

Кривые второго порядка

- Общее уравнение кривой второго порядка
- Окружность
- Эллипс
- Гипербола
- Парабола

Общее уравнение кривой второго порядка

К кривым второго порядка относятся: **эллипс**, частным случаем которого является **окружность**, **гипербола** и **парабола**.

Они задаются уравнением второй степени относительно **x** и **y**:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

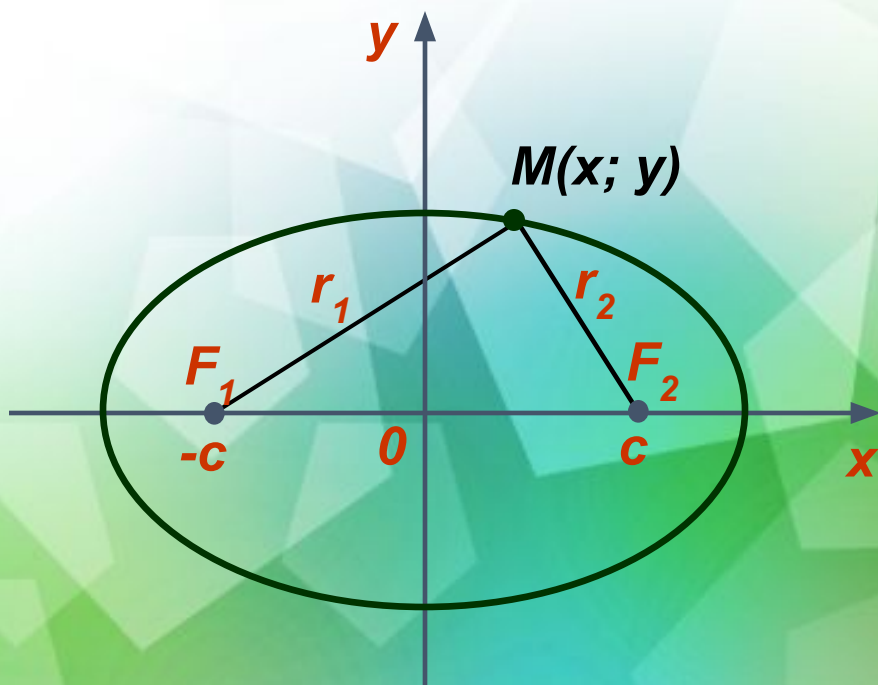
Общее уравнение кривой
второго порядка

В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$, а середину отрезка F_1F_2 – **центром** эллипса.

Зададим систему координат и начало координат выберем в середине отрезка $[F_1F_2]$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Эллипс

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2} \Rightarrow$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} - \cancel{x^2} - 2xc - \cancel{c^2} \Rightarrow$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2 : 4 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2 \Rightarrow$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 : (a^2b^2)$$

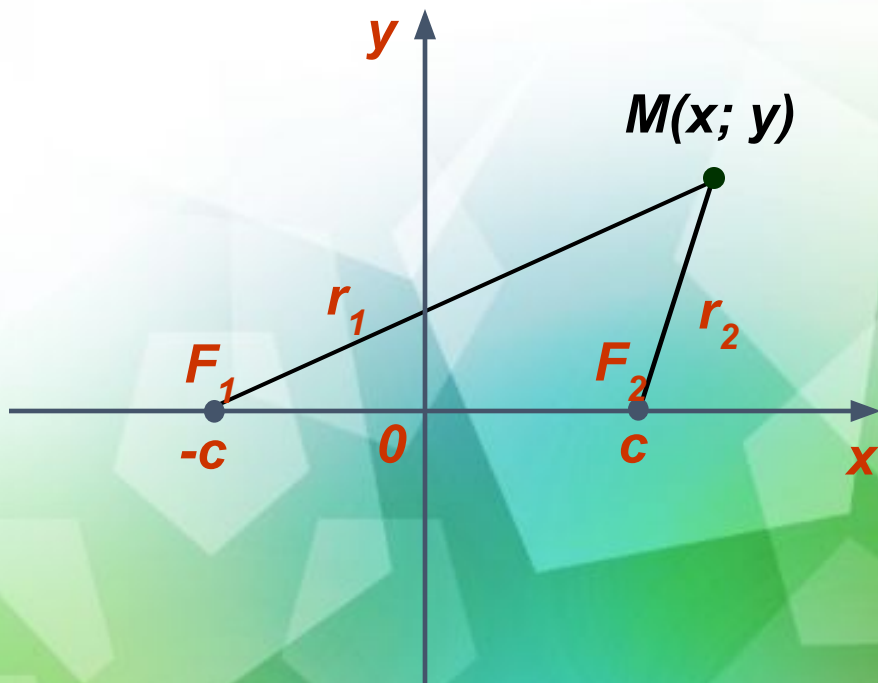
b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение
эллипса

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости F_1 и F_2 , называемых **фокусами**, есть величина постоянная, равная $2a$, а середину отрезка F_1F_2 – **центром** гиперболы.



$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0)$$

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Гипербола

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

После тождественных преобразований уравнение примет вид:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 : (a^2 b^2)$$

$$b^2$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение
гиперболы

Пример

Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(6; -4)$, если ее асимптоты заданы уравнениями:

$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} x \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 3b = \sqrt{6}a$$

Точка A лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{6^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2$$

Решим систему:
$$\begin{cases} 3b = \sqrt{6}a \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 36b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

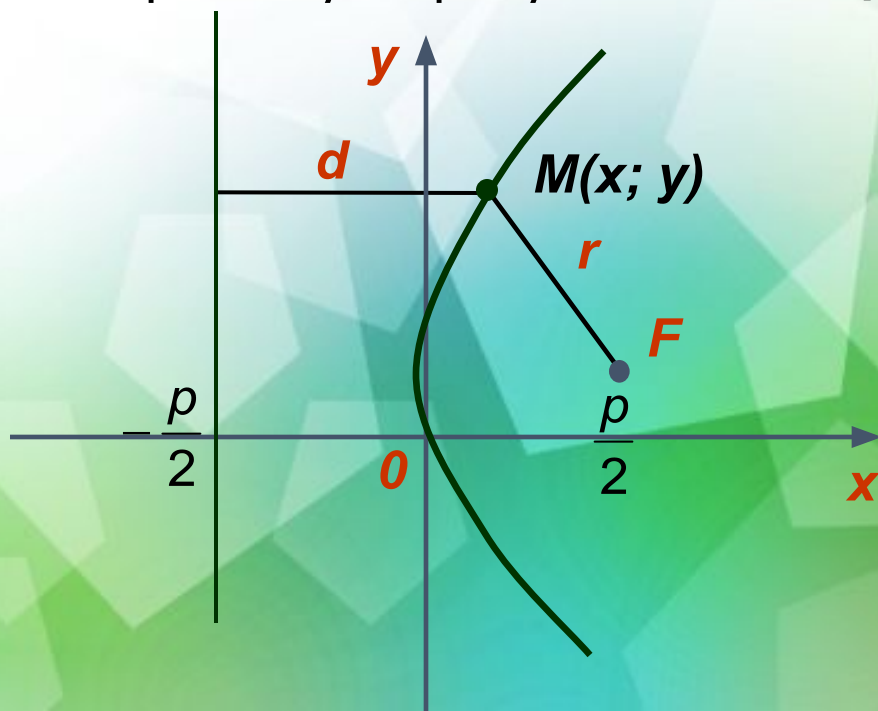
$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ 24a^2 - 16a^2 = \frac{2}{3}a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12 \\ b^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки той же плоскости

$F(\frac{p}{2}; 0)$ называемой **фокусом**, равно расстоянию до прямой: $x = -\frac{p}{2}$

Фиксированную прямую называют **директрисой** параболы.



$$r = d \quad F(\frac{p}{2}; 0) \quad p > 0$$

$$r = |FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$d = x + \frac{p}{2}$$

Преобразование общего уравнения к каноническому виду

Общее уравнение кривой называется пяти-членным, если $2Bxy=0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Приведение пяти-членного уравнения к каноническому виду рассмотрим на примере:

$$16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$(16x^2 - 32x) + (25y^2 + 50y) - 359 = 0 \Rightarrow$$

$$16(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 2y) = 359 \Rightarrow$$

$$16(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 2y + 1) = 359 + 16 + 25 \Rightarrow$$

$$16(x - 1)^2 + 25(y + 1)^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$$