ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ

- Теория поля - крупный раздел, физики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные поля.

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

- Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке M этой области соответствует определенное число U=U(M), говорят, что в области определено, задано скалярное поле (или функция точки). Иначе говоря, скалярное поле - это скалярная функция U(M) вместе с ее областью определения.

- Примерами скалярных полей могут быть поля температуры, атмосферного давления, плотности, электрического потенциала и т.д.
- Если скалярная функция U(M) зависит только от двух переменных, например x и y, соответствующее скалярное поле U(x; y) называют плоским.

ВОПРОС ИССЛЕДОВАНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

- Основной вопрос исследования скалярного поля есть вопрос об изменении функции U при переходе из одной точки пространства в другую. Это геометрическое место точек называют поверхностью уровня скалярного поля U. Ее уравнение в выбранной системе координат имеет вид: U(x; y; z) = C, где C = const.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

- Векторное поле называется соленоидальным, если во всех точках его дивергенция равна нулю, т.е. Примерами соленоидальных полей являются: поле скоростей вращающегося твердого тела; магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль

$$div\overline{\Phi}(M)=0,\quad \forall M\in R_3.$$

ектрический ток, и т.д. :

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ЦИРКУЛЯЦИЯ

- Векторной называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением векторного поля в данной точке.

- Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т.д.

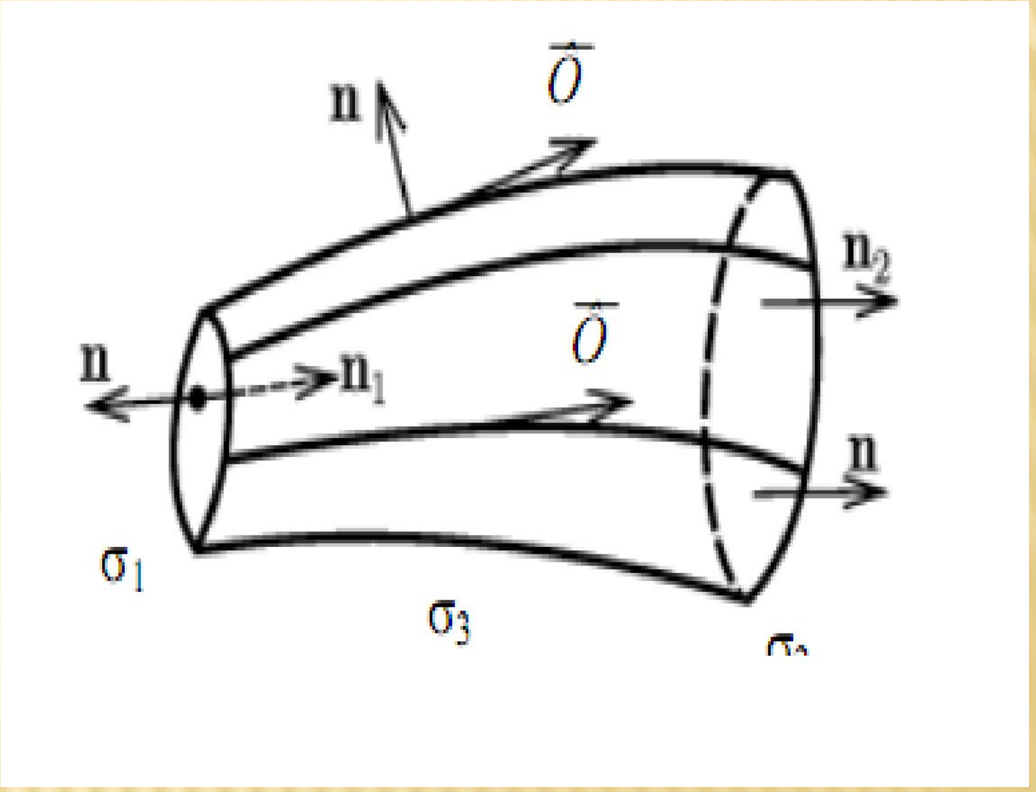
РОТОР (ВИХРЬ) РОТОРНОГО ПОЛЯ

- Ротором(вихрем) rotф вектора ф=(P,Q,R) называется вектор

$$rot\overline{\Phi} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

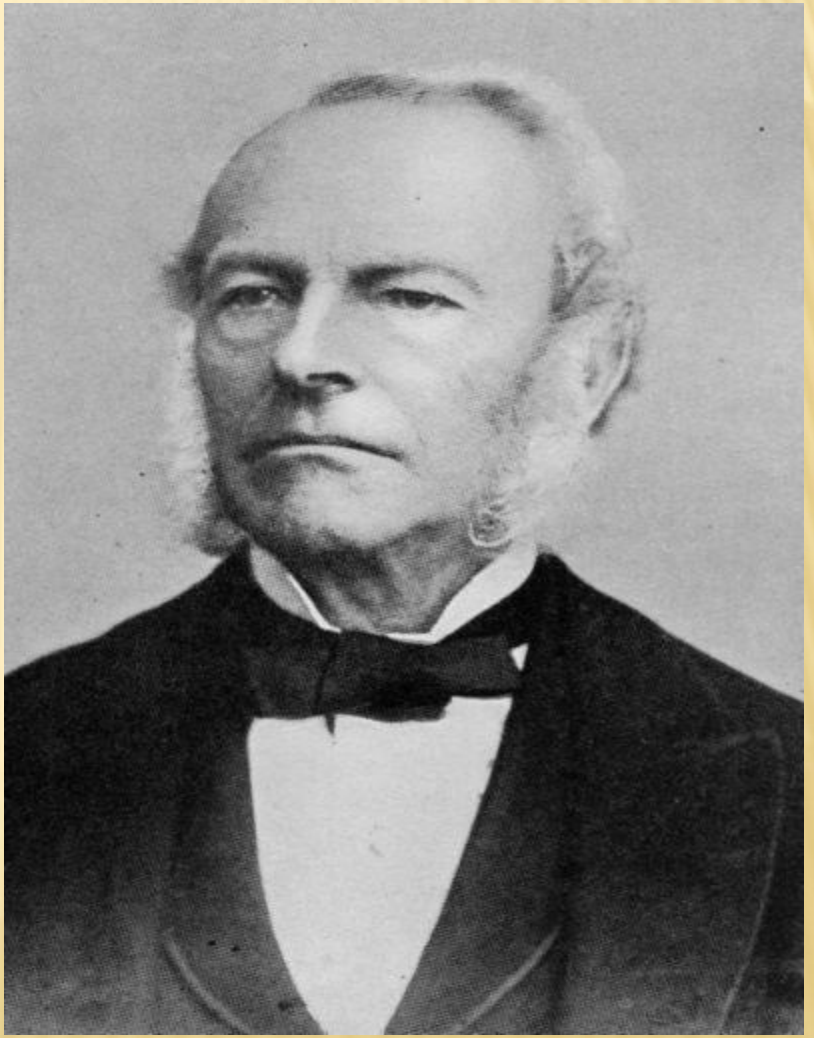
Определение векторной трубки

- Множество всех векторных линий, проходящих через замкнутую кривую L, образуют поверхность, называемую векторной трубкой.



ФОРМУЛА СТОКСА

- Джордж Габриель Стокс – английский механик и математик (1819 – 1903гг.)



ТЕОРЕМА СТОКСА ДОКАЗАНА В 1854Г.

Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности σ, то справедлива формула Стокса:

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+$$

,

где произвольная поверхность σ ограничена контуром L и ориентирована по правилу правой руки.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1	$div(\overline{A}+\overline{B}) = (\nabla, \overline{A}+\overline{B}) = (\nabla \overline{A}) + (\nabla \overline{B}) = div\overline{A} + div\overline{B}$
2	$rot(\overline{A}+\overline{B}) = rot\overline{A} + rot\overline{B}$
3	$grad(\lambda u) = \nabla(\lambda u) = \lambda \nabla u = \lambda grad u$
4	$grad(uv) = \nabla(uv) = \nabla(u_c v) + \nabla(u v_c) = u grad v + v grad u$
5	$div(u\overline{\Phi}) = (\nabla, u\overline{\Phi}) = \nabla(u_c \overline{\Phi}) + \nabla(u\overline{\Phi}_c) = u div\overline{\Phi} + \overline{\Phi} grad u$
6	$rot(u\overline{\Phi}) = [\nabla, u\overline{\Phi}] = [\nabla, u_c \overline{\Phi}] + [\nabla, u\overline{\Phi}_c] = u rot\overline{\Phi} + [grad u, \overline{\Phi}]$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Скалярное поле $u(x,y,z) \to grad\,u$ - вектор

$grad\,u \to div\,grad\,u$ - скаляр

$grad\,u \to rot\,grad\,u$ - вектор

Векторное поле $\overline{\Phi} = (P,Q,R)$

$\overline{\Phi} \to div\,\overline{\Phi}$ - скаляр $\to grad\,div\,\overline{\Phi}$ - вектор

$\overline{\Phi} \to rot\,\overline{\Phi}$ - вектор

$rot\,\overline{\Phi} \to div\,rot\,\overline{\Phi}$ - скаляр

$rot\,\overline{\Phi} \to rot\,rot\,\overline{\Phi}$ - вектор

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, математики, механики и других технических дисциплин. Математическим ядром теории поля являются рассмотренные нами понятия градиента, дивергенции, ротора, циркуляции и др. Эти понятия важны и в усвоении основных идей математического анализа функций многих переменных.