

**ТЕОРИЯ  
ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
И  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
СТАТИСТИКА**

# АКТУАЛЬНОСТЬ

## **РОЛЬ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ:**

- ПОЗВОЛЯЕТ ЛУЧШЕ ОРИЕНТИРОВАТЬСЯ В ОКРУЖАЮЩЕМ МИРЕ, ГДЕ НЕ ВСЕ ЖЕСТКО ДЕТЕРМИНИРОВАНО;
- ЯВЛЯЕТСЯ ОСНОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

## **РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕС- КОЙ СТАТИСТИКИ:**

- НУЖНА ДЛЯ СИСТЕМАТИЗАЦИИ И ОЦЕНКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ НАУЧНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
- ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ МЕДИЦИНСКОЙ СТАТИСТИКИ



Лекция 1.

**ОСНОВЫ  
ТЕОРИИ  
ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Часть I.

**СЛУЧАЙНЫЕ**

**СОБЫТИЯ**

# 1. ВИДЫ СОБЫТИЙ

ВСЕ СОБЫТИЯ  
В ТЕОРИИ  
ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
ПРИНЯТО ОБОЗНАЧАТЬ  
ЗАГЛАВНЫМИ

БУКВАМИ

ЛАТИНСКОГО  
АЛФАВИТА: А, В, С, ...

ТЕОРИЯ  
ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
ОПЕРИРУЕТ  
*СЛУЧАЙНЫМИ*  
СОБЫТИЯМИ.

## СЛУЧАЙНОЕ –

СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ  
В ДАННОМ ИСПЫТАНИИ  
МОЖЕТ ПРОИЗОЙТИ,  
А МОЖЕТ И НЕ  
ПРОИЗОЙТИ.

*Примеры:*

- падение монеты определенной стороной вверх;
- выпадение определенного числа очков на кубике для настольной игры.

# Статистические закономерности

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ  
ИМЕЮТ ПРИЧИНЫ,  
И В МИРЕ ЭТИХ СОБЫТИЙ  
СУЩЕСТВУЮТ  
ЗАКОНОМЕРНОСТИ.

ОДНАКО ПРОЯВЛЯЮТСЯ ОНИ  
ЛИШЬ ПРИ БОЛЬШОМ  
ЧИСЛЕ ИСПЫТАНИЙ.

ТАКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ  
НАЗЫВАЮТСЯ  
*СТАТИСТИЧЕСКИМИ.*

Пример - основной закон  
радиоактивного распада.



**МНОЖЕСТВО  
СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ  
КАК БЫ ОГРАНИЧЕНО  
С ДВУХ СТОРОН  
СОБЫТИЯМИ**

***НЕВОЗМОЖНЫМИ  
И  
ДОСТОВЕРНЫМИ.***

**НЕВОЗМОЖНОЕ –  
СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ  
В ДАННОМ  
ИСПЫТАНИИ  
НЕ МОЖЕТ ПРОИЗОЙТИ.**

**Например, если  
на гранях кубика число  
очков от 1 до 6, то  
выпадение семи очков  
при единичном  
бросании кубика –  
невозможное событие.**

**ДОСТОВЕРНОЕ –  
СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ  
В ДАННОМ  
ИСПЫТАНИИ  
ОБЯЗАТЕЛЬНО  
ПРОИЗОЙДЕТ  
(НЕ МОЖЕТ НЕ  
ПРОИЗОЙТИ).**

- Например, если в некоторой корзине (часто говорят "в урне") имеются **ТОЛЬКО КРАСНЫЕ ШАРЫ**, **ТО ВЫТАСКИВАНИЕ ИЗ НЕЕ ИМЕННО КРАСНОГО ШАРА – событие ДОСТОВЕРНОЕ.**
- В то же время вытаскивание черного шара – событие **НЕВОЗМОЖНОЕ.**

**Среди НЕСКОЛЬКИХ  
случайных  
событий могут  
быть события**

- *РАВНОВОЗМОЖНЫЕ,*
- *НЕСОВМЕСТИМЫЕ,*
- *ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ*



# Равновозможные события

События называются  
равновозможными,

если не существует  
причин,

в силу которых одно из  
них происходило бы  
чаще других.

## Пример

В урне 2 КРАСНЫХ  
и 2 ЧЕРНЫХ шара.

Тогда

**ВЫТАСКИВАНИЕ  
КРАСНОГО ШАРА  
и ВЫТАСКИВАНИЕ  
ЧЕРНОГО ШАРА –  
события  
РАВНОВОЗМОЖНЫЕ.**

# Несовместные события

События называются **несовместными**, если появление одного из них в данном испытании **исключает** появление **других в том же испытании**.

## Пример

Имеется урна с красными и черными шарами.

Предполагается, что в руке помещается только один шар.

Тогда **ПОЯВЛЕНИЕ** при **ЕДИНИЧНОМ** вытаскивании

одновременно

**КРАСНОГО ШАРА** и **ЧЕРНОГО ШАРА** –

**события НЕСОВМЕСТИМЫЕ.**

# Противоположные события

Два события  
называются  
противоположными,  
если одно из них  
заключается в том, что  
другое  
не происходит.

Т.е., вместе они  
охватывают все  
возможные итоги  
испытания.

**ОБОЗНАЧЕНИЕ:**

$A$  и  $\bar{A}$

(читается "А" и "НЕ А").

Пример

Выпадение орла и  
выпадение решки  
при единичном бросании  
монеты –  
противоположные  
события  
(если исключить возмож-  
ность установки монеты  
на ребро).

## Примечание

***ЛЮБЫЕ  
ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ  
СОБЫТИЯ  
НЕСОВМЕСТНЫ.***

***Обратное утверждение  
в общем случае  
неверно.***

## 2. КОМБИНАЦИИ СОБЫТИЙ

РАССМОТРИМ ДВЕ КОМБИНАЦИИ СОБЫТИЙ:  
*СУММУ*  
*И*  
*ПРОИЗВЕДЕНИЕ.*

*ОБОЗНАЧЕНИЕ* этих комбинаций  
*для ДВУХ СОБЫТИЙ,*  
*СОБЫТИЯ А И СОБЫТИЯ В :*  
сумма – « $A + B$ »,  
произведение – « $A \cdot B$ ».

# Сумма событий

**СУММА СОБЫТИЙ** –  
это событие, состоящее  
в том,  
что происходит  
или А, или В, или  
ОНИ ОБА ВМЕСТЕ.

**ИНАЧЕ:**

ЕСЛИ ПРОИСХОДИТ  
ХОТЯ БЫ ОДНО ИЗ  
НИХ.

**СОЮЗЫ "ИЛИ", "ХОТЯ  
БЫ" – УКАЗАНИЕ НА  
СУММУ СОБЫТИЙ.**

# Произведение событий

## **ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ –**

**это событие, состоящее  
в том,**

**что происходит**

**и А, и В,**

**т.е. они появляются  
оба, совместно.**

**СОЮЗ "И" –  
УКАЗАНИЕ НА  
ПРОИЗВЕДЕНИЕ  
СОБЫТИЙ.**

**ПРОИЗВЕДЕНИЕ  
НЕСОВМЕСТНЫХ  
СОБЫТИЙ ЕСТЬ  
СОБЫТИЕ  
НЕВОЗМОЖНОЕ.**

### 3. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

**ВЕРОЯТНОСТЬ ЕСТЬ КОЛИЧЕСТВЕННАЯ  
МЕРА ВОЗМОЖНОСТИ СОБЫТИЯ.**

Существует несколько определений  
вероятности.

Чаще всего используются  
**КЛАССИЧЕСКОЕ** и  
**СТАТИСТИЧЕСКОЕ** определения.

# Классическое определение вероятности

**ВЕРОЯТНОСТЬЮ  
СОБЫТИЯ «А»  
НАЗЫВАЕТСЯ  
ОТНОШЕНИЕ ЧИСЛА  $m$   
БЛАГОПРИЯТСТВУ-  
ЮЩИХ «А»  
ИСХОДОВ ИСПЫТАНИЯ  
К ОБЩЕМУ ЧИСЛУ  $n$   
ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ  
ИСХОДОВ ИСПЫТАНИЯ.**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Так, если в урне 2 красных и 3 белых шара, то вероятность вытащить при единичном испытании красный шар -  $2/5$ , белый шар –  $3/5$ .

## Предварительные пояснения к статистическому определению вероятности

Пусть производится серия из  $n$  испытаний, и в этой серии событие  $A$  происходит  $m$  раз. Число  $m$  называется **ЧАСТОТОЙ**, а отношение  $m$  к  $n$   $W(A) = m / n$  – **ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТОЙ** события  $A$ .

Если число испытаний в серии достаточно велико, то относительная частота события - его устойчивая характеристика: она почти не меняется от серии к серии.

# Статистическое определение вероятности

**ВЕРОЯТНОСТЬЮ  
СОБЫТИЯ  $A$   
НАЗЫВАЕТСЯ**

**ПРЕДЕЛ  
ОТНОСИТЕЛЬНОЙ  
ЧАСТОТЫ  
ЭТОГО СОБЫТИЯ**

**ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ  
УВЕЛИЧЕНИИ ЧИСЛА  
ИСПЫТАНИЙ:**

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

**Если  $n$  достаточно  
велико, то**

$$P(A) \approx \frac{m}{n}$$

**Это – «опытная вероят-  
ность». Именно она обычно  
определяется на практике.**

## *Следствия из определений вероятности*

- **ВЕРОЯТНОСТЬ НЕВОЗМОЖНОГО СОБЫТИЯ РАВНА НУЛЮ.**
- **ВЕРОЯТНОСТЬ ДОСТОВЕРНОГО СОБЫТИЯ РАВНА ЕДИНИЦЕ.**

- **ВЕРОЯТНОСТЬ ЛЮБОГО СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ МОЖЕТ ПРИНИМАТЬ ЗНАЧЕНИЯ ЛИШЬ В ИНТЕРВАЛЕ МЕЖДУ ЭТИМИ ЧИСЛАМИ:**

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

## 4. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ  
ДЛЯ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

## 5. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ОБЩЕМ ВИДЕ  
ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ  
СПРАВЕДЛИВА ДЛЯ  
ЛЮБЫХ,  
В ТОМ ЧИСЛЕ  
*ЗАВИСИМЫХ,*  
СОБЫТИЙ.

СОБЫТИЕ В  
ЗАВИСИТ  
ОТ СОБЫТИЯ А,  
ЕСЛИ  
ВЕРОЯТНОСТЬ В  
ЗАВИСИТ ОТ ТОГО,  
ПРОИЗОШЛО ЛИ А.

## Формулировка теоремы умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Здесь  $P(B/A)$  – условная вероятность события  $B$ ,  
т.е. вероятность  $B$  при условии, что  $A$  произошло.

Для НЕЗАВИСИМЫХ событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$