

Граничные задачи волноводного распространения

1. Поверхностные волны Рэлей (вертикальная поляризация)

1885 г



Джон Уильям Стретт (лорд Рэлей)

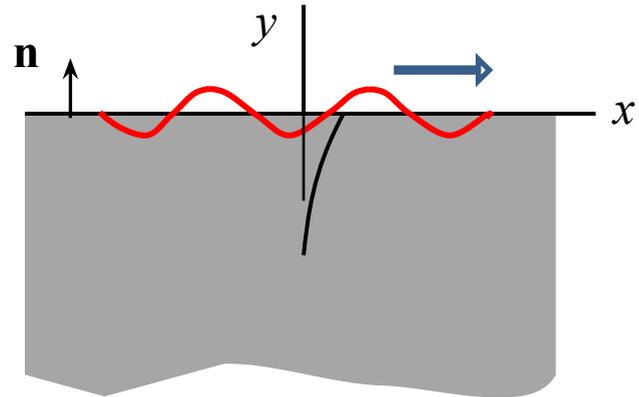
(1842-1919)

Колебания и волны, оптика, акустика

Рассеяние (голубой цвет неба), закон

Рэлей-Джинса излучения черного тела,

открытие аргона. Нобелевская премия



Особенности формулировки граничных условий:

$$1) \text{ при } y=0 \quad T_{ik} n_k = T_{iy} n_y \stackrel{1}{=} 0$$

$$T_{xy} \Big|_{y=0} = 0 \quad T_{yy} \Big|_{y=0} = 0$$

2) при $y \rightarrow -\infty$ (виртуальная граница)

упругие смещения отсутствуют

Построение

решения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{l,t}}{\partial t^2} - c_{l,t}^2 \nabla^2 \mathbf{u}_{l,t} = 0$$

Поиск решения в

$$\mathbf{u}_{l,t} = \mathbf{U}_{l,t} \overset{\text{виде}}{\exp[i(kx - \omega t)]} f_{l,t}(y)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

приводит при подстановке в волновые уравнения к обыкновенному ДУ

для определения функций f :

$$\frac{d^2 f_{l,t}}{dy^2} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_{l,t}^2} \right) f_{l,t} = 0$$

Проблема выбора решения:

?

$$k < \frac{\omega}{c_{l,t}} \quad \text{ил} \quad k > \frac{\omega}{c_{l,t}}$$

и

Волны бегущие не только вдоль границы: решение для них неопределенно

из-за невозможности формулирования ГУ на виртуальной границе $y = -\infty$

Услови
е

$k > \frac{\omega}{c_{l,t}}$: означает

1) Медленность распространения
волны Рэлея (только вдоль
границы!)

$$k = \frac{\omega}{v_R} \Rightarrow \frac{\omega}{v_R} > \frac{\omega}{c_{l,t}} \Rightarrow v_R < c_{l,t}$$

по сравнению с обеими
типами волн L и T в безграничной
среде

2) Возможность представления функций $f_{l,t}$ в
виде

$$f_{l,t} \cong \exp(\pm \alpha_{l,t} y) \quad \alpha_{l,t} = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{l,t}^2}}$$

Теперь отбор решения в области $y < 0$ можно осуществить,
руководствуясь требованием ограниченности ($|\mathbf{u}| < M \rightarrow$ отбору
положительного корня), не вступая в противоречие с
удовлетворением

ГУ на виртуальной границе: $|\mathbf{u}| \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$

Общий вид

решения

$$\mathbf{u} = [\mathbf{U}_l \exp(\alpha_l y) + \mathbf{U}_t \exp(\alpha_t y)] e^{i(kx - \omega t)}$$

Решение образовано суперпозицией продольной и поперечной неоднородных волн

Вывод дисперсионного

соотношения

Общее решение требует конкретизации:

- 1) Установление связи между вектор-амплитудами \mathbf{U}_l и \mathbf{U}_t с возможностью выделения общего амплитудного коэффициента
- 2) Установление связи между k и ω т.е. закона дисперсии волны Рэлея

Вектор-амплитуды: 4
неизвестных

$$U_{lx}, U_{ly}, U_{tx}, U_{ty}$$

Связи между ними устанавливают 2 граничных условия

$$T_{xy}|_{y=0} = 0 \quad T_{yy}|_{y=0} = 0$$

и 2
уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$$

Задача
замкнута.

Общая формула для компонент тензора напряжений

$$T_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2) u_{ll} \delta_{ik}$$

$$T_{xy} = \rho c_t^2 \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho c_t^2 i k u_y \quad T_{yy} = \rho (c_l^2 - 2c_t^2) i k u_x + \rho c_l^2 \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ty}}{\partial y} = 0 \Rightarrow i k u_{tx} + \alpha_t u_{ty} = 0 \quad \boxed{\begin{array}{l} u_{ty} = -i \frac{k}{\alpha_t} u_{tx} \end{array}} \quad (I)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0 \quad \begin{vmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} & \mathbb{Z} \\ i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u_{lx} & u_{ly} & 0 \end{vmatrix} = k \left(\frac{\partial u_{ly}}{\partial x} - \frac{\partial u_{lx}}{\partial y} \right) = 0$$

$$i k u_{ly} - \alpha_l u_{lx} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_{lx} = \frac{i k}{\alpha_l} u_{ly} \end{array}} \quad (II)$$

С учетом (I), $T_{xy}|_{y=0} = 0$ $T_{yy}|_{y=0} = 0$ даю
 (II) т

$$\alpha_t 2iku_{ly} + (k^2 + \alpha_t^2)u_{tx} = 0$$

$$u_{ly} \frac{\alpha_l^2 - k^2(1 - 2c_t^2/c_l^2)}{\alpha_l} - 2ik \frac{c_t^2}{c_l^2} u_{tx} = 0$$

Система однородных алгебраических уравнений относительно u_{tx} и u_{ly} что составляющих векторов смещений u_{tx} и u_{ly} равна нулю. Условие разрешимости системы $\text{Det}=0$ дает **дисперсионное соотношение** волны Рэлея

$$(k^2 + \alpha_t^2) = 4k^2 \alpha_l \alpha_t$$

Из самих уравнений и уравнений (I), (II) можно установить общий амплитудный коэффициент для неоднородных волн L и T-типа

Подстановка $\alpha_{l,t} = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{l,t}^2}}$ в дисперсионное соотношение

даёт искомую связь

$k(\omega)$

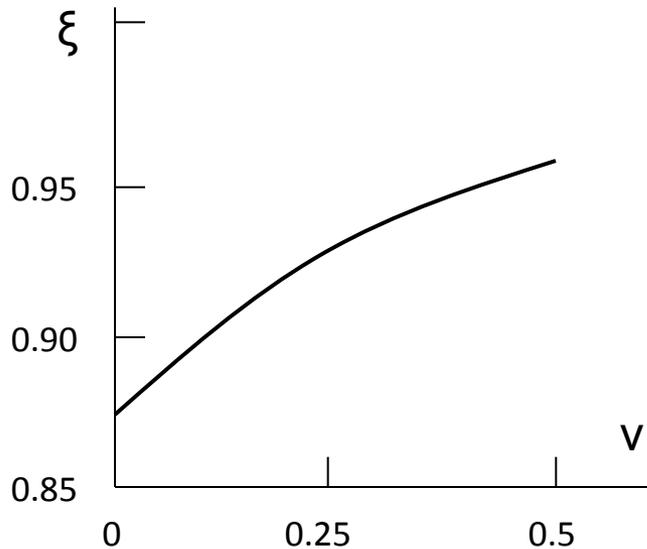
$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right)$$

С заменой $\omega = c_t k \xi$ для ξ получаем бикубическое уравнение

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0$$

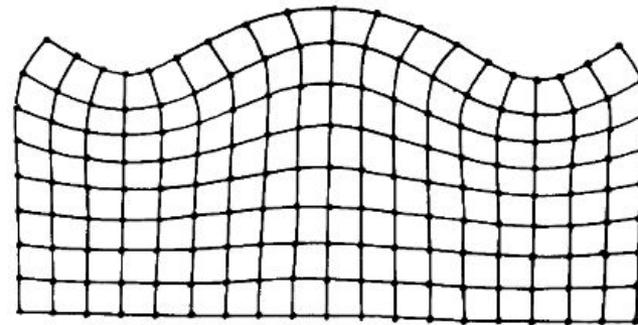
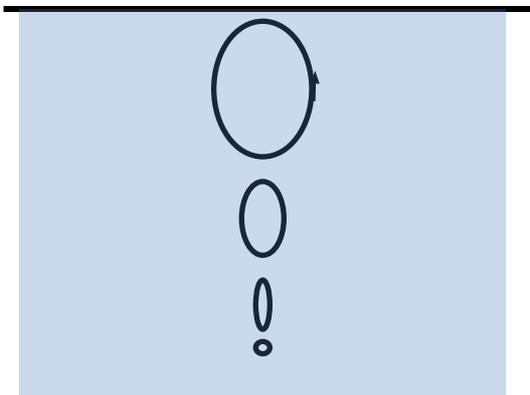
Так как $\frac{c_t}{c_l} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ величина ξ и фазовая скорость волны

Рэле $v_R = \xi c_t$ зависят только от коэффициента Пуассона ν



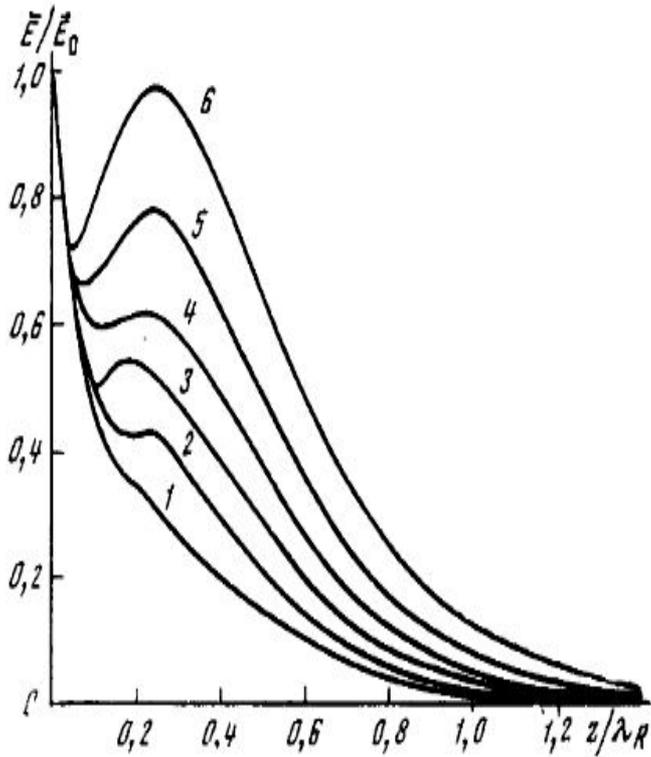
$$v_R \approx c_t \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu}$$

Скорость волны Рэлея не зависит от частоты
(бездисперсивность волн Рэлея)

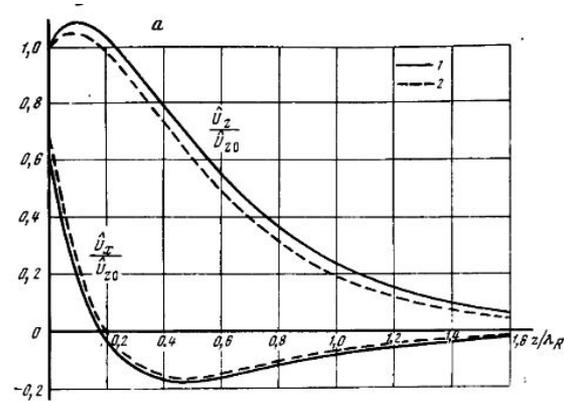


Картина поля упругих смещений
в волне Рэлея

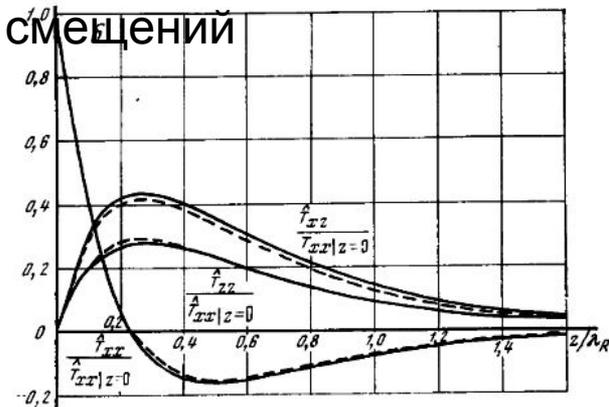
Траектории движения частиц среды в поверхностной волне Рэлея



Распределение средней по времени
плотности энергии с глубиной



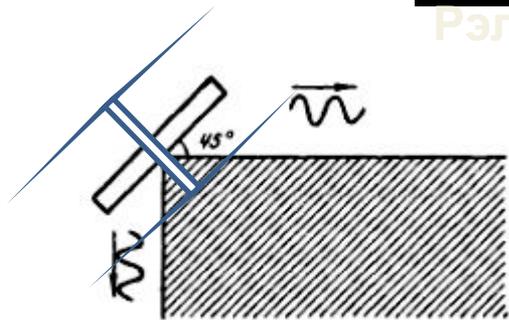
Распределение с
глубиной
нормированных
смещений



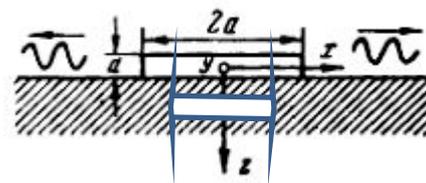
Распределение с глубиной
нормированных
напряжений

Способы возбуждения волн

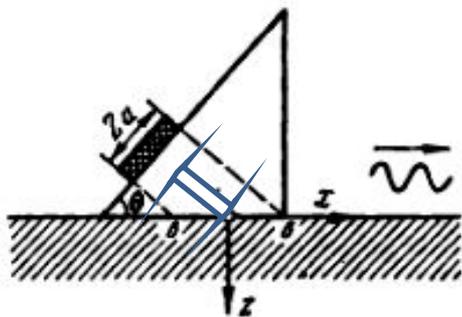
Рэля



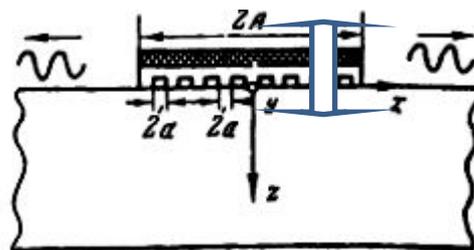
Кварцевая пластинка X-среза



Кварцевая пластинка Y-среза
с жидкой связкой



Метод клина, преобразующего падающую под специальным углом продольную волну в волну Рэля

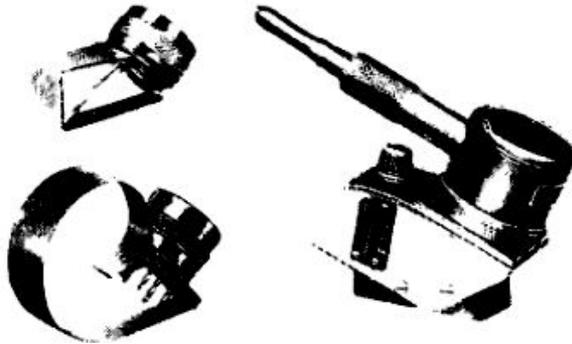


Гребенчатая структура

Применения волн

Рэля

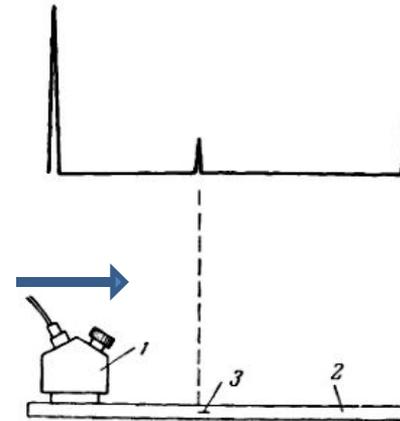
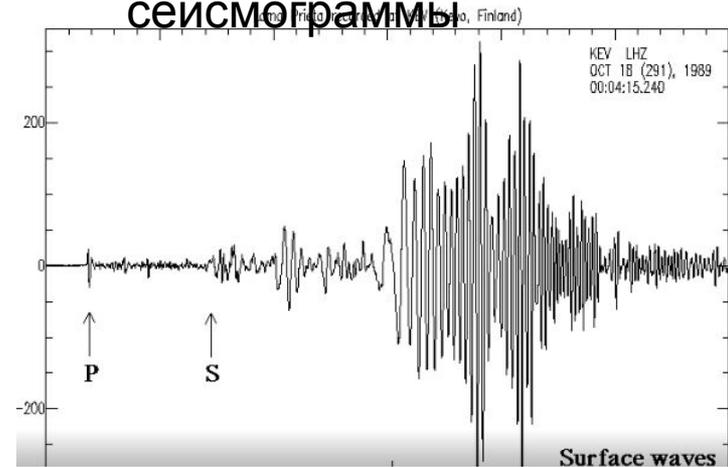
1. Сейсмология
(сейсморазведка,
контроль взрывов)
2. Ультразвуковая
дефектоскопия



Головки УЗ-дефектоскопов
для возбуждения ПАВ Рэля
(метод клина)

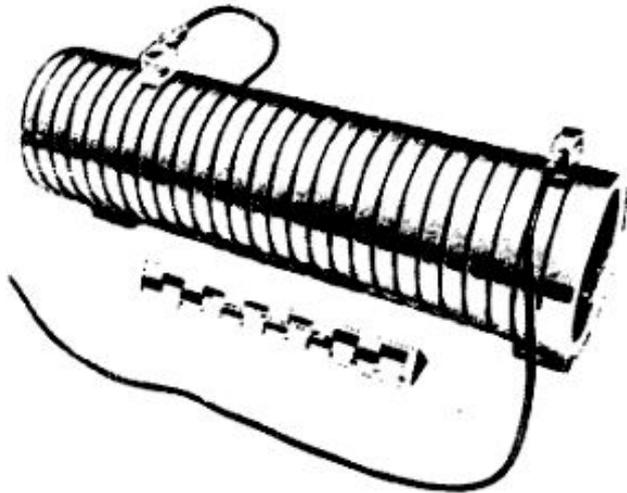
Схема эхо-метода УЗ-
дефектоскопии

Фрагмент сейсмограммы

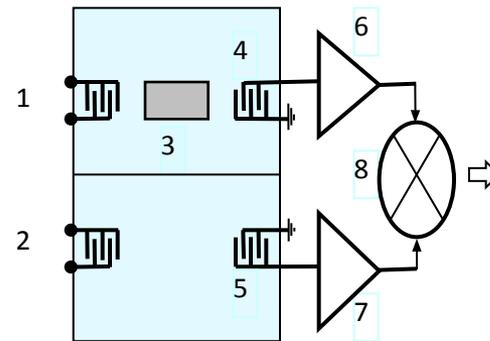
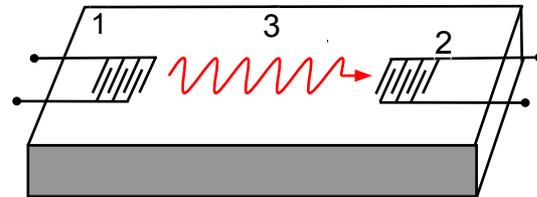


3. Научные исследования (физика поверхности, пленочные покрытия)

4. Ультразвуковые линии задержки и другие устройства обработки



Линия задержки с циркуляционным распространением ПАВ Рэлея

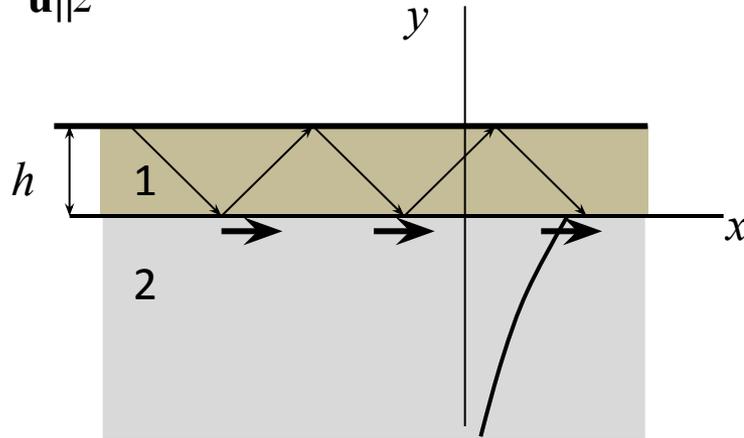


Линия задержки и сенсорный датчик на ПАВ

2. Поверхностные волны

Лява

Волна горизонтальной поляризации. Чисто сдвиговая с $\mathbf{u} \parallel z$



Граничные условия

$$T_{yz}^{(1)} \Big|_{y=h} = 0$$

$$u_z^{(1)} \Big|_{y=0} = u_z^{(2)} \Big|_{y=0}$$

$$T_{yz}^{(1)} \Big|_{y=0} = T_{yz}^{(2)} \Big|_{y=0}$$

Дисперсионное соотношение

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha_1 h) = \frac{\mu_2 \alpha_2}{\mu_1 \alpha_1}}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^{(1)2}} - k^2}$$

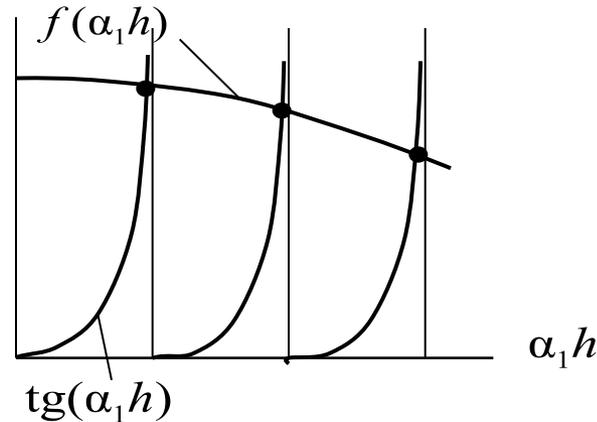
$$\alpha_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^{(2)2}}}$$

Из требования $\alpha_{1,2} > 0 \implies c_t^{(1)} < \frac{\omega}{k} = v_L < c_t^{(2)}$

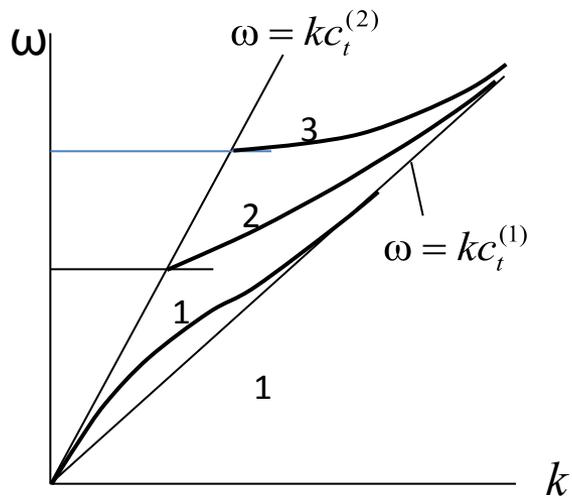
Если в отношении $\frac{\mu_2 \alpha_2}{\mu_1 \alpha_1}$ величину α_2 выразить через α_1

$\frac{\mu_2 \alpha_2}{\mu_1 \alpha_1} \rightarrow f(\alpha_1 h)$ (на фиксированной частоте или длине волны)

то решение дисперсионного соотношения можно геометрически интерпретировать как точки пересечения ветвей функции $\text{tg}(\alpha_1 h)$ с кривой $f(\alpha_1 h)$

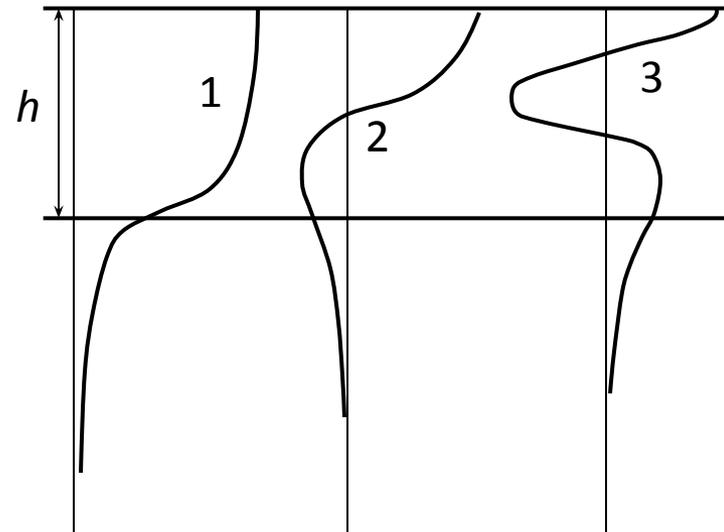


Многоветвевой характер решения



Спектр мод Лява с
выраженной
частотной
дисперсией

1



Распределение сдвиговых
смещений
по глубине в модах волн Лява