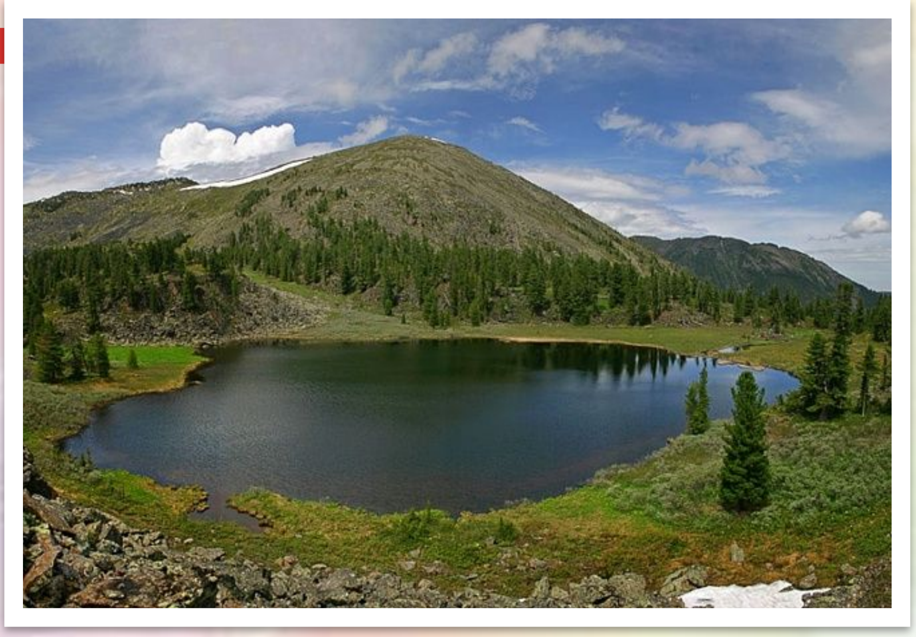
МОУ «Парканская ООШ №3»

Прикладные задачи математики

- Учитель математики :
- Вербанова Наталья Ивановна

Гидрологические задачи



Задача №1

Для некоторой реки экспериментально установили следующую зависимость скорости течения реки V(м/с) от глубины h

$V=-h^2+2h+8$

Найти глубину с максимально сильным течением, и максимальную глубину реки(т.е. глубину, где $V=0$)

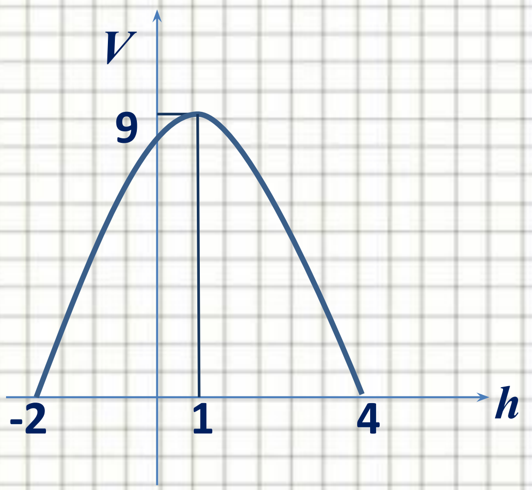
Решение:

1) Находим глубину с максимально сильным течением

$V=-h^2+2h+8$ – квадратичная функция, график парабола, ветви которой направлены вниз, т.к. $a=-1<0$

$V_{max}=V_в \quad h_в=\frac{-2}{2\cdot(-1)}=\frac{-2}{-2}=1$

$V_в=-1^2+2\cdot1+8=-1+2+8=9$(м/с) при $h=1$м



2) $V=0 \quad -h^2+2h+8=0$

По теореме Виета $h_1=4,\ h_2=-2$

$h_2<0$ – условию задачи не подходит

$h=h_1=4$м –максимальная глубина

Ответ: h=4м – максимальная глубина, V_{max} =9 м/с при h=1м

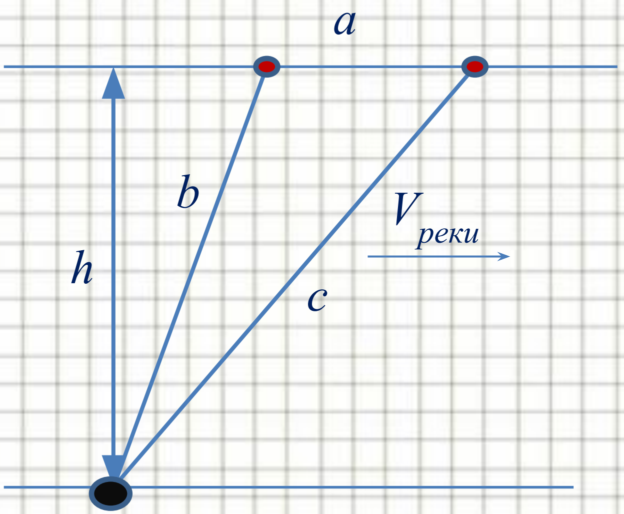
Задача №2

Как измерить глубину реки, оставаясь на берегу?

К грузилу привязывают две бечёвки разной длины (пусть b и c) на их концы поплавки. Всю эту конструкцию бросают в воду. Осталось измерить расстояние между поплавками (пусть оно будет **a**), когда их отнесёт течением. Чтобы найти глубину h воспользуемся формулами площади треугольника S=$\frac{a \cdot h}{2}$ и

S=$\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}$, тогда h=$\frac{2 \cdot S}{a} = \frac{2\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$

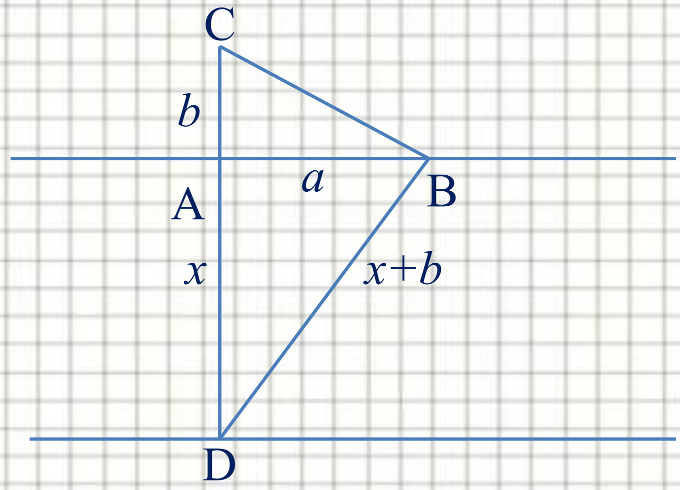
Ответ: h=$\frac{2\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$



Задача №3

Вы плывёте на лодке по озеру и хотите узнать его глубину. Нельзя ли воспользоваться для этого торчащим из воды камышом, не вырывая его?

Решение:



Слегка отклонив камыш и держа его в натянутом состоянии, замерим расстояние а между точками А и Б в которых камыш пересекает поверхность воды, соответственно в вертикальном и наклонном положении.

Возвратим камыш в исходное состояние и определим высоту b над водой, на которую поднимется при этом точка В наклоненного камыша, заняв исходное положение С. Тогда обозначив через D основание камыша, а через x – искомую глубину AD, из прямоугольного треугольника ABD, по теореме Пифагора получаем $x^2+a^2=(x+b)^2$.

Решая это уравнение относительно x получаем

$x=\frac{a^2-b^2}{2b}$

Данный метод позволяет определить глубину озера не замочив рукавов.

Ответ: $x=\frac{a^2-b^2}{2b}$

Агро-
экономические

Задача №1

Агрономическими опытами установлена зависимость между урожайностью у(ц/га) гречихи и среднесуточной температурой t (^{0}C) при которой она выращивалась

$Y=3,6t-0,1t^2-12,4$

Определите при какой температуре урожайность превышает 18,4(ц/га)

Решение:

$y>18,4$

$3,6t-0,1t^2-12,4>18,4$

$3,6t-0,1t^2-12,4-18,4>0$

$-0,1t^2+3,6t-30,8>0$

1) Рассмотрим функцию $y=-0,1t^2+3,6t-30,8$, график парабола ветви которой направлены вниз, так как $a=-0,1<0$
2) Находим нули функции $y=0$

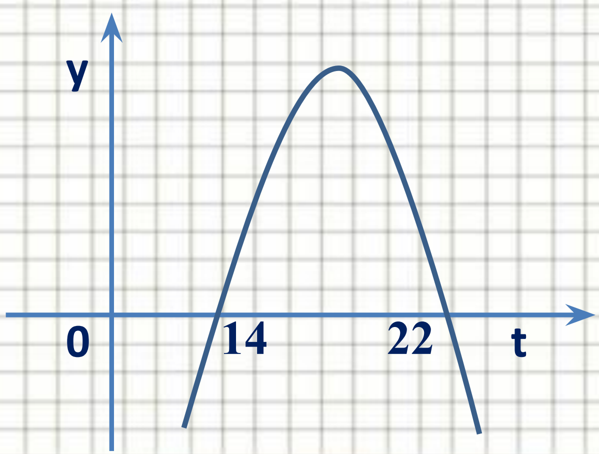
$-0,1t^2+3,6t-30,8=0$

$D=0,64$, $D>0$ - уравнение имеет два корня

$t_1=22$

$t_2=14$

$14^oC<t<22^oC$



Ответ: $14^oC<t<22^oC$

Задача №2

Агрономическими опытами установлена зависимость между урожайностью **у**(кг/м^2) пшеницы сорта «Мироновская» и среднесуточной температурой **t** (^{0}C) при которой она выращивалась:
$Y=-0,0131t^2+0,468t-3,0744$
Найдите оптимальную температуру, которая обеспечивает максимальный урожай

Решение:

1) Рассмотрим функцию $\mathbf{y=-0,0131t^2+0,468t-3,0744}$, график парабола ветви которой направлены вниз, так как $a=-0,0131<0$
2) Максимальный урожай будет когда $t=t_в=\frac{-0,468}{2\cdot(-0,0131)}=\frac{-0,468}{-0,0262}=17,9(^oC)$

Ответ: Оптимальная температура, которая обеспечивает максимальный урожай 17,9 ^{o}C

Задача №3

К животноводческой ферме ЗАО нужно проложить водопровод длиной 191 м. ЗАО располагает трубами одинакового диаметра длиной в 5м и 7 м. Найти наиболее экономически целесообразное число труб той и другой длины, которой следует использовать для прокладки водопровода, учитывая, что разрезать трубы не рекомендуется, и необходимо сделать наименьшее число соединений.

Решение:

Обозначаем, число труб длиной 5 м через x, а число труб длиной 7 м через y, тогда получаем уравнение. $5x+7y=191$

По условию задачи x N, y N. Так как 191 не кратно ни 5, ни 7 и учитывая требования задачи о недопустимости разрезать трубы, можно сделать вывод о том, что ограничится трубами одного из двух заданных размеров нельзя.

Для решения уравнения запишем его в виде: $5x=191-7y$. Уравнению удовлетворяют пары чисел (34;3), (27;8), (20;13), (13;18), (6,23).

Таким образом, уравнение имеет 5 различных решений. Мы используем требование о необходимости сделать наименьшее число соединений.

При $x=34$ и $y=3$ – потребуется сварить 36 соединений, при $x=27$ и $y=8$ – 34 соединения, при $x=20$ и $y=13$ – 32 соединения, при $x=13$ и $y=18$ – 30 соединений, при $x=6$ и $y=23$ -28 соединений. Таким образом, наименьшее число соединений достигается при $x=6$ и $y=23$.

Ответ: $x=6$ и $y=23$.

Задача №4

Трактор ДТ-75 расходует в сутки при двусменной работе на 1,5 кг автола больше, чем трактор "Беларусь", если ДТ-75 израсходовал 94 кг автола, а трактор "Беларусь" проработал на двое суток больше, 75 кг.

Решение:

Пусть х (кг) – суточный расход автола трактором "Беларусь".

Получаем уравнение: $\frac{75}{x}-\frac{94}{x+1,5}=2$

Выполним преобразования, получаем уравнение $\frac{2x^2+22x-112,5}{x(x+1,5)}=0$

Используя условие равенства дроби нулю, получаем, что

Д>0 –уравнение имеет 2 корня. $\begin{cases} 2x^2+22x-112,5=0 \\ x(x+1,5)\neq 0 \end{cases}$

$Д=22^2-4\cdot 2\cdot 112,5=484+900=1384$ $2x^2+22x-112,5=0$

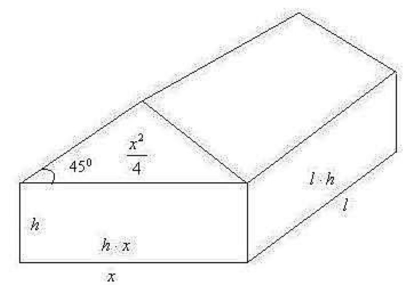
$x_1\approx\frac{-22-\sqrt{1384}}{2\cdot 2}=\frac{-22-37,2}{4}=\frac{-59,2}{4}=-14,8$ $x_2\approx\frac{-22+\sqrt{1384}}{2\cdot 2}=\frac{-22+37,2}{4}=\frac{15,2}{4}=3,8$

Согласно условию задачи x_1 не подходит, тогда $x=x_2$ (кг) – суточный расход автола трактором "Беларусь". Тогда трактор "ДТ-75" расходует в сутки 3,8+1,5=5,3 (кг) автола.

Ответ: 3,8 кг, 5,3 кг.

Задача №5

На рисунке изображен проект теплицы. На её покрытие имеется 89м^2 полиэтиленовой пленки. Заданы размеры теплицы: высота h=2м, длина l=5м, наклон крыши 45^0. Найдите такую ширину, чтобы оптимально использовать плёнку.



Решение:

Площадь торцов $2(hx + \frac{x^2}{4}) = 2hx + \frac{x^2}{2} = 4x + \frac{x^2}{2}$

Площадь боковых стен: $2lh = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$

Откуда получаем уравнение: $\frac{1}{2}x^2 + (4 + 5\sqrt{2})x + 20 - 89 = 0$

$$\frac{1}{2}x^2 + (4 + 5\sqrt{2})x + 69 = 0$$

$$Д = (4 + 5\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(-69) = 16 + 40\sqrt{2} + 25 \cdot 2 + 138 = 16 + 40\sqrt{2} + 50 + 138 = \sqrt{(2 + 10\sqrt{2})^2}$$

$$x_1 = \frac{-4 - 5\sqrt{2} + 2 + 10\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -4 - 5\sqrt{2} + 2 + 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 2 \approx 5{,}07(м)$$

$x_2 < 0$

отпадает.

Ответ: x=5 м.

Задача №6

Вычислите длину ABCD холостого беспетлевого заезда агрегата

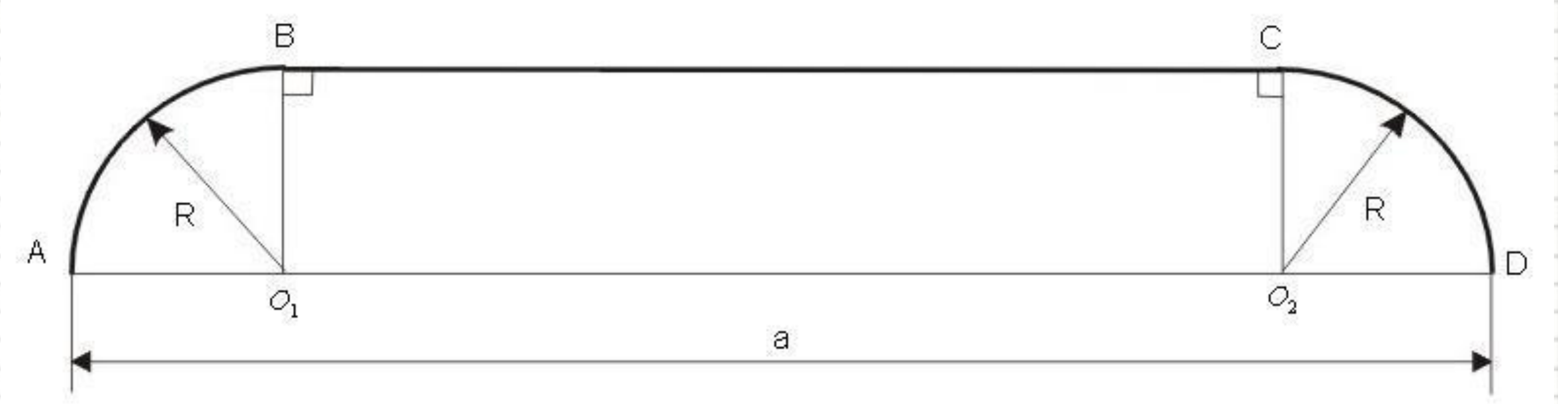
Решение:

$$l = l_{\cup AB} + l_{\cup CD} + BC = l_{\cup AB} + l_{\cup CD} + AD - AO_1 - O_2D.$$

Так как $AO_1 = O_2D = R, AD = a$ и $\cup AB = \cup CD$, то $l = 2l_{\cup AB} + a - 2R.$

Но $l_{\cup AB} = \dfrac{\pi R}{2}$ Следовательно, $l = \pi R + a - 2R$

Откуда, $l = a + 1{,}14R$

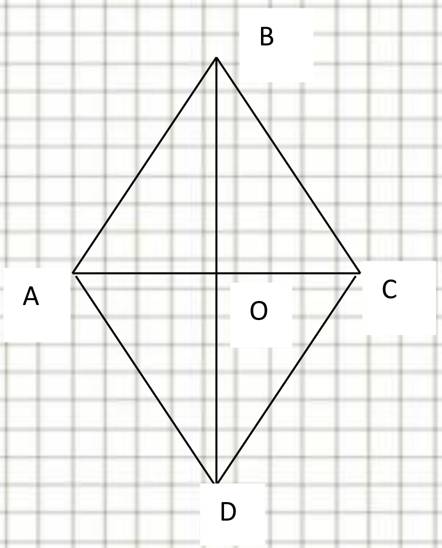


Ответ: $l = a + 1{,}14R$

Задача №7

По периметру сквера, имеющего форму ромба надо посадить деревья на расстоянии 5 м друг от друга. Известно, что площадь сквера 5808 м^2, а длины дорожек, идущих по диагоналям, относятся как 3:4. Сколько саженцев надо для посадки?

Решение:



AC=3x, BD=4x,

S=AC·BD=3x·4x=12x^2

12x^2=5808 | :12

x^2=484

x=22

AC=3·22=66 (м), BD=4·22=88 (м)

OC= AC= ·66=33 (м)

OB= BD= ·88=44 (м)

OBC – прямоугольный; по теореме Пифагора BC^2=OB^2 + OC^2

BC= = = 55 (м)

P=4·BC=4·55=220 (м)

220:5=44 (саженца)

Ответ: 44 саженца.

Химические задачи

Задача №1

Мама просит дочь-восьмиклассницу развести уксус. Дала ей мензурку две поллитровые бутылки и флакон уксусной эссенции, на этикетке у которого указана концентрация 70% . Надо приготовить 1 бутылку 6% уксуса и 1 бутылку 9% уксуса.

Решение:

а) Пусть P_1=70% - концентрация уксусной эссенции, P_2=6% - концентрация уксуса в 1 бутылке, V_2=500ml – объём бутылки.

$P_1V_1=P_2V_2$ $\qquad$ $V_1=\frac{P_2V_2}{P_1}=\frac{6\%\cdot 500ml}{70\%}$=42,86ml

б) P_1=70% - концентрация уксусной эссенции, P_3=9% - концентрация уксуса во 2 бутылке, V_3=500ml – объём бутылки.

$P_1V_1=P_3V_3$ $\qquad$ $V_1=\frac{P_3V_3}{P_1}=\frac{9\%\cdot 500ml}{70\%}$=64,29ml

Ответ: а) 42,86ml; б) 64,29ml

Задача №2

В каких пропорциях нужно смешать 50% и 70% растворы кислоты, чтобы получить 65% раствор.

Решение:

Пусть P_1 - концентрация первого раствора, P_2=- концентрация 2 раствора, V_1 и V_2 соответствующие объемы, тогда концентрация P нового раствора будет вычисляться по формуле среднего арифметического

$P=\frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}$.

Если взять растворы V_1 и V_2 в отношении 1:k, то есть $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{k}$, то $V_2 = kV_1$, тогда получим:

$$P=\frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}=\frac{P_1V_1+k\cdot P_2V_1}{V_1+V_2}=\frac{V_1(P_1+P_2k)}{V_1(1+k)}=\frac{P_1+P_2k}{1+k}$$

$P(1+k)=P_1+P_2k$

$k(P-P2)=P_1-P$

$$k=\frac{P_1-P}{P-P_2}=\frac{50-65}{65-70}=\frac{-15}{-5}=3$$

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{3}$$

Ответ: 1:3

Задача №3

В каких пропорциях нужно смешать золото 375 пробы с золотом 750 пробы, чтобы получить золото 500 пробы.

Решение:

Пусть P_1 =375, P_2=752, V_1 и V_2 соответствующие объемы золота 375 и 750 пробы, тогда P=500 проба рассчитывается по формуле среднего арифметического

$$P=\frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}.$$

Если взять объёмы золота V_1 и V_2 в отношении 1:k, то есть $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{k}$, то $V_2 = kV_1$, тогда получим:

$$P=\frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}=\frac{P_1V_1+k\cdot P_2V_1}{V_1+V_2}=\frac{V_1(P_1+P_2k)}{V_1(1+k)}=\frac{P_1+P_2k}{1+k}$$

$P(1+k)=P_1+P_2k$

$k(P-P2)=P_1-P$

$$k=\frac{P_1-P}{P-P_2}=\frac{375-500}{500-750}=\frac{-125}{-250}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{k}=>\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{1}$$

Ответ: 2:1

Финансовые

Задача№1

Предприниматель имел шестипроцентные облигации, с которых получал ежегодно по 1500 долларов процентных денег. Продав облигации по курсу 120 (т.е. 120% от их номинальной стоимости), часть вырученных денег предприниматель употребил на покупку дома, остатка положил в банк под 4%, а остальные деньги в другой банк под 5%. Из обоих банков вместе предприниматель получал в год 980 долларов дохода. Сколько было заплачено за дом?

Решение:

Шестипроцентная облигация – ценная бумага, дающая обладателю доход в размере 6% от номинальной, то есть обозначенной на облигации стоимости. Поэтому номинальная стоимость всех облигаций 1500·100:6=25000 дол. За них предприниматель выручил 25000·1,2=30000 (дол.) Пусть *x* долларов – сумма, положенная в банк предпринимателем. Тогда получим уравнение

$$\frac{0{,}04x}{3}+\frac{2\cdot 0{,}05x}{3}=980 \quad | \cdot 3$$

$0{,}04x + 0{,}1x = 2940 \Rightarrow 0{,}14x = 2940$

$x = 2940 : 0{,}14 \Rightarrow x = 21000$ (дол.)

На покупку дома потрачено 30000-21000=9000 (дол.)

Ответ: 9000 долларов.

Задача№2

Предприниматель ежегодно расходует 100 долларов на содержание торгового места и преумножает остальной капитал на одну треть. Через три года он стал вдвое богаче. Как велик стал его капитал?

Решение:

Обозначим через *x* (дол.) – первоначальный капитал предпринимателя. Тогда из условия задачи вытекает уравнение:

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x-100)-100\right)-100\right) = 2x$$

$$\frac{16}{9}\left(\frac{4}{3}(x-100)-100\right)-\frac{400}{3} = 2x$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x-100)-100\right) = 2x + \frac{400}{3}$$

$$\frac{64}{27}(x-100)-\frac{1600}{9} = 2x+\frac{400}{3}$$

$$\frac{64}{27}x-\frac{6400}{27}-\frac{1600}{9} = 2x+\frac{400}{3}$$

$$\frac{64}{27}x-2x = \frac{400}{3}+\frac{1600}{9}+\frac{6400}{27}$$

$$\frac{10}{27}x = \frac{14800}{27}$$

$10x=14800$

$x=14800:10 \Rightarrow x=1480$

$2x= 2\cdot 1480 = 2960$ (дол.)

Ответ: 9000 долларов.

Задача№3

Вы должны уплатить за купленный в магазине товар 10 р. У вас одни лишь трёхрублёвки, у кассира только пятирублевки. Как расплатиться с кассиром?

Решение:

Пусть x – число трехрублевых купюр, а y – число пятирублевых купюр. Тогда согласно условию задачи получаем уравнение ***3x - 5y = 19***

Мы получили уравнение с двумя неизвестными. Понятно, что у него бесконечно много решений, но по условию задачи x,y должны быть натуральными числами. Уравнения с такими условиями называются диофантовыми в честь древнегреческого математика Диофанта, который жил в III в. На самом деле имеется в виду система:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 19 \\ x \in N \\ y \in N \end{cases}$$

Задачу можно решить просто подбирая решение, но можно решить другим способом.

$3x = 5y + 19$

$$x = \frac{5y+19}{3} = 2y + 6 - \frac{y-1}{3} \qquad 1)$$

Последний одночлен в правой части уравнения обозначим новой переменной

$$k = \frac{y-1}{3}$$

Подставим (2) в (1) и получаем

$x=2y+6-k=2y-k+6$ (3)

А из равенства (2) имеем:

$3k=y-1$

$y=3k+1$

Подставим это значение в выражение (3) и получаем

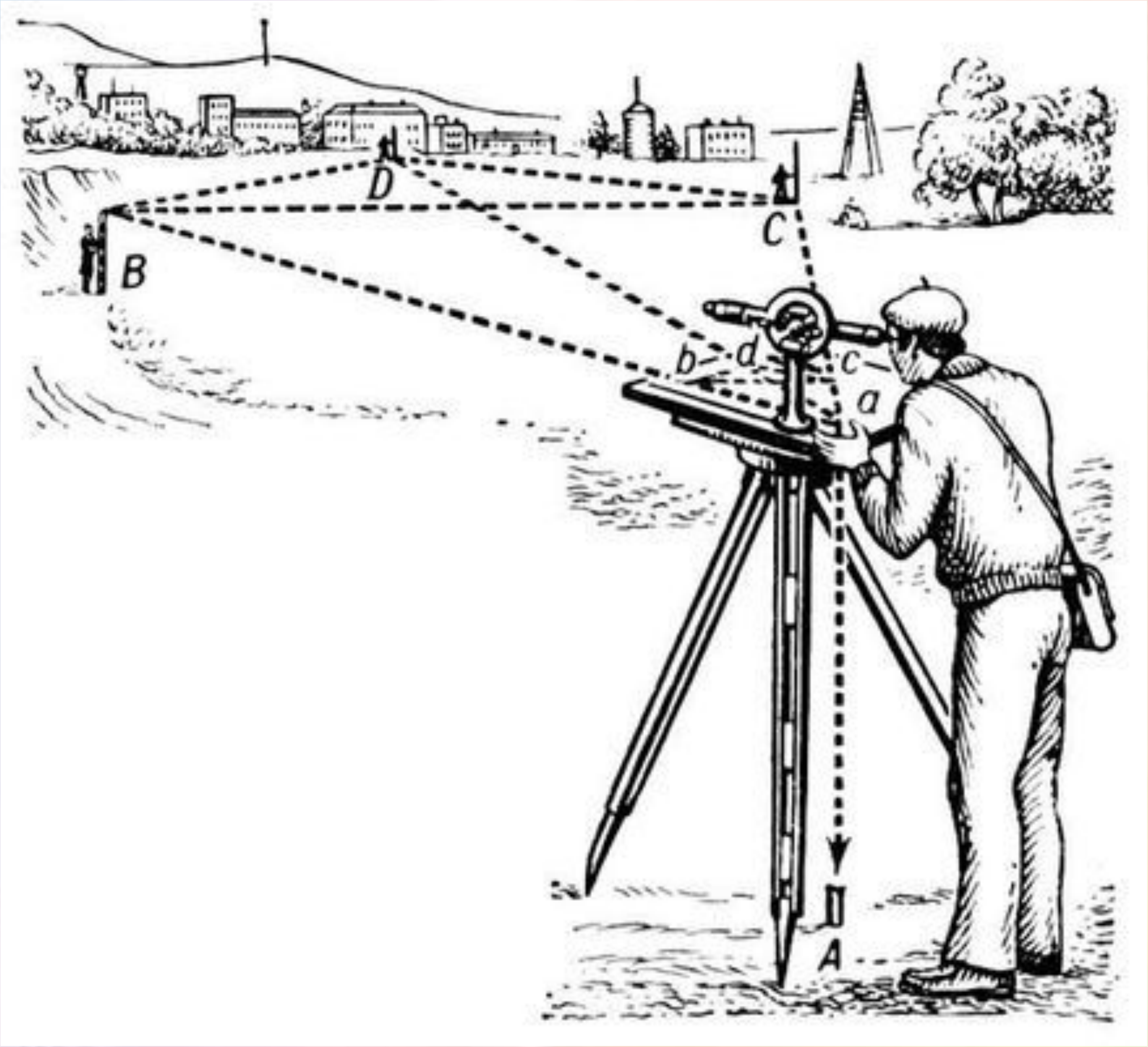
$x=2(3k+1)-k+6=6k+2-k+6=5k+8$

$x=5k+8$

Мы получили формулу для всех решений задачи при k=0,1,2,3…

Ответ: 9000 долларов.

Геодезические



Задача№1

Как далеко может видеть человек среднего роста?

Решение:

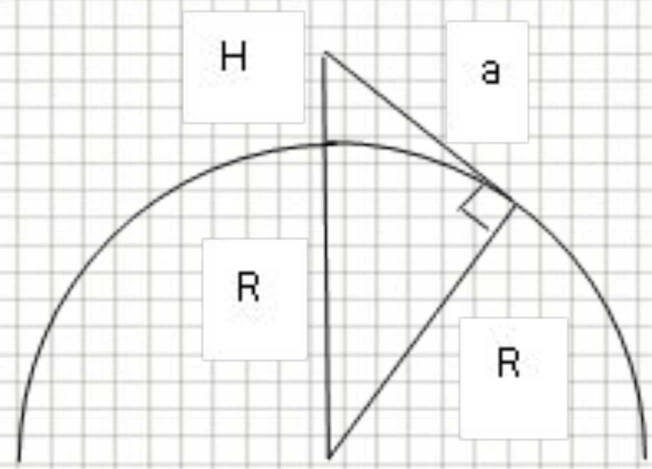
Расстояние от наблюдателя до наиболее далекой видимой точки называют дальностью горизонта.

Пусть а дальность горизонта, R – радиус Земли, H – рост наблюдателя, тогда используя теорему Пифагора получаем:

$a^2 = (R+H)^2 - R^2 = R^2 + 2RH + H^2 - R^2 = 2RH + H^2 = H(2R + H)$

Во втором сомножителе величиной H можно пренебречь по сравнению с диаметром Земли 2R = 12 740 000 м

Тогда получим приближенную формулу а = ≈ 3570 (м)



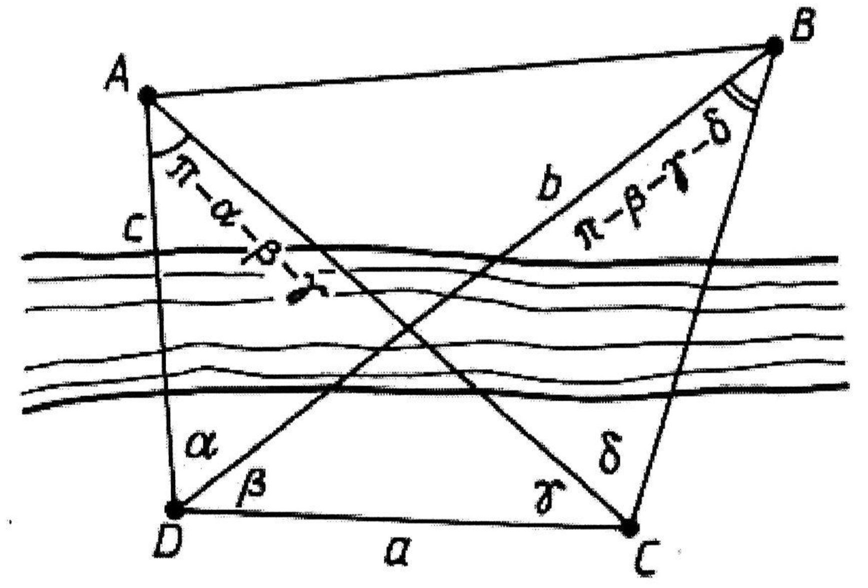
Луч света в атмосфере искривляется, и практически мы видим чуть дальше:

а = 3860 $\sqrt{H}$

Ответ: а = 3570 $\sqrt{H}$

Задача№2

Как вычислить недоступное расстояние AB, если измерено расстояние DC=*a* и углы α, β, γ, δ.



Решение:

По теореме синусов:

$$b = BD = \frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)},$$

$$c = AD = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

по теореме косинусов:

$$AB^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)$$

$$AB=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)}$$

Ответ: $AB=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)}$