Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

связывающее неизвестную функцию $y(x)$, независимую переменную x и производные неизвестной функции, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***.

n – порядок дифференциального уравнения.

В задаче Коши для дифференциального уравнения n-го порядка искомая функция , кроме самого дифференциального уравнения должна удовлетворять начальным условиям

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ y''(x_0) = \alpha_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \qquad (2)$$

Метод Эйлера

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

Требуется найти функцию, которая удовлетворяет уравнению (3) на интервале (x_0, X) и начальному условию (4).

Разобьем отрезок $[x_0, X]$ на n частей

$$x_i = x_0 + i \cdot h,\ i = \overline{1, n}$$

$$h = \frac{X - x_0}{n}$$

Найдем приближенные значения решение
$y(x)$ в точках

$$x_i,\ i=\overline{1,n}$$

Рассмотрим уравнение (3) в точках

$$x_i,\ i=\overline{0,n-1}$$

Заменим производную $y'(x_i)$ разностной формулой

$$y'(x_i)=\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$$

Получим рекуррентную формулу

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i),\ i=\overline{0,n-1} \qquad (5)$$

Метод Эйлера с уточнением

Найдем приближенное решение по методу Эйлера

$$\widetilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \qquad (6)$$

уточним решение по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1})}{2} \qquad (7)$$

Метод Рунге-Кутты

Рассмотрим задачу Коши $y'(x_0) = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$

Вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right), \qquad (8)$$

$$
\begin{aligned}
K_1^{(i)} &= h \cdot f\left(x_i, y_i\right), \\
K_2^{(i)} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right), \\
K_3^{(i)} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \\
K_4^{(i)} &= h \cdot f\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Для оценки правильности выбора шага h используют дробь

$$
\theta = \left|\frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}}\right| \tag{10}
$$

Оценку погрешности можно получить с помощью двойного просчета

$$
\left|y^*(x) - y(x,h)\right| \approx \left|\frac{y(x,h) - y(x,2h)}{2^p - 1}\right| \le \varepsilon \tag{11}
$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\Delta y_i = y(x+h) - y(x) = h \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{(IV)}(x) \tag{12}$$

Производные определяются последовательным дифференцированием уравнения $y' = f(x, y)$

Метод Пикара (метод последовательных приближений)

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y)$$

правая часть которого в прямоугольнике $R\ \{|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y. Требуется найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию (4).

Интегрируя обе части уравнения от x_0 до x получим

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \qquad (13)$$

Уравнение (3) заменили интегральным уравнением (13), которое удовлетворяет начальному условию (4)

Заменим в равенстве (13) функцию y значением y_0. Получим первое приближение

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$$

Затем в уравнении (13) заменяем y найденным значением значением y_1 и получаем второе приближение

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$$

Решение *y(x)* получают как предел последовательности функций $y_n(x)$, которые находят по рекуррентной формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y_{n-1}(x)\big)dx \qquad (14)$$

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике R, то оценка приближенного решения $y_n(x)$ на отрезке $[x_0, x_0+h]$ определяется неравенством

$$\left|y(x) - y_n(x)\right| \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

где $$M = \max_{(x,y)\in R}\left|f(x,y)\right|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

$$N = \max_{(x,y)\in R}\left|f'_y(x,y)\right|$$

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Представим решение $y(x)$ уравнения (3) в окрестности точки x_0 в виде ряда Тейлора:

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} +$$

$$+ y^{(IV)}(x_0)\frac{(x - x_0)^4}{4!} + \ldots \qquad (15)$$

Представление искомого решения в виде ряда Тейлора особенно удобно для небольшого промежутка интегрирования вблизи начальных значений.

Для нахождения коэффициентов ряда (15) уравнение (3) дифференцируют по x нужное число раз, используя условие (4).