** ezen a helyen már **nem nulla**, akkor:

Ha az **n páratlan**, a függvénynek az x_0 pontban helyi szélsőértéke van, amelynek **minősége**: ha az $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, akkor **minimum**, ha az $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, akkor **maximum**.

Ha az **n páros**, akkor a függvénynek az x_0 pontban **inflexiós pontja** van.

A **példánk megoldása**: az $f(x)$ esetén: $f'''(1)=0$, de $f^{(4)}(x)=24$, így $f^{(4)}(1) \neq 0$.

Az **x=1** pontban tehát $f(x)$ -nek **helyi szélsőértéke** van és: $f^{(4)}(1) > 0$, így a szélsőérték **minimum**.

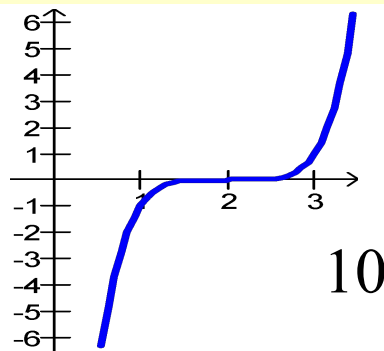
Példa: keressük a $g(x)=(x-2)^5$ függvény helyi szélsőértékeit és inflexiós pontjait.

Deriválások: $g'(x)=5(x-2)^4$, $g''(x)=20(x-2)^3$, $g'''(x)=60(x-2)^2$, $g^{(4)}(x)=120(x-2)$, $g^{(5)}(x)=120$.

A **negyedik deriválttal** bezárólag az **x=2** pontban az összes **derivált értéke 0**.

De az **ötödik derivált** nem nulla, így a $g(x)$ -nek az **x=2** pontban **inflexiós pontja** van.

A függvény gráfja hasonlít a harmadfokú függvény (jobbra 2-vel eltolt) képéhez.



A kétváltozós függvények szélsőértékei

Az $f(x;y)$ függvény szélsőérték keresése az **egyváltozós $f(x)$ függvény vizsgálatával analóg.**

Tétel: az $f(x; y)$ -nak **ott lehet** szélsőértéke, ahol az **első parciális deriváltak nullák:**

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \right\} \text{Az egyenletrendszernek } P_0(x_0; y_0) \text{ legyen a megoldása.}$$

A P_0 pontban akkor **van szélsőérték**, ha a második deriváltakból képezett:

$$D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \text{ kifejezés a } P_0(x_0; y_0) \text{ pontban pozitív: } D(x_0; y_0) > 0.$$

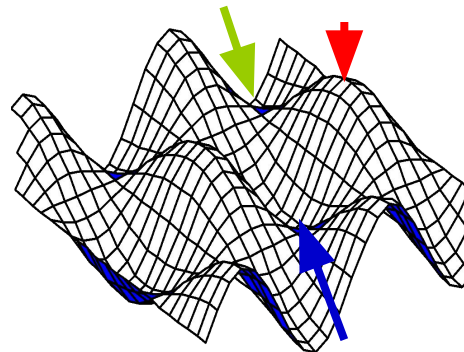
A szélsőérték minősége: ha $f''_{xx}(x_0; y_0) > 0$, akkor helyi minimum,
ha $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$, akkor helyi maximum van P_0 -ban.

Ha pedig $D(x_0; y_0) < 0$, akkor a függvénynek **nyeregpontja** van a P_0 pontban.

(Ha $D(x_0; y_0) = 0$, akkor más, további – nem részletezett – vizsgálatra van szükség.)

A kétváltozós függvény **helyi maximuma** a függvénynek megfelelő felületen általában „hegycsúcs-szerű” **kiemelkedés**, a **minimum** pedig „bemélyedés”.

A **nyeregpont** szemléletes kifejezés, **egyik irányú síkmetszete a felületnek maximumot ad az illető pontban, a másik irányú síkmetszet gráján ebben a pontban minimum lesz.**



A felület a nyeregpontban a „ló nyergéhez” hasonló.

$$f: f(x;y) = \sin 2x \cos y \quad 11$$

Példa: adjuk meg az $f(x; y)=x^3+x^2y+2y^3+4y^2-3$ helyi szélsőértékeit és nyeregpontjait!

Megoldás: a **szükséges** feltétel: $f'_x = 3x^2 + 2xy = 0$
 $f'_y = x^2 + 6y^2 + 8y = 0$

Az egyenletrendszer megoldásánál ügyeljünk arra, hogy a **gyökvesztést** elkerüljük!

Az **első** egyenletből: $x(3x+2y)=0$, azaz $x=0$, vagy $3x+2y=0$.

Ha $x=0$, akkor a **második** egyenlet: $6y^2+8y=0$, azaz $2y(3y+4)=0$. Így: $P_1(0; 0)$ és $P_2(0; -1,33)$.

Ha az **első** egyenletben $3x+2y=0$, azaz $y=-1,5x$, ezt helyettesítve a **második** egyenletbe újabb megoldást is kapunk:

$$x = \frac{24}{29} \text{ és } y = \frac{-36}{29}, \text{ így: } P_3\left(\frac{24}{29}; -\frac{36}{29}\right).$$

Az **elegendő** feltételhez elkészítjük a **második** deriváltakat: $f''_{xx} = 6x + 2y$, $f''_{xy} = 2x$, $f''_{yy} = 12y + 8$.

Ezután a **D(x; y) előjelét** vizsgáljuk a P_i pontokban: $D(P_1) = f''_{xx}(0;0) \cdot f''_{yy}(0;0) - (f''_{xy}(0;0))^2 = 0$.

Mivel a $D(P_1)=0$, ezért **más vizsgálat** szükséges. A **függvényérték** ebben a pontban **-3**.

$D(P_2) = \left(6 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{-4}{3}\right) \left(12 \cdot \frac{-4}{3} + 8\right) - (2 \cdot 0)^2 = \frac{64}{3}$. A $D(P_2)>0$, ezért a P_2 pontban **szélsőérték** van.

$f''_{xx}(P_2) < 0$, ezért a szélsőérték **maximum, értéke** (az eredeti $f(x; y)$ -ba helyettesítünk): $-\frac{17}{27}$.

A P_3 pontra: $D(P_3)<0$, azaz ebben a pontban **nyeregpont** van.